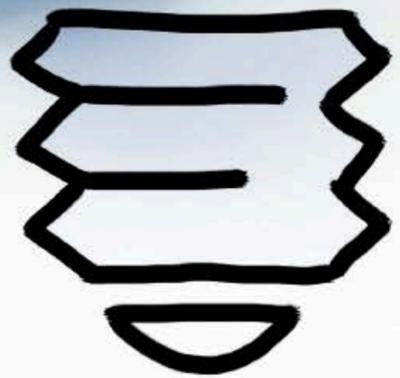


공부하다
박수칠 수학
 기본서 박상철 지음

확률과 통계

새 교육과정



smart is sexy

Orbi

6 이산확률변수

§0. 대푯값과 산포도	
대푯값 196
산포도 197
평균과 분산의 계산 200
§1. 이산확률변수 203
확률변수와 확률분포 204
이산확률변수와 확률질량함수 204
§2. 이산확률변수의 평균과 분산 209
이산확률변수의 평균, 분산, 표준편차 210
분산 $V(X)$ 의 다른 표현 215
이산확률변수 $aX+b$ 의 평균, 분산, 표준편차 217
§3. 이항분포	
이항분포 221
이항분포의 평균, 분산, 표준편차 223
이항분포의 성질 227
큰 수의 법칙 229

「이항분포」를 간단하게 표현하면 독립시행의 확률(p.186)을 확률질량함수로 하는 이산확률변수의 확률분포라고 할 수 있다.

무슨 말인지 이해가 어려운가? 그렇다면 독립시행의 확률부터 복습해보자.

이항분포

어떤 시행을 한 번 할 때 사건 A가 일어날 확률이 p이면, 이 시행을 독립적으로 n번 반복할 때 사건 A가 r번 일어날 확률은 다음과 같다.

$${}_n C_r \times p^r \times q^{n-r} \quad \left(\begin{array}{l} \text{단, } q=1-p \text{이고,} \\ r=0, 1, 2, \dots, n \text{이다.} \end{array} \right)$$

위 정의와 같이 독립시행의 확률은 같은 시행을 반복할 때, 특정 사건이 특정 횟수만큼 일어날 확률을 의미한다. 따라서 이산확률변수의 확률질량함수가 독립시행의 확률과 같으려면 이산확률변수가 특정 사건이 일어나는 횟수를 나타내야 한다.

예를 들어 주사위 1개를 네 번 던지는 시행에서 1 또는 2의 눈이 나오는 횟수를 X로 정하자. 이때, X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고, 각각의 값을 가질 확률은 독립시행의 확률에 따라 다음 식으로 계산할 수 있다.

$$P(X=x) = {}_4 C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{4-x} \quad (\text{단, } x=0, 1, 2, 3, 4)$$

그러므로 X는 주사위를 네 번 던지는 시행의 표본공간

$$S = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \text{는 각각 1부터 6까지의 정수}\}$$

에 속하는 각각의 원소에 0부터 4까지의 정수를 하나씩 대응시키는 함수면 서, 그 정수들을 정해진 확률에 따라 값으로 갖는 이산확률변수가 된다.

또한 확률질량함수가 독립시행의 확률과 같기 때문에 이산확률변수 X의 확률분포는 이항분포가 된다.

일반적으로 이항분포는 다음과 같이 정의된다.

예를 들어 S의 원소 (1, 2, 3, 4)에는 X=2가, (6, 5, 4, 3)에는 X=0이 대응된다.

• 이항분포의 정의

어떤 시행을 한 번 할 때, 사건 A가 일어날 확률이 p이다. 이 시행을 독립적으로 n번 반복할 때 사건 A가 일어난 횟수를 X로 두면 X는 이산확률변수가 되고, X의 확률분포를 이항분포라고 한다.

• 이항분포의 확률질량함수

위 정의와 같은 조건을 갖는 이산확률변수 X의 확률질량함수는 독립시행의 확률에 의해 다음과 같다.

$$P(X=x) = {}_n C_x p^x q^{n-x} \quad \left(\begin{array}{l} \text{단, } q=1-p \text{이고,} \\ x=0, 1, 2, \dots, n \text{이다.} \end{array} \right)$$

★ 위 확률질량함수에 x=0, 1, 2, ..., n을 차례로 대입해서 각각의 확률을 구하면 다음과 같은 확률분포의 표를 만들 수 있다.

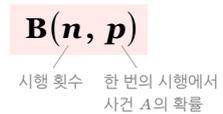
X	0	1	2	...	n
P(X=x)	${}_n C_0 p^0 q^n$	${}_n C_1 p^1 q^{n-1}$	${}_n C_2 p^2 q^{n-2}$...	${}_n C_n p^n q^0$

그리고 위 확률질량함수 또는 확률분포의 표에서 시행을 반복하는 횟수 n과 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률 p만 알면 모든 확률을 구할 수 있다.

따라서 서로 다른 이항분포는 n, p의 값으로 구별할 수 있으며, 이 점을 이용해서 이항분포를 표현하는 기호를 만들면 다음과 같다.

• 이항분포의 기호

위 정의와 같은 조건을 갖는 이항분포는 오른쪽과 같은 기호로 표현되며, '확률변수 X는 이항분포 B(n, p)를 따른다'라고 한다.



6. 이산확률변수

★ $B(n, p)$ 에서 B 는 이항분포를 의미하는 Binomial Distribution의 머릿글자다.

★ 이항분포 $B(n, p)$ 를 따르는 이산확률변수 X 의 확률분포의 표

X	0	1	2	...	n
$P(X=x)$	${}_n C_0 p^0 q^n$	${}_n C_1 p^1 q^{n-1}$	${}_n C_2 p^2 q^{n-2}$...	${}_n C_n p^n q^0$

에서 각각의 확률은 $(p+q)^n$ 을 이항정리에 따라 전개한 식에 포함된 각각의 항과 일치한다.

$$(p+q)^n = {}_n C_0 p^0 q^n + {}_n C_1 p^1 q^{n-1} + {}_n C_2 p^2 q^{n-2} + \dots + {}_n C_n p^n q^0$$

[예] 동전 2개를 동시에 던질 때 둘 다 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{4}$ 이다. 이 시행을 독립적으로 다섯 번 반복할 때, 둘 다 앞면이 나온 횟수를 X 로 두면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(5, \frac{1}{4}\right)$ 을 따른다.

예제1 흰 공 4개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 동시에 2개의 공을 뽑고 다시 넣는 시행을 네 번 반복할 때, 흰 공이 2개 뽑힌 횟수를 X 라고 하자. 다음 물음에 답하시오.

- (1) 확률변수 X 의 확률분포를 기호 $B(n, p)$ 의 꼴로 나타내시오.
- (2) 확률변수 X 의 확률질량함수를 구하고, X 의 확률분포를 표로 나타내시오.
- (3) 흰 공이 2개 뽑힌 횟수가 두 번 이상일 확률을 구하시오.

풀이 (1) 같은 시행을 네 번 반복하고, 한 번의 시행에서 흰 공이 2개 뽑힐 확률이 $\frac{{}_4 C_2}{{}_6 C_2} = \frac{2}{5}$ 이므로 흰 공이 2개 뽑힌 횟수 X 는 이항분포 $B\left(4, \frac{2}{5}\right)$ 를 따른다.

(2) 확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따를 때의 확률질량함수가

$P(X=x) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$ 이므로 이항분포 $B\left(4, \frac{2}{5}\right)$ 의 확률질량함수는 다음과 같다.

$$P(X=x) = {}_4 C_x \left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{3}{5}\right)^{4-x} \quad (\text{단, } x=0, 1, 2, 3, 4)$$

그리고 $x=0, 1, 2, 3, 4$ 일 때의 확률을 계산한 다음, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

$$P(X=0) = {}_4 C_0 \left(\frac{2}{5}\right)^0 \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625} \quad P(X=1) = {}_4 C_1 \left(\frac{2}{5}\right)^1 \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{216}{625}$$

$$P(X=2) = {}_4 C_2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{216}{625} \quad P(X=3) = {}_4 C_3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{96}{625}$$

$$P(X=4) = {}_4 C_4 \left(\frac{2}{5}\right)^4 \left(\frac{3}{5}\right)^0 = \frac{16}{625}$$

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{81}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	1

(3) 흰 공이 2개 뽑힌 횟수가 두 번 이상인 사건은 $X \geq 2$ 이며, 확률은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \frac{216}{625} + \frac{96}{625} + \frac{16}{625} = \frac{328}{625}$$

또한 ①의 양변을 한 번 더 x 에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$n(n-1)(x+q)^{n-2} = \sum_{r=0}^n r(r-1) \cdot {}_n C_r x^{r-2} q^{n-r}$$

여기에 $x=p$ 를 대입하고, 양변에 p^2 을 곱하면 다음과 같이 $E(X^2)$ 이 나타난다.

$$n(n-1)(p+q)^{n-2} p^2 = \sum_{r=0}^n r(r-1) \cdot {}_n C_r p^r q^{n-r}$$

$$\begin{aligned} n(n-1)p^2 &= \sum_{r=0}^n (r^2 - r) \cdot {}_n C_r p^r q^{n-r} = \sum_{r=0}^n r^2 \cdot {}_n C_r p^r q^{n-r} - \sum_{r=0}^n r \cdot {}_n C_r p^r q^{n-r} \\ &= \sum_{r=0}^n r^2 \cdot P(X=r) - \sum_{r=0}^n r \cdot P(X=r) = E(X^2) - E(X) \\ &= E(X^2) - np \end{aligned}$$

$$E(X^2) = np + n(n-1)p^2 = np(np + q) = np(np + q)$$

따라서 분산은

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = np(np + q) - (np)^2 = npq$$

예제2 완치율이 80%인 어떤 병을 앓는 환자 4명이 치료를 받고 있다. 완치된 환자 수를 X 라 할 때, 다음 물음에 답하시오.

- (1) 확률변수 X 의 평균과 분산을 구하시오.
- (2) 환자 가운데 3명 이상이 완치될 확률을 구하시오.

★ 같은 시행을 독립적으로 반복할 때, 특정 사건이 일어나는 횟수에 대한 확률 문제는 독립시행의 확률로, 확률변수 문제는 이항분포로 접근한다.

풀이 같은 병을 앓는 환자 4명을 치료하는 것은 1명을 치료하는 시행을 네 번 반복하는 것으로 볼 수 있으며, 1명이 완치될 확률이 80%이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(4, \frac{4}{5}\right)$ 를 따른다.

$$(1) E(X) = 4 \times \frac{4}{5} = \frac{16}{5}, \quad V(X) = 4 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{16}{25}$$

(2) 확률변수 X 가 이항분포 $B\left(4, \frac{4}{5}\right)$ 를 따르면 확률질량함수는 독립시행의 확률에 따라 다음과 같다.

$$P(X=x) = {}_4 C_x \left(\frac{4}{5}\right)^x \left(\frac{1}{5}\right)^{4-x} \quad (\text{단, } x=0, 1, 2, 3, 4)$$

따라서 3명 이상의 환자가 완치될 확률은 다음과 같다.

$$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) = {}_4 C_3 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^1 + {}_4 C_4 \left(\frac{4}{5}\right)^4 \left(\frac{1}{5}\right)^0 = \frac{512}{625}$$

[2011학년도 수능 나형 #21]

예제3 동전 2개를 동시에 던지는 시행을 10회 반복할 때, 동전 2개 모두 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X 라고 하자. 확률변수 $4X+1$ 의 분산 $V(4X+1)$ 의 값을 구하시오.

풀이 같은 시행을 10회 반복하고, 한 번의 시행에서 동전 2개 모두 앞면이 나올 확률이 $\frac{1}{4}$ 이므로 동전 2개 모두 앞면이 나오는 횟수 X 는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{4}\right)$ 을 따른다.

이때, 확률변수 X 의 분산은 $V(X) = 10 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$ 이고, 확률변수 $4X+1$ 의 분산은 다음과 같다.

$$V(4X+1) = 4^2 \times V(X) = 16 \times \frac{15}{8} = 30$$

[2009학년도 수능 9월 모평 나형 #8]

예제4 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수 a 에 대하여 직선 $y=ax$ 와 곡선 $y=x^2-2x+4$ 가 서로 다른 두 점에서 만나는 사건을 A 라 하자. 한 개의 주사위를 300회 던지는 독립시행에서 사건 A 가 일어나는 횟수를 확률변수 X 라 할 때, X 의 평균 $E(X)$ 를 구하시오.

풀이 직선 $y=ax$ 와 곡선 $y=x^2-2x+4$ 가 서로 다른 두 점에서 만나면 두 방정식을 연립하고 y 를 소거해서 만든, x 에 대한 이차방정식

$$ax = x^2 - 2x + 4 \Rightarrow x^2 - (a+2)x + 4 = 0$$

이 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이때, $D > 0$ 이므로 a 의 범위는 다음과 같다.

$$D = (a+2)^2 - 16 = (a-2)(a+6) > 0 \Rightarrow a < -6 \text{ 또는 } a > 2$$

따라서 사건 A 가 일어나는 것은 3 이상의 눈이 나오는 것과 같고, 주사위를 1번 던질 때 사건 A 가 일어날 확률은 $\frac{2}{3}$ 가 된다. 그리고 주사위를 300번 던질 때 사건 A 가 일어나는 횟수 X 는 이항분포 $B\left(300, \frac{2}{3}\right)$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 300 \times \frac{2}{3} = 200$$

[2014학년도 수능 A형 #9]

예제5 확률변수 X 가 이항분포 $B(9, p)$ 를 따르고 $\{E(X)\}^2 = V(X)$ 일 때, p 의 값을 구하시오. (단, $0 < p < 1$)

풀이 이항분포 $B(9, p)$ 를 따르는 확률변수 X 의 평균과 분산

$$E(X) = 9p, \quad V(X) = 9p(1-p)$$

를 문제에 주어진 등식 $\{E(X)\}^2 = V(X)$ 에 대입해서 p 의 값을 계산하면 다음과 같다.

$$81p^2 = 9p(1-p) \Rightarrow 9p = 1-p \Rightarrow p = \frac{1}{10}$$

예제6 확률변수 X 가 이항분포 $B(25, p)$ 를 따르고,

$P(X=2) = 48P(X=1)$ 을 만족시킨다. 이때, 확률변수 X^2 의 평균을 구하시오. (단, $0 < p < 1$)

풀이 이항분포 $B(25, p)$ 를 따르는 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_{25}C_x p^x (1-p)^{25-x} \quad (\text{단, } x=0, 1, 2, \dots, 25)$$

이며, 문제에 주어진 등식 $P(X=2) = 48P(X=1)$ 에 적용해서 p 의 값을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}_{25}C_2 p^2 (1-p)^{23} &= 48 \times {}_{25}C_1 p (1-p)^{24} \Rightarrow \frac{25 \times 24}{2} \times p = 48 \times 25 \times (1-p) \\ &\Rightarrow p = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(25, \frac{4}{5}\right)$ 를 따르고 평균, 분산이 각각

$$E(X) = 25 \times \frac{4}{5} = 20, \quad V(X) = 25 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = 4$$

이므로 X^2 의 평균을 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \Rightarrow E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 4 + 20^2 = 404$$

예제7 다음 식의 값을 구하시오.

$$\begin{aligned} (1) \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} & \quad (2) \sum_{k=0}^{10} k \cdot {}_{10}C_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} \\ (3) \sum_{k=0}^{10} (2k+3) \cdot {}_{10}C_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} & \quad (4) \sum_{k=0}^{10} (k-4)^2 {}_{10}C_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} \\ (5) \sum_{k=0}^{10} k^2 \cdot {}_{10}C_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} & \quad (6) \sum_{k=0}^{10} (k+2)^2 {}_{10}C_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} \end{aligned}$$

풀이 (1)~(6)의 일반항에 공통으로 포함된 ${}_{10}C_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k}$ 은 이항분포 $B(n, p)$ 의 확률질량함수 $P(X=x) = {}_n C_x p^x q^{n-x}$ 과 같은 꼴이다. 둘을 비교하면 $n=10, x=k, p=\frac{2}{5}, q=\frac{3}{5}$ 이므로 이항분포 $B\left(10, \frac{2}{5}\right)$ 와 (1)~(6)의 관계를 생각하면서 문제를 풀어보자.

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(10, \frac{2}{5}\right)$ 를 따를 때

$$(1) \sum_{k=0}^{10} {}_{10}C_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} = \sum_{x=0}^{10} P(X=x) = \left(\begin{array}{l} X \text{에 대한} \\ \text{모든 확률의 합} \end{array} \right) = 1$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{k=0}^{10} k \cdot {}_{10}C_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} &= \sum_{x=0}^{10} x \cdot P(X=x) \\ &= \{ (X \text{의 값}) \times (\text{확률}) \text{의 합} \} \\ &= E(X) = 10 \times \frac{2}{5} = 4 \end{aligned}$$

$$(3) \sum_{k=0}^{10} (2k+3) \cdot {}_{10}C_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} = \sum_{x=0}^{10} (2x+3) \cdot P(X=x)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{x=0}^{10} (2x+3) \cdot P(2X+3=2x+3) \\ &= \{ (2X+3 \text{의 값}) \times (\text{확률}) \text{의 합} \} \\ &= E(2X+3) = 2E(X)+3 = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \sum_{k=0}^{10} (k-4)^2 {}_{10}C_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} &= \sum_{x=0}^{10} \{ x - E(X) \}^2 \cdot P(X=x) \\ &= \{ (X \text{의 편차})^2 \times (\text{확률}) \text{의 합} \} \\ &= V(X) = 10 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \sum_{k=0}^{10} k^2 \cdot {}_{10}C_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} &= \sum_{x=0}^{10} x^2 \cdot P(X=x) = \sum_{x=0}^{10} x^2 \cdot P(X^2=x^2) \\ &= \{ (X^2 \text{의 값}) \times (\text{확률}) \text{의 합} \} \\ &= E(X^2) = V(X) + \{ E(X) \}^2 \\ &= \frac{12}{5} + 4^2 = \frac{92}{5} \end{aligned}$$

확률변수 X 가 이항분포를 따르면 0 또는 자연숫자만 가지므로 X 가 가질 수 있는 값과 X^2 이 가질 수 있는 값이 일대일대응을 이루면서 $P(X=x) = P(X^2=x^2)$ 이 성립한다.

$$\begin{aligned} (6) \sum_{k=0}^{10} (k+2)^2 {}_{10}C_k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{10-k} &= \sum_{x=0}^{10} (x^2 + 4x + 4) \cdot P(X=x) \\ &= \sum_{x=0}^{10} x^2 \cdot P(X=x) + 4 \sum_{x=0}^{10} x \cdot P(X=x) \\ &\quad + 4 \sum_{x=0}^{10} P(X=x) \\ &= E(X^2) + 4E(X) + 4 \times 1 \\ &= \frac{92}{5} + 4 \times 4 + 4 = \frac{192}{5} \end{aligned}$$

이항분포의 성질

- 이항분포에서 분산의 최댓값

이항분포 $B(n, p)$ 를 따르는 확률변수 X 의 분산 $V(X)$ 는

$$V(X) = npq = np(1-p) \quad (\text{단, } q = 1-p)$$

이다. 이때, 시행 횟수 n 의 값이 일정하다면 $V(X)$ 는 확률 p 에 대한 이차 함수이므로 다음과 같이 완전제곱꼴로 변형할 수 있다.

$$V(X) = np(1-p) = -np^2 + np = -n\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{n}{4}$$

따라서 이항분포 $B(n, p)$ 의 분산 $V(X)$ 는 $p = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값 $\frac{n}{4}$ 을 갖는다.

- 이항분포에서 시행 횟수에 따른 확률분포의 변화

주사위 1개를 던지는 시행을 n 번 반복할 때, 1의 눈이 나오는 횟수를 X 라 하면 X 는 확률변수가 되고, 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{6}\right)$ 을 따른다.

그리고 X 의 평균이 $E(X) = \frac{n}{6}$, 분산이 $V(X) = \frac{5n}{36}$ 이므로 n 의 값이 증가하면 평균과 분산도 함께 증가하게 된다. 이때, 확률분포의 그래프는 평균의 증가에 의해 분포의 중심이 오른쪽으로 이동하고, 분산의 증가에 의해 그래프의 폭이 넓어지게 된다.

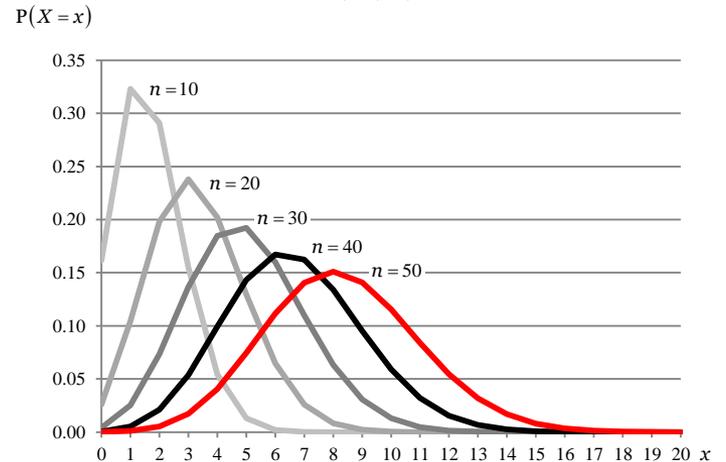
이 경향을 눈으로 확인하기 위해 몇 개의 n 값에 대한 확률분포의 그래프를 그려보자. 확률변수 X 의 확률질량함수

$$P(X=x) = {}_n C_x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{n-x} \quad (\text{단, } x=0, 1, 2, \dots, n)$$

로 $n=10$ 일 때의 확률 $P(X=0) \sim P(X=10)$, $n=20$ 일 때의 확률 $P(X=0) \sim P(X=20)$, ..., $n=50$ 일 때의 확률 $P(X=0) \sim P(X=50)$ 을 계산해서 표로 정리하고, 확률분포를 꺾은선 그래프로 나타내면 다음과 같다.

X	P(X=x)				
	n=10	n=20	n=30	n=40	n=50
0	0.1615	0.0261	0.0042	0.0007	0.0001
1	0.3230	0.1043	0.0253	0.0054	0.0011
2	0.2907	0.1982	0.0733	0.0212	0.0054
3	0.1550	0.2379	0.1368	0.0538	0.0172
4	0.0543	0.2022	0.1847	0.0995	0.0405
5	0.0130	0.1294	0.1921	0.1433	0.0745
6	0.0022	0.0647	0.1601	0.1671	0.1118
7	0.0002	0.0259	0.1098	0.1624	0.1405
8	0.0000	0.0084	0.0631	0.1340	0.1510
9	0.0000	0.0022	0.0309	0.0953	0.1410
10	0.0000	0.0005	0.0130	0.0591	0.1156
11		0.0001	0.0047	0.0322	0.0841
12		0.0000	0.0015	0.0156	0.0546
13		0.0000	0.0004	0.0067	0.0319
14		0.0000	0.0001	0.0026	0.0169
15		0.0000	0.0000	0.0009	0.0081
16		0.0000	0.0000	0.0003	0.0035
17		0.0000	0.0000	0.0001	0.0014
18		0.0000	0.0000	0.0000	0.0005
19		0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
20		0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

※ X = 21, 22, ..., 50일 때는 확률이 작아서 표시하지 않음



이처럼 확률분포의 그래프에서도 n 의 값이 증가할수록 평균과 분산이 증가하는 경향을 분포 중심의 이동과 그래프의 폭 변화로 확인할 수 있다.

또한 n 의 값이 증가할수록 확률분포의 그래프 모양은 평균을 기준으로 좌우대칭에 가까워지며, 최댓값이 감소한다는 점도 알 수 있다.

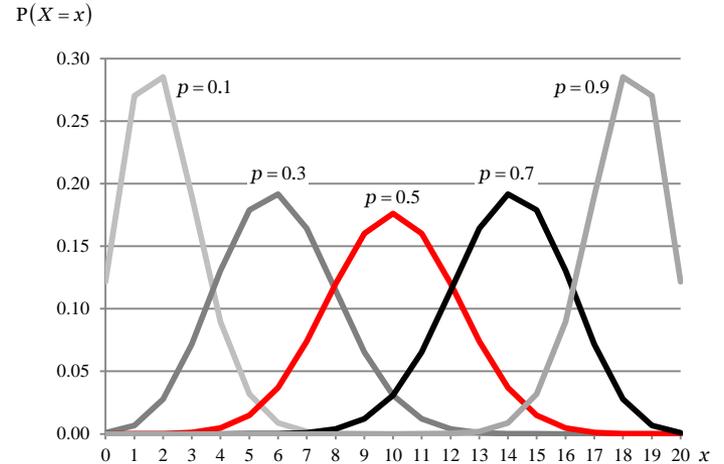
• 이항분포에서 확률의 변화에 따른 확률분포의 변화

이번에는 확률변수 X 가 이항분포 $B(20, p)$ 를 따를 때, n 의 값이 일정한 상태에서 p 의 값이 증가할 때의 확률분포를 조사해보자. 확률질량함수

$$P(X=x) = {}_{20}C_x p^x (1-p)^{20-x} \quad (\text{단, } x=0, 1, 2, \dots, 20)$$

으로 $p=0.1, 0.3, \dots, 0.9$ 일 때의 확률 $P(X=0) \sim P(X=20)$ 을 계산해서 표로 정리하고, 확률분포를 꺾은선 그래프로 나타내면 다음과 같다.

X	P(X=x)				
	p=0.1	p=0.3	p=0.5	p=0.7	p=0.9
0	0.1216	0.0008	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.2702	0.0068	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.2852	0.0278	0.0002	0.0000	0.0000
3	0.1901	0.0716	0.0011	0.0000	0.0000
4	0.0898	0.1304	0.0046	0.0000	0.0000
5	0.0319	0.1789	0.0148	0.0000	0.0000
6	0.0089	0.1916	0.0370	0.0002	0.0000
7	0.0020	0.1643	0.0739	0.0010	0.0000
8	0.0004	0.1144	0.1201	0.0039	0.0000
9	0.0001	0.0654	0.1602	0.0120	0.0000
10	0.0000	0.0308	0.1762	0.0308	0.0000
11	0.0000	0.0120	0.1602	0.0654	0.0001
12	0.0000	0.0039	0.1201	0.1144	0.0004
13	0.0000	0.0010	0.0739	0.1643	0.0020
14	0.0000	0.0002	0.0370	0.1916	0.0089
15	0.0000	0.0000	0.0148	0.1789	0.0319
16	0.0000	0.0000	0.0046	0.1304	0.0898
17	0.0000	0.0000	0.0011	0.0716	0.1901
18	0.0000	0.0000	0.0002	0.0278	0.2852
19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0068	0.2702
20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0008	0.1216



이처럼 확률분포의 그래프는 p 의 값이 증가할수록 분포의 중심이 오른쪽으로 이동함을 알 수 있다.

그리고 p 의 값이 0.5에 가까울수록 그래프 모양이 평균을 기준으로 좌우대칭에 가까워지면서 최댓값이 감소하고, 그래프 폭이 증가한다는 점도 확인할 수 있다.

↓
 앞 페이지에서 설명했듯이 n 의 값이 일정하면 이항분포 $B(n, p)$ 의 분산은 $p=0.5$ 일 때 최대이므로 p 의 값이 0.5에 가까울수록 그래프의 폭이 넓어진다.



공부하다
박수칠 수학
기본서 박상철 지음

미적분 I

새 교육과정



Orbi.kr

1등급이 되는 책

Designed By Orbi In Seoul

함수의 극대·극소와 그래프

§1. 함수의 극대·극소와 도함수

함수의 증가·감소 154
도함수와 함수의 증가·감소 154
함수의 최대·최소와 극대·극소 159
극대·극소와 도함수 163
함수의 증감표 167
함수의 증가·감소와 극대·극소 유형 169

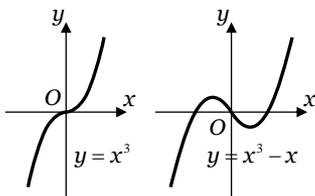
§2. 다항함수의 그래프

다항함수의 특성 173
다항함수의 그래프 모양 174
삼차함수의 도함수와 그래프 181
심화 삼차함수 그래프의 변곡점 185
사차함수의 도함수와 그래프 190

중등수학과 수학 I에서는 일차함수와 이차함수의 그래프를, 수학II에서는 간단한 분수함수와 무리함수의 그래프를 공부했다. 여기서 함수의 그래프 개형을 그리는 방법은 대개 기본형의 그래프를 평행이동시키는 것이었다.

$$y = ax, y = ax^2, y = \frac{a}{x}, y = \pm\sqrt{ax}$$

그런데 삼차 이상의 고차함수에서는 같은 방법이 통하지 않는다. 예를 들어 삼차함수 $y = x^3$ 과 $y = x^3 - x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 합동이 아니기 때문에 $y = x^3$ 의 그래프를 평행이동해서 $y = x^3 - x$ 의 그래프를 그릴 수 없다.



따라서 고차함수의 그래프 개형을 그리기 위해서는 새로운 방법이 필요한데 바로 도함수를 이용하는 방법이다. 이를 공부하기 위해 먼저 함수 $f(x)$ 의 증가·감소와 도함수 $f'(x)$ 사이에 어떤 관계가 있는지부터 알아보자.

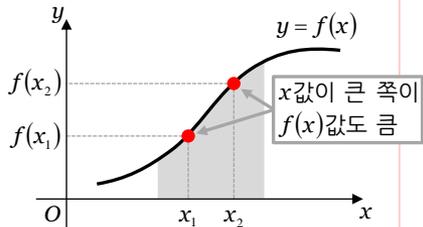
함수의 증가·감소

• 증가·감소의 정의

함수 $f(x)$ 와 구간 I 에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여

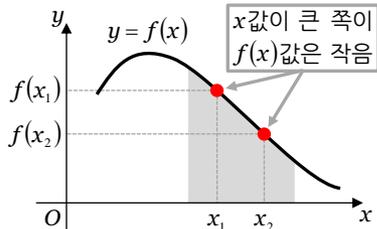
① 「 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다」가 항상 성립할 때, 함수 $f(x)$ 는 구간 I 에서 증가한다고 한다.

또한 증가하는 구간에서 함수의 그래프는 오른쪽 위로 향한다.



② 「 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 이다」가 항상 성립할 때, 함수 $f(x)$ 는 구간 I 에서 감소한다고 한다.

또한 감소하는 구간에서 함수의 그래프는 오른쪽 아래로 향한다.



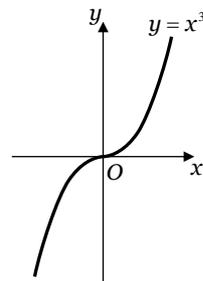
[예] 함수 $f(x) = x^3$ 은 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가한다. 이를 증명하려면 임의의 실수 x_1, x_2 에 대해 「 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 」가 성립함을 보여야 한다.

임의의 실수 x_1, x_2 에 대하여 $x_1 < x_2$ 이면

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^3 - x_2^3 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_1 - x_2) \left\{ \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 \right\} < 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2)$$

가 된다. 따라서 「 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 」가 성립하므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가한다.



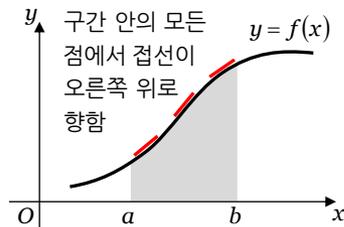
미분가능한 함수 $f(x)$ 가 특정 구간에서 증가하는지, 감소하는지를 판단할 때는 그 구간에서의 도함수 부호를 이용하는 것이 효과적이다.

도함수와 함수의 증가·감소

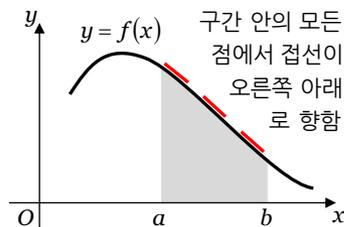
• 도함수의 부호와 함수의 증가, 감소 - I

함수 $f(x)$ 가 구간 (a, b) 에서 미분가능할 때

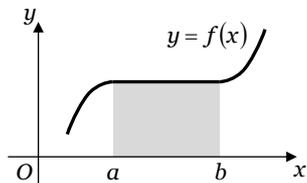
① 구간 (a, b) 에서 $f'(x) > 0$ 이면 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.
∴ 구간 (a, b) 에 속하는 모든 점에서 미분계수가 양수이므로 모든 접선이 오른쪽 위로 향하고, 곡선도 오른쪽 위로 향한다.



② 구간 (a, b) 에서 $f'(x) < 0$ 이면 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.
∴ 구간 (a, b) 에 속하는 모든 점에서 미분계수가 음수이므로 모든 접선이 오른쪽 아래로 향하고, 곡선도 오른쪽 아래로 향한다.



③ 구간 (a, b) 에서 $f'(x)=0$ 이면
함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 상수함수다.
∴ p.150 예제9-(1)에서 평균값 정리를
증명되었다.



★ 명제 ①, ②의 정확한 증명도 평균값 정리를 이용한다.

[①의 증명]

구간 (a, b) 에 속하는 임의의 두 수를 x_1, x_2 (단, $x_1 < x_2$)라 하면, 함수 $f(x)$ 는 구간 $[x_1, x_2]$ 에서 연속이고, 구간 (x_1, x_2) 에서 미분가능하다. 따라서 평균값 정리에 의해 등식

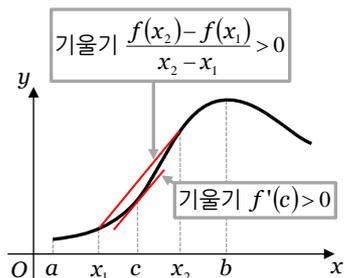
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$$

를 만족하는 c 가 구간 (x_1, x_2) 에 존재하고, $x_2-x_1 > 0$, $f'(c) > 0$ 이므로
 $f(x_2)-f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
가 성립한다.

그러므로 구간 (a, b) 에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여

$$\text{「}x_1 < x_2 \text{이면 } f(x_1) < f(x_2)\text{이다.」}$$

가 성립하며, 함수 $f(x)$ 는 구간 (a, b) 에서 증가한다.

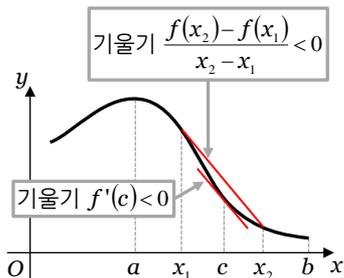


[②의 증명]

구간 (a, b) 에 속하는 임의의 두 수를 x_1, x_2 (단, $x_1 < x_2$)라 하면, 함수 $f(x)$ 는 구간 $[x_1, x_2]$ 에서 연속이고, 구간 (x_1, x_2) 에서 미분가능하다. 따라서 평균값 정리에 의해 등식

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c)$$

를 만족하는 c 가 구간 (x_1, x_2) 에 존재하고, $x_2-x_1 > 0$, $f'(c) < 0$ 이므로
 $f(x_2)-f(x_1) < 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



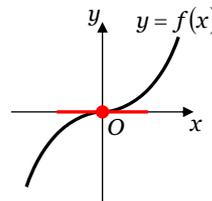
가 성립한다.

그러므로 구간 (a, b) 에 속하는 임의의 두 수 x_1, x_2 에 대하여

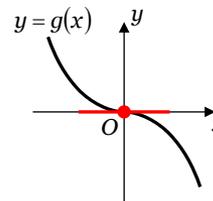
$$\text{「}x_1 < x_2 \text{이면 } f(x_1) > f(x_2)\text{이다.」}$$

가 성립하며, 함수 $f(x)$ 는 구간 (a, b) 에서 감소한다.

★ 다음과 같이 함수 $f(x)$ 가 증가 또는 감소하는 구간에서 $f'(x)=0$ 인 점이 나타날 수 있다.



함수 $f(x)=x^3$ 에 대하여
▷ 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가한다.
▷ $x \neq 0$ 일 때 $f'(x)=3x^2 > 0$,
 $x=0$ 일 때 $f'(x)=0$ 이다.



함수 $g(x)=-x^3$ 에 대하여
▷ 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소한다.
▷ $x \neq 0$ 일 때 $f'(x)=-3x^2 < 0$,
 $x=0$ 일 때 $f'(x)=0$ 이다.

따라서 명제 ①, ②의 가정과 결론을 바꾸면 다음과 같이 도함수의 부호에 등호가 붙어야 한다.

• 함수의 증가, 감소와 도함수의 부호

함수 $f(x)$ 가 구간 (a, b) 에서 미분가능할 때

- ① -1. 함수 $f(x)$ 가 구간 (a, b) 에서 증가하면 이 구간에서 $f'(x) \geq 0$ 이다.
- ② -1. 함수 $f(x)$ 가 구간 (a, b) 에서 감소하면 이 구간에서 $f'(x) \leq 0$ 이다.

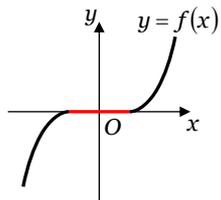
★ 마찬가지로 명제 ①, ②의 가정에 등호를 넣으면 그 명제는 참이 될까?
거짓이 될까?

함수 $f(x)$ 가 구간 (a, b) 에서 미분가능할 때
▷ 구간 (a, b) 에서 $f'(x) \geq 0$ 가 항상 성립하면 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.
▷ 구간 (a, b) 에서 $f'(x) \leq 0$ 가 항상 성립하면 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.



정말 헛갈리겠지만, 앞 페이지의 명제는 둘 다 거짓이다. 왜냐하면 아래의 [예]와 같이 $f'(x)=0$ 을 만족하는 점이 연속적으로 나타날 수 있기 때문이다. (즉, 함수 $f(x)$ 가 상수함수가 되는 구간이 생기기 때문)

$$[예] \quad f(x) = \begin{cases} (x+1)^3 & (x < -1) \\ 0 & (-1 \leq x \leq 1) \\ (x-1)^3 & (x > 1) \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} 3(x+1)^2 & (x < -1) \\ 0 & (-1 \leq x \leq 1) \\ 3(x-1)^2 & (x > 1) \end{cases}$$



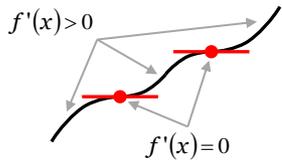
함수 $f(x)$ 는 구간 $[-1, 1]$ 에서 상수함수이기 때문에 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 항상 $f'(x) \geq 0$ 이 성립하더라도 증가함수가 아니다.

그런데 함수 $f(x)$ 가 특정 조건을 만족하면 $f'(x) \geq 0$ 이 항상 성립하더라도 증가함수일 수 있고, $f'(x) \leq 0$ 이 항상 성립하더라도 감소함수일 수 있다. 그 조건은 바로 $f'(x)=0$ 인 점이 연속적이지 않을 것, 다시 말하면 $f(x)$ 의 값이 일정한 구간이 존재하지 않을 것이다.

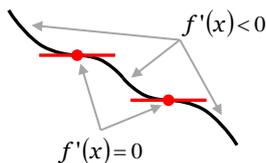
• 도함수의 부호와 함수의 증가, 감소 - II

함수 $f(x)$ 가 구간 (a, b) 에서 미분가능할 때

① -2. 구간 (a, b) 에서 $f'(x) \geq 0$ 이고, $f'(x)=0$ 인 점이 연속적이지 않으면 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.



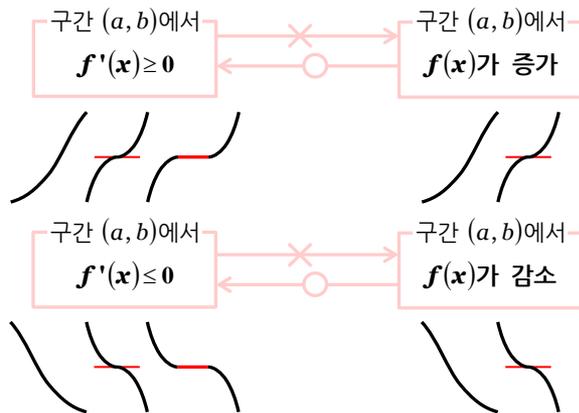
② -2. 구간 (a, b) 에서 $f'(x) \leq 0$ 이고, $f'(x)=0$ 인 점이 연속적이지 않으면 함수 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.



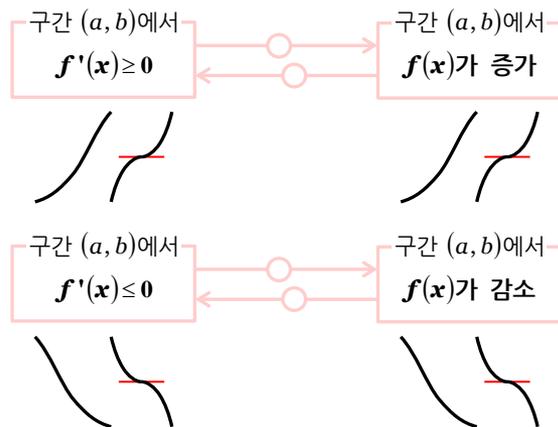
★ $f'(x)=0$ 인 점이 연속적이지 않은 함수 $f(x)$ 에는 여러 가지가 있는데, 가장 대표적인 것이 바로 다항함수다. (단, 상수함수 제외)

★ 지금까지 살펴봤듯이 도함수의 부호-함수의 증가·감소 사이의 관계는 등호 유무 때문에 헛갈리기 쉽다. 따라서 $f'(x)=0$ 인 점이 연속적으로 나타날 수 있는 함수와 그렇지 않은 함수를 구분하고, 도함수의 부호에 따라 나타날 수 있는 그래프 개형을 기억해두도록 하자.

▷ 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 경우



▷ 상수함수 아닌 다항함수 $f(x)$ 의 경우



예제1 다음은 구간 (a, b) 에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대한 명제들이다.
옳은 것을 모두 고르시오.

- ㄱ. 구간 (a, b) 에서 $f'(x) \geq 0$ 이면, 함수 $f(x)$ 는 그 구간에서 증가한다.
- ㄴ. 구간 (a, b) 에서 $f'(x) < 0$ 이면, 함수 $f(x)$ 는 그 구간에서 감소한다.
- ㄷ. 구간 (a, b) 에서 $f'(x) \geq 0$ 이고 방정식 $f'(x)=0$ 의 근이 유한 개이면, 함수 $f(x)$ 는 그 구간에서 증가한다.
- ㄹ. 구간 (a, b) 에서 $f'(x) \leq 0$ 이고 방정식 $f'(x)=0$ 의 근이 무한 개이면, 함수 $f(x)$ 는 그 구간에서 감소한다.
- ㅁ. $f(x)$ 가 삼차함수이고 구간 (a, b) 에서 $f'(x) \leq 0$ 를 만족하면, 함수 $f(x)$ 는 그 구간에서 감소한다.
- ㅂ. 함수 $f(x)$ 가 구간 (a, b) 에서 증가하면 그 구간에서 $f'(x) > 0$ 이 성립한다.

풀이 ㄱ. 구간 (a, b) 에서 $f'(x) \geq 0$ 이면 $f'(x)=0$ 인 점이 연속적으로 나타날 수 있다. 그러면 함수 $f(x)$ 의 그래프에 함숫값이 일정한 구간이 생기기 때문에 함수 $f(x)$ 는 증가한다고 할 수 없다. (거짓)

ㄴ. (참)

ㄷ. 구간 (a, b) 에서 $f'(x)=0$ 인 점이 유한 개라는 것은 $f'(x)=0$ 인 점이 불연속적이라는 의미다. 따라서 함수 $f(x)$ 의 그래프에 함숫값이 일정한 구간이 나타나지 않으며, 함수 $f(x)$ 는 증가한다. (참)

ㄹ. 구간 (a, b) 에서 $f'(x)=0$ 인 점이 무한 개이면 $f'(x)=0$ 인 점이 불연속적으로 나타날 수도 있지만, 연속적으로 나타날 수도 있다. 따라서 함수 $f(x)$ 가 감소한다고 할 수 없다. (거짓)

ㅁ. 상수함수를 제외한 다항함수에서는 $f'(x)=0$ 인 점이 불연속적으로 나타난다. 그러므로 구간 (a, b) 에서 $f'(x) \leq 0$ 이면 삼차함수 $f(x)$ 는 감소한다. (참)

ㅂ. 구간 (a, b) 에서 함수 $f(x)$ 가 증가하면 $f'(x) > 0$ 이 항상 성립하는 경우도 있지만, $f'(x)=0$ 인 점이 불연속적으로 끼는 경우도 있다. 이를 모두 포함하려면 $f'(x) \geq 0$ 이 성립해야 한다. (거짓)

예제2 다음은 구간 $(0, 1)$ 에서 두 함수 $f(x)=x^3-2x^2+4x-4$ 와 $g(x)=x^2-2x-3$ 의 그래프가 오직 한 점에서 만남을 증명한 것이다.

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면 $h(x)=x^3-3x^2+6x-1$ 은 모든 실수 x 에 대하여 연속이다.

$h(0) \cdot h(1) \square 0$ 이므로, 사이값의 정리에 의해 방정식 $h(x)=0$ 은 0과 1 사이에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

모든 실수 x 에 대하여 $h'(x) \square 0$ 이므로 $h(x)$ 는 \square 이다.

따라서 $h(x)=0$ 은 0과 1 사이에서 오직 하나의 실근을 갖게 된다. 즉, 구간 $(0, 1)$ 에서 $f(x), g(x)$ 의 그래프는 오직 한 점에서 만난다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은?

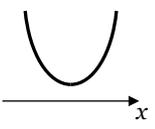
- | | | | | | | | |
|---|-----|-----|------|---|-----|-----|------|
| | (가) | (나) | (다) | | (가) | (나) | (다) |
| ① | < | > | 증가함수 | ② | < | > | 감소함수 |
| ③ | < | < | 감소함수 | ④ | > | < | 감소함수 |
| ⑤ | < | > | 증가함수 | | | | |

풀이 $h(0) \cdot h(1) = (-1) \times 3 = -3 < 0$ 이므로 \square (가)에는 '<'가 들어간다.

또한 $h'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x-1)^2 + 3 > 0$ 이므로 $h(x)$ 는 증가함수가 된다.

따라서 \square (나)에는 '>', \square (다)에는 '증가함수'가 들어가야 한다.

☆ 완전제곱꼴 대신 이차함수 $h'(x) = 3x^2 - 6x + 6$ 이

$(x^2 \text{ 계수}) > 0$	→	그래프가 아래로 볼록	} 
$D/4 < 0$	→	그래프가 x축과 만나지 않음	

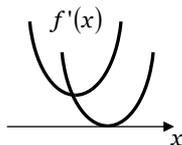
을 만족한다는 사실로부터 $h'(x) = 3x^2 - 6x + 6 > 0$ 임을 알 수도 있다. (p.226 참고)

예제3 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2ax$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하도록 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

풀이 삼차함수 $f(x)$ 의 그래프에서는 $f'(x) = 0$ 인 점이 불연속적으로 나타난다. 따라서 삼차함수 $f(x)$ 가 증가함수이기 위한 필요충분조건은 모든 실수 x 에 대해

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2a \geq 0$$

가 성립하는 것이며, 이를 위해서는 $f'(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림처럼 x 축과 만나지 않거나 x 축에 접해야 한다. 그러므로



$$D/4 = a^2 - 6a = a(a - 6) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq a \leq 6$$

이때, $M = 6, m = 0, M - m = 6$ 이다.

예제4 함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + 2$ 가 다음을 만족한다.

임의의 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 이다.

이때, 실수 a 값의 범위를 구하여라.

풀이 문제에 주어진 조건부터 파악하면 다음과 같다.

- ① 임의의 실수 x_1, x_2 에 대한 명제 「 $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 이다」의 대우는 「 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다」이며, 함수 $f(x)$ 가 일대일함수임을 의미한다.
- ② 다항함수 $f(x)$ 는 모든 실수에서 연속이므로 이 함수가 일대일함수하려면 증가함수 또는 감소함수가 되어야 한다.
- ③ 삼차함수 $f(x)$ 의 삼차항 계수가 양수이므로 그래프는 좌표평면 왼쪽 아래에서 오른쪽 위로 향한다.

① ~ ③으로부터 함수 $f(x)$ 는 증가함수이므로 모든 실수 x 에 대해

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + a \geq 0$$

가 성립해야 한다. 그러므로

$$D/4 = 9 - 3a \leq 0 \Rightarrow a \geq 3$$

★ 문제의 올바른 이해를 위해 수학II에서 배웠던 관련 개념을 정리하고 넘어가도록 하자.

▷ 일대일함수

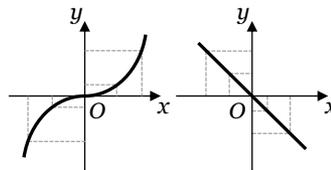
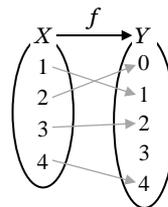
- 정의역의 각 원소들에 대응되는 함수값이 중복되지 않는 함수를 말한다.

- 함수 $f: X \rightarrow Y$ 와 정의역 X 의 임의의 원소 x_1, x_2 에 대하여

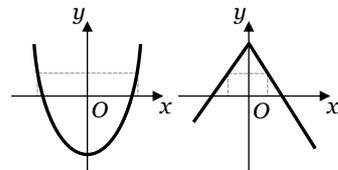
$$x_1 \neq x_2 \text{ 이면 } f(x_1) \neq f(x_2)$$

가 항상 성립하면 함수 f 는 일대일함수다.

- 구간 I 에서 연속인 함수가 일대일함수하려면 증가함수 또는 감소함수여야 한다.



증가함수(좌)와 감소함수(우)는 정의역의 각 원소들에 대응되는 함수값이 중복되지 않으므로 일대일함수



정의역의 서로 다른 원소가 같은 함수값을 가질 수 있으므로 일대일함수 아님

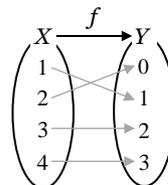
▷ 일대일대응

- 일대일함수 가운데 공역과 치역이 일치하는 함수를 말한다.

- 함수 $f: X \rightarrow Y$ 와 정의역 X 의 임의의 원소 x_1, x_2 에 대하여

$$\textcircled{1} x_1 \neq x_2 \text{ 이면 } f(x_1) \neq f(x_2) \quad \textcircled{2} f(X) = Y$$

가 동시에 성립하면 함수 f 는 일대일대응이다.



$f(X)$ 는 함수 $f: X \rightarrow Y$ 의 치역을 의미한다.

앞에서 함수의 증가·감소가 어떻게 정의되는지, 그리고 도함수의 부호와 어떤 관계에 있는지를 공부했다. 그런데 함수의 그래프 개형을 그리려면 함수가 특정 구간에서 증가하는지, 감소하는지의 여부가 아니라 증가하는 구간이 어디서부터 어디까지인지, 감소하는 구간이 어디서부터 어디까지인지를 파악해야 한다.

여기서는 함수의 증가·감소의 경계인 극대·극소가 무엇인지, 그리고 도함수를 이용해서 극대·극소의 위치를 어떻게 찾아내는지 공부할 것이다.

함수의 최대·최소와 극대·극소

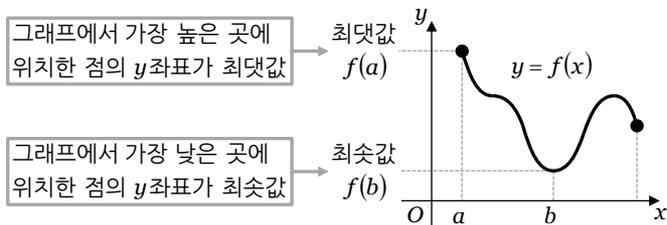
• 함수의 최대·최소

▷ 함수 $f(x)$ 의 정의역에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(a) \geq f(x)$ 가 항상 성립하면(즉, 모든 함수값들 가운데 $f(a)$ 가 가장 크면) 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **최대**라 하며, 이때의 함수값 $f(a)$ 를 함수 $f(x)$ 의 **최댓값**이라 한다.

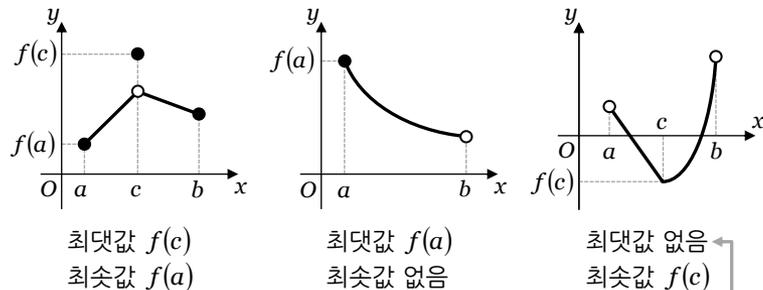
▷ 함수 $f(x)$ 의 정의역에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(a) \leq f(x)$ 가 항상 성립하면(즉, 모든 함수값들 가운데 $f(a)$ 가 가장 작으면) 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **최소**라 하며, 이때의 함수값 $f(a)$ 를 함수 $f(x)$ 의 **최솟값**이라 한다.

★ 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간에서 연속이면 최대·최소 정리(p.98 참고)에 따라 그 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

[예1] 다음과 같은 그래프를 갖는 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 최대이며, 최댓값은 $f(a)$, $x=b$ 에서 최소이며 최솟값은 $f(b)$ 이다.



★ 함수 $f(x)$ 가 열린 구간에서 정의되거나, 닫힌 구간에서 정의되더라도 불연속점을 가지면 그 구간에서 최댓값 또는 최솟값을 가질 수도 있고, 갖지 않을 수도 있다.



$f(x)$ 의 최솟값은 $f(b)$ 보다 작으면서 $f(b)$ 에 한없이 가깝지만 특정할 수 없기 때문에 최솟값이 없다고 한다.

$f(x)$ 의 최댓값은 $f(b)$ 보다 작으면서 $f(b)$ 에 한없이 가깝지만 특정할 수 없기 때문에 최댓값이 없다고 한다.

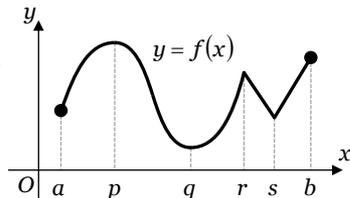
• 함수의 극대·극소-I

▷ 어떤 열린 구간 I 에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(a) \geq f(x)$ 가 항상 성립하면(즉, 열린 구간 I 에서 나타나는 모든 함수값들 가운데 $f(a)$ 가 가장 크면) 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **극대**라 하며, 이때의 함수값 $f(a)$ 를 **극댓값**, 점 $(a, f(a))$ 를 **극대점**이라 한다. (단, $a \in I$)

▷ 어떤 열린 구간 I 에 속하는 모든 x 에 대하여 $f(a) \leq f(x)$ 가 항상 성립하면(즉, 열린 구간 I 에서 나타나는 모든 함수값들 가운데 $f(a)$ 가 가장 작으면) 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **극소**라 하며, 이때의 함수값 $f(a)$ 를 **극솟값**, 점 $(a, f(a))$ 를 **극소점**이라 한다. (단, $a \in I$)

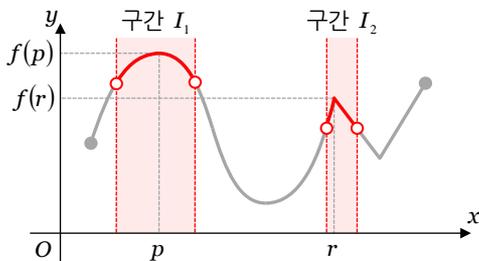
▷ 함수의 극댓값과 극솟값을 통틀어 **극값**, 극대점과 극소점을 통틀어 **극점**이라 한다.

[예2] 함수 $f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 극대·극소를 정의에 따라 찾으려면 다음 페이지와 같이 열린 구간 $I_1 \sim I_7$ 을 잡고, 각각의 구간 안에서 최대·최소를 따지면 된다.



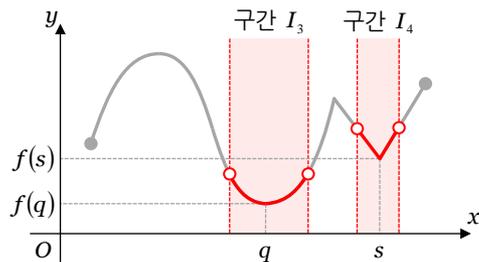
구간 I_1 $x=p$ 에서 최대이
므로 함수 $f(x)$ 는 $x=p$ 에
서 극대, $f(p)$ 가 극댓값

구간 I_2 $x=r$ 에서 최대이
므로 함수 $f(x)$ 는 $x=r$ 에
서 극대, $f(r)$ 이 극댓값



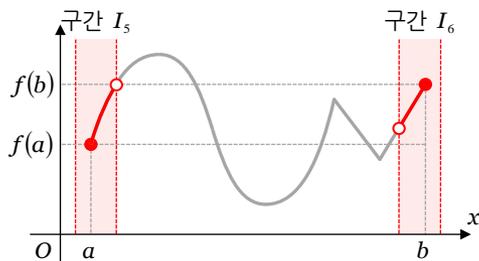
구간 I_3 $x=q$ 에서 최소이
므로 함수 $f(x)$ 는 $x=q$ 에
서 극소, $f(q)$ 가 극솟값

구간 I_4 $x=s$ 에서 최소이
므로 함수 $f(x)$ 는 $x=s$ 에
서 극소, $f(s)$ 가 극솟값

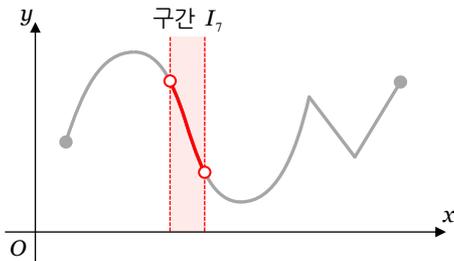


구간 I_5 $x=a$ 에서 최소이
므로 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에
서 극소, $f(a)$ 가 극솟값

구간 I_6 $x=b$ 에서 최대이
므로 함수 $f(x)$ 는 $x=b$ 에
서 극대, $f(b)$ 이 극댓값

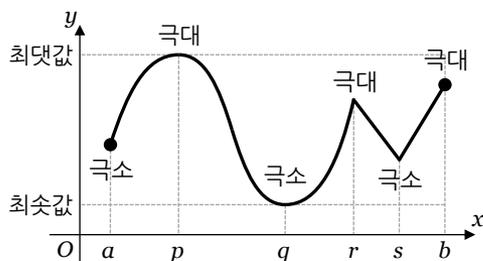


구간 I_7 이 구간에서 최대
·최소가 존재하지 않으므로
극대·극소도 존재하지 않음



따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=p, r, b$ 에서 극대, $x=a, q, s$ 에서 극소다. 또한

극댓값 $f(p), f(r), f(b)$
가운데 최대인 $f(p)$ 는 함
수 $f(x)$ 의 최댓값과 같고
극솟값 $f(a), f(q), f(s)$
가운데 최소인 $f(q)$ 는 함
수 $f(x)$ 의 최솟값과 같음
을 알 수 있다.



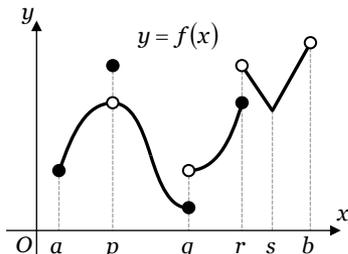
★ 간단히 말하면 함수의 최댓값과 최솟값은 모든 함수값 가운데 가장 큰 것
과 가장 작은 것을 의미하고, 극댓값과 극솟값은 특정 열린 구간에 속하는
함수값 가운데 가장 큰 것과 가장 작은 것을 가리킨다.

최댓값을 global maximum, 최솟값을 global minimum, 극댓값을 local
maximum, 극솟값을 local minimum이라고 하는 것도 같은 맥락이다.

★ 극대·극소는 연속함수 뿐만 아니라 불연속점을 갖는 함수에도 존재한다.

[예3] 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 정의되는
함수 $f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과
같을 때, 이 함수는 $x=p, q, r$ 에서
불연속이다.

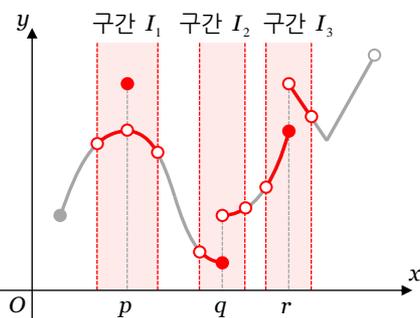
각각의 불연속점을 포함하는 세 개의
열린 구간 $I_1 \sim I_3$ 을 잡으면 극대·극소
를 정의에 따라 찾을 수 있다.



구간 I_1 $x=p$ 에서 최대이므로
함수 $f(x)$ 는 $x=p$ 에서 극대,
 $f(p)$ 가 극댓값

구간 I_2 $x=q$ 에서 최소이므로
함수 $f(x)$ 는 $x=q$ 에서 극소,
 $f(q)$ 가 극솟값

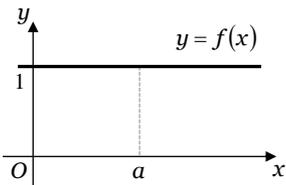
구간 I_3 이 구간에서 최대·최소
가 존재하지 않으므로 극대·극
소도 존재하지 않음



따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=p$ 에서 극대, $x=a, q, s$ 에서 극소다. 또한 극솟값 $f(a), f(q), f(s)$ 가운데 최소인 $f(q)$ 는 함수 $f(x)$ 의 최솟값과 같지만, 최댓값이 존재하지 않기 때문에 극댓값 $f(p)$ 는 최댓값이 아니다.

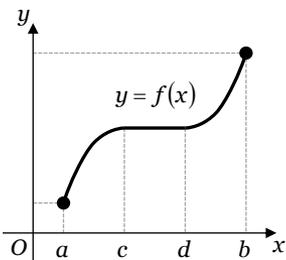
★ 함수값이 일정한 상수함수에서도 최대·최소 및 극대·극소가 존재한다.

예를 들어 함수 $f(x)=1$ 은 최댓값, 최솟값이 모두 1이고, 임의의 실수 a 에 대하여 부등식 $f(a) \geq f(x)$ 와 $f(a) \leq f(x)$ 를 동시에 만족하므로 $x=a$ 에서 극대면서 극소가 된다. 따라서 그래프 위의 임의의 점이 극대점이면서 극소점이다.

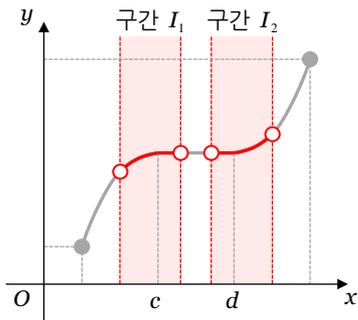


마찬가지로 함수값이 일정한 구간을 갖는 함수에 대해서도 극대·극소를 생각할 수 있다.

[예4] 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 정의되는 함수 $f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 이 함수는 닫힌 구간 $[c, d]$ 에서 함수값이 일정하며, 열린 구간 (c, d) 위의 모든 점이 극대점이면서 극소점이다.



그리고 c 를 포함하는 열린 구간 I_1 , d 를 포함하는 열린 구간 I_2 를 잡으면 $x=c$ 에서 극대, $x=d$ 에서 극소임을 알 수 있다.



구간 I_1 $x=c$ 에서 최대이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=c$ 에서 극대이고, $f(c)$ 가 극댓값

구간 I_2 $x=d$ 에서 최소이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=d$ 에서 극소이고, $f(d)$ 가 극솟값

따라서 함수 $f(x)$ 는 반닫힌 구간 $[c, d)$ 에 속하는 임의의 점에서 극대, 반닫힌 구간 $(c, d]$ 에 속하는 임의의 점에서 극소다.

지금까지 살펴봤듯이 함수의 극대·극소는 연속함수인지 아닌지, 함수값이 일정한 구간이 있는지 없는지에 따라 복잡하게 나타난다. 때문에 교육 과정에서 다루는 대부분의 극대·극소 문제는 p.159 [예2]처럼 연속함수면서 함수값이 일정한 구간이 없는 함수를 대상으로 하고 있다.

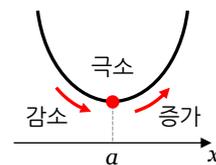
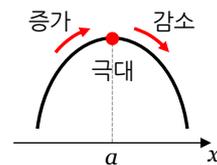
이런 함수에 맞춰서 함수의 극대·극소를 보다 쉽게 정의하면 다음과 같다.

• 함수의 극대·극소-II

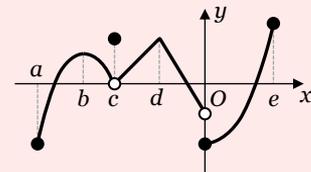
연속함수 $f(x)$ 가 함수값이 일정한 구간을 갖지 않을 때

▷ $x=a$ 를 경계로 증가에서 감소로 바뀌면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극대다.

▷ $x=a$ 를 경계로 감소에서 증가로 바뀌면 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소다.



예제5 오른쪽 그림은 닫힌 구간 $[a, e]$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 의 그래프를 나타낸 것이다. 극대점과 극소점의 개수를 각각 구하리라.



★ p.159에서 설명했던 극대·극소의 일반적인 정의(함수의 극대·극소-I)에 따라 다음과 같이 풀 수 있다.

풀이 ▷ a 를 포함하는 열린 구간에서 $f(a) \leq f(x)$ 이므로 $x=a$ 일 때 극소

▷ b 를 포함하는 열린 구간에서 $f(b) \geq f(x)$ 이므로 $x=b$ 일 때 극대

▷ c 를 포함하는 열린 구간에서 $f(c) \geq f(x)$ 이므로 $x=c$ 일 때 극대

▷ d 를 포함하는 열린 구간에서 $f(d) \geq f(x)$ 이므로 $x=d$ 일 때 극대

▷ 0 을 포함하는 열린 구간에서 $f(0) \leq f(x)$ 이므로 $x=0$ 일 때 극소

▷ e 를 포함하는 열린 구간에서 $f(e) \geq f(x)$ 이므로 $x=e$ 일 때 극대

따라서 극대점은 4개, 극소점은 2개다.



공부하다
박수칠 수학
기본서 박상철 지음

미적분 II

새 교육과정



Orbi.kr
1등급이 되는 책
Designed by Orbi in Seoul

여러 가지 미분법

6

§1. 함수의 몫의 미분법	
함수의 몫의 미분법 130
삼각함수의 미분 131
§2. 합성함수의 미분법	
합성함수의 미분법 I 133
합성함수의 미분법 II 135
로그미분법 138
합성함수의 미분법 II의 적용 140
§3. 역함수의 미분법	
역함수의 미분법 I 141
역함수의 미분법 II 142
§4. 이계도함수	
이계도함수 144
구간별로 정의된 함수의 도함수 145
심화 로피탈의 정리 147

미적분I에서는 다항함수의 도함수를 구하는데 필요한 미분법의 기본 공식을 공부했다. 미적분II에서는 보다 다양한 함수의 도함수를 구할 수 있도록 함수의 몫의 미분법, 합성함수의 미분법, 역함수의 미분법을 배우게 된다.

그럼 함수식이 분수꼴로 표현된 함수를 미분하는데 필요한 함수의 몫의 미분법부터 알아보도록 하자.

함수의 몫의 미분법

• 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능하고 $g(x) \neq 0$ 일 때, 함수 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ 의 도함수는 다음과 같다.

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

여기서 $f(x)=1$ 일 때, 즉 함수 $y = \frac{1}{g(x)}$ 의 도함수는 다음과 같다.

$$y = \frac{1}{g(x)} \Rightarrow y' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

★ 위 공식을 증명하기 위해서는 도함수의 정의로 $y = \frac{1}{g(x)}$ 의 도함수를 유도한 다음, 함수의 곱의 미분법으로 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ 의 도함수를 유도하면 된다.

먼저 $y = \frac{1}{g(x)}$ 의 도함수는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta x} \times \frac{g(x) - g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)} \right\} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ -\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \times \frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \right\} \\ &= -g'(x) \times \frac{1}{\{g(x)\}^2} = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned}$$

다음으로 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ 를 $y = f(x) \times \frac{1}{g(x)}$ 로 보고 함수의 곱의 미분법을 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y' &= f'(x) \times \frac{1}{g(x)} + f(x) \times \left\{ \frac{1}{g(x)} \right\}' = \frac{f'(x)}{g(x)} + f(x) \times \left[-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \right] \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2} \end{aligned}$$

[예1] 함수 $y = \frac{x^2-1}{x+2}$ 의 도함수

$$y' = \frac{(x^2-1)'(x+2) - (x^2-1)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{2x(x+2) - (x^2-1) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$$

[예2] 함수 $y = \frac{1}{2x^3+x}$ 의 도함수

$$y' = -\frac{(2x^3+x)'}{(2x^3+x)^2} = -\frac{6x^2+1}{(2x^3+x)^2}$$

예제1 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y = \frac{x^2-2}{x^2+x}$ (2) $y = \frac{4}{e^x+1}$ (3) $y = \frac{\cos x+1}{\sin x}$

풀이 (1) $y' = \frac{(x^2-2)'(x^2+x) - (x^2-2)(x^2+x)'}{(x^2+x)^2}$
 $= \frac{2x(x^2+x) - (x^2-2)(2x+1)}{(x^2+x)^2} = \frac{x^2+4x+2}{(x^2+x)^2}$

(2) $y' = 4 \times \left(\frac{1}{e^x+1} \right)' = 4 \times \left[-\frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} \right] = 4 \times \left[-\frac{e^x}{(e^x+1)^2} \right] = -\frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$

(3) $y' = \frac{(\cos x+1)' \sin x - (\cos x+1)(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{(-\sin x) \sin x - (\cos x+1) \cos x}{\sin^2 x}$
 $= \frac{-1 - \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1 + \cos x}{1 - \cos^2 x} = -\frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \frac{1}{\cos x - 1}$

★ n 이 양의 정수일 때, 함수 $y = x^n$ 의 도함수는 $y' = nx^{n-1}$ 이다. 그리고 함수의 몫의 미분법으로 n 이 음의 정수일 때 함수 $y = x^n$ 의 도함수가 $y' = nx^{n-1}$ 임을 보일 수 있다. (단, $x \neq 0$)

n 이 음의 정수일 때, $n = -m$ (m 은 양의 정수)으로 두면 함수 $y = x^n$ 의 도함수는 다음과 같다.

$$y' = (x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -mx^{-m-1} = nx^{n-1}$$

$\therefore y' = nx^{n-1}$

또한 $n = 0$ 일 때도

함수 $y = 1 = x^0$ 의 도함수는 $y' = 0 = 0 \cdot x^{-1}$ 이다.

이므로 n 이 정수일 때 함수 $y = x^n$ 의 도함수는 $y' = nx^{n-1}$ 이 된다.

$y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$

(단, n 은 정수, $x \neq 0$)

[예1] 함수 $y = \frac{1}{x^3}$ 의 도함수

$$y' = (x^{-3})' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$$

[예2] 함수 $y = \frac{3x^4 - 2x^2 + 4}{x^3}$ 의 도함수

$$y = \frac{3x^4}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{4}{x^3} = 3x - 2x^{-1} + 4x^{-3}$$

$$y' = 3 - 2(-x^{-2}) + 4(-3x^{-4}) = 3 + \frac{2}{x^2} - \frac{12}{x^4}$$

분수함수의 분모가 단항식이면 분자도 단항식이 되도록 분리한 다음 미분한다.

★ p.128에서 공부한 사인함수, 코사인함수의 미분에 함수의 몫의 미분법을 적용하면 나머지 삼각함수들을 미분할 수 있다.

$$(3) (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'(\cos x) - (\sin x)(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$(4) (\cot x)' = \left(\frac{1}{\tan x}\right)' = -\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x} = -\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$(5) (\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

$$(6) (\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = -\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} = -\csc x \cot x$$

지금까지 설명한 삼각함수 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x$ 의 미분을 요약하면 다음과 같다.

삼각함수의 미분

(1) **$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$**

(2) **$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$**

(3) **$y = \tan x \Rightarrow y' = \sec^2 x$**

(4) **$y = \cot x \Rightarrow y' = -\csc^2 x$**

(5) **$y = \sec x \Rightarrow y' = \sec x \tan x$**

(6) **$y = \csc x \Rightarrow y' = -\csc x \cot x$**

★ 다음을 기억해두면 위 공식들을 효과적으로 암기할 수 있다.

▷ c 로 시작되는 삼각함수 $\cos x, \cot x, \csc x$ 의 도함수에는 (-)가 붙는다.

▷ 공식 (3)의 탄젠트와 시컨트에 '코'를 붙이면 공식 (4)가 나타난다. 마찬가지로 공식 (5)의 시컨트와 탄젠트에 '코'를 붙이면 공식 (6)이 된다.

예제2 다음 함수의 도함수를 구하여라.

$$(1) y = 2 \tan x - \csc x \quad (2) y = \frac{\cos x + 1}{\sin x} \quad (3) y = \sec x \tan x$$

풀이 (1) $y' = 2 \sec^2 x - (-\csc x \cot x) = 2 \sec^2 x + \csc x \cot x$

$$(2) y = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\sin x} = \cot x + \csc x$$

$$y' = -\csc^2 x + (-\csc x \cot x) = -\csc^2 x - \csc x \cot x$$

$$\begin{aligned} (3) y' &= (\sec x)'(\tan x) + (\sec x)(\tan x)' \\ &= (\sec x \tan x)(\tan x) + (\sec x)(\sec^2 x) = \sec x \tan^2 x + \sec^3 x \\ &= (\sec x)(\sec^2 x - 1) + \sec^3 x = 2 \sec^3 x - \sec x \end{aligned}$$

예제3 함수 $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$ 에 대하여 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+h) - f(\pi-2h)}{3h}$ 의 값을 구하여라.

풀이 주어진 극한을 미분계수의 정의에 맞춰 변형하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+h) - f(\pi-2h)}{3h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(\pi+h) - f(\pi)\} - \{f(\pi-2h) - f(\pi)\}}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{3h} - \frac{f(\pi-2h) - f(\pi)}{3h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(\pi+h) - f(\pi)}{h} \times \frac{1}{3} + \frac{f(\pi-2h) - f(\pi)}{-2h} \times \frac{2}{3} \right\} \\ &= f'(\pi) \times \frac{1}{3} + f'(\pi) \times \frac{2}{3} = f'(\pi) \end{aligned}$$

도함수 $f'(x)$ 와 미분계수 $f'(\pi)$ 를 차례로 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(\cos x)'(\sin x + 1) - (\cos x)(\sin x + 1)'}{(\sin x + 1)^2} \\ &= \frac{(-\sin x)(\sin x + 1) - (\cos x)(\cos x)}{(\sin x + 1)^2} = -\frac{1 + \sin x}{(\sin x + 1)^2} = -\frac{1}{\sin x + 1} \\ f'(\pi) &= -\frac{1}{\sin \pi + 1} = -1 \end{aligned}$$

★ 미적분 I p.108의 예제12에서 설명했던 것처럼 $\Delta y = f(\pi+h) - f(\pi-2h)$ 로 보면 $\Delta x = (\pi+h) - (\pi-2h) = 3h$ 이므로

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\pi+h) - f(\pi-2h)}{3h}$$

로 쓸 수 있으며, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 두 점 $(\pi+h, f(\pi+h))$ 와 $(\pi-2h, f(\pi-2h))$ 를 이은 직선의 기울기와 같다. 그리고 $h \rightarrow 0$ 일 때

$$(\pi+h, f(\pi+h)) \rightarrow (\pi, f(\pi)), \quad (\pi-2h, f(\pi-2h)) \rightarrow (\pi, f(\pi))$$

이고, 함수 $y = f(x)$ 가 $x = \pi$ 에서 미분가능하므로 $\frac{f(\pi+h) - f(\pi-2h)}{3h}$ 는 점 $(\pi, f(\pi))$ 에서의 접선 기울기 $f'(\pi)$ 로 수렴한다. 따라서

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+h) - f(\pi-2h)}{3h} = f'(\pi)$$

로 계산할 수도 있다.

함수 $y = (2x^3 + x - 3)^2$ 은 두 함수 $y = u^2$, $u = 2x^3 + x - 3$ 을 합성한 것과 같고, 각 함수의 도함수가

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \{(2x^3 + x - 3)(2x^3 + x - 3)\}' & \frac{dy}{du} &= 2u \\ &= (6x^2 + 1)(2x^3 + x - 3) + (2x^3 + x - 3)(6x^2 + 1) & &= 2(2x^3 + x - 3) \\ &= 2(2x^3 + x - 3)(6x^2 + 1) & \frac{du}{dx} &= 6x^2 + 1 \end{aligned}$$

이므로 다음 관계가 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

또한 첫 번째 줄의 세 함수를 각각 $y = f(g(x))$, $y = f(u)$, $u = g(x)$ 로 두면

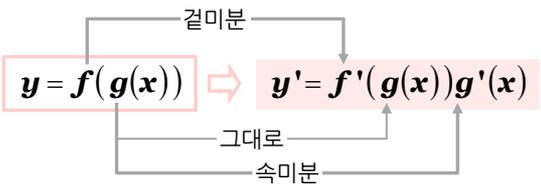
$$\frac{dy}{dx} = \{f(g(x))\}' \quad \frac{dy}{du} = f'(u) = f'(g(x)) \quad \frac{du}{dx} = g'(x)$$

이므로 ①에 의해 다음 관계도 성립함을 알 수 있다.

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$$

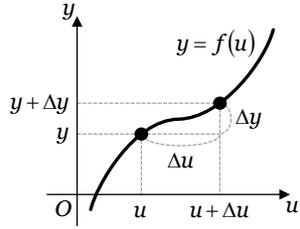
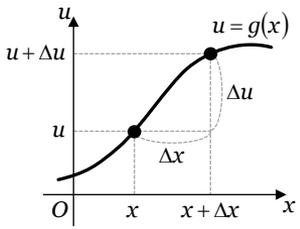
합성함수의 미분법 I

- 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 미분가능하고, 합성함수 $f(g(x))$ 가 정의될 때 다음이 성립한다.



∴ 합성함수의 미분법을 증명하기 위해서는 합성함수 $y = f(g(x))$ 를 두 함수 $y = f(u)$ 와 $u = g(x)$ 로 분리해야 한다.

그리고 함수 $u = g(x)$ 에서 x 의 값이 x 부터 $x + \Delta x$ 까지 변할 때 u 의 값이 u 부터 $u + \Delta u$ 까지 변하고, 함수 $y = f(u)$ 에서 u 의 값이 u 부터 $u + \Delta u$ 까지 변할 때 y 의 값이 y 부터 $y + \Delta y$ 까지 변한다고 하자.



이때, 두 함수 $u = g(x)$, $y = f(u)$ 의 도함수가 각각

$$g'(x) = \frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad f'(u) = \frac{dy}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

이므로 함수 $y = f(g(x))$ 의 도함수는 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \{f(g(x))\}' &= \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \times \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= f'(u)g'(x) = f'(g(x))g'(x) \end{aligned}$$

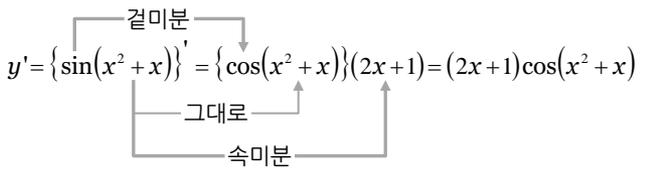
함수 $u = g(x)$ 가 연속함수이므로 $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때 $\Delta u \rightarrow 0$ 이다.

[예1] 함수 $y = \sin(x^2 + x)$ 의 도함수

- (1) $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^2 + x$ 로 두면 주어진 함수는 $y = f(g(x))$ 이며, 도함수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x, \quad g'(x) = 2x + 1 \\ y' &= f'(g(x))g'(x) = \{\cos(x^2 + x)\}(2x + 1) = (2x + 1)\cos(x^2 + x) \end{aligned}$$

- (2) (1)과 같이 치환해서 미분하는 것은 번거롭기 때문에 실제 문제를 풀 때는 다음과 같이 한 번에 계산한다.



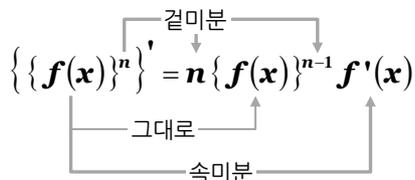
[예2] 우함수의 도함수가 기함수임을 증명하기

미분가능한 함수 $f(x)$ 가 우함수면 $f(-x) = f(x)$ 가 성립하며, 양변을 x 에 대해 미분 하면 오른쪽과 같다.	$f'(-x) \cdot (-x)' = f'(x)$ $f'(-x) \cdot (-1) = f'(x)$ $f'(-x) = -f'(x)$ \therefore 우함수의 도함수는 기함수다.
--	--

예제1 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y = (x^3 - x + 2)^4$ (2) $y = \frac{4}{(x^2 + 2x)^3}$ (3) $y = \sin^2 x \cos^3 x$

★ n 이 정수일 때, 함수 $y = \{f(x)\}^n$ 의 도함수는 $y = n\{f(x)\}^{n-1} f'(x)$ 이다.



$\therefore g(x) = x^n$ 으로 두면 $\{f(x)\}^n = g(f(x))$ 이다. 그리고 $g'(x) = nx^{n-1}$ 이므로
합성함수의 미분법 I에 의해 도함수는 다음과 같다.

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x) = n\{f(x)\}^{n-1} f'(x)$$

풀이 (1) $y' = 4(x^3 - x + 2)^3(x^3 - x + 2)' = 4(x^3 - x + 2)^3(3x^2 - 1)$

(2) 주어진 함수를 $y = 4(x^2 + 2x)^{-3}$ 으로 변형하면 다음과 같이 미분된다.

$$y' = 4 \left\{ -3(x^2 + 2x)^{-4} \right\} (x^2 + 2x)' = -12 \times \frac{1}{(x^2 + 2x)^4} \times (2x + 2) = -\frac{24(x+1)}{x^4(x+2)^4}$$

(3) $(\sin^2 x)' = \{(\sin x)^2\}' = 2 \sin x \cos x$

$$(\cos^3 x)' = \{(\cos x)^3\}' = (3 \cos^2 x)(-\sin x) = -3 \sin x \cos^2 x$$

이므로 주어진 함수는 다음과 같이 미분된다.

$$y' = (\sin^2 x)'(\cos^3 x) + (\sin^2 x)(\cos^3 x)'$$

$$= (2 \sin x \cos x)(\cos^3 x) + (\sin^2 x)(-3 \sin x \cos^2 x)$$

$$= 2 \sin x \cos^3 x - 3 \sin^3 x \cos^2 x$$

예제2 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y = \cos(\tan x)$ (2) $y = \ln(x^2 + 2x + 3)$ (3) $y = e^{\sec x}$

풀이 (1) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \tan x$ 로 두면 주어진 함수는 $y = f(g(x))$ 이며, 도함수는 다음과 같다.

$$f'(x) = -\sin x, \quad g'(x) = \sec^2 x$$

$$y' = f'(g(x))g'(x) = \{-\sin(\tan x)\}(\sec^2 x) = -\sec^2 x \sin(\tan x)$$

(2) $f(x) = \ln x$, $g(x) = x^2 + 2x + 3$ 으로 두면 주어진 함수는 $y = f(g(x))$ 이며, 도함수는 다음과 같다.

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad g'(x) = 2x + 2$$

$$y' = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 3} \times (2x + 2)' = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3}$$

(3) $f(x) = e^x$, $g(x) = \sec x$ 로 두면 주어진 함수는 $y = f(g(x))$ 이며, 도함수는 다음과 같다.

$$f'(x) = e^x, \quad g'(x) = \sec x \tan x$$

$$y' = f'(g(x))g'(x) = e^{\sec x} \sec x \tan x$$

예제3 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가

$$f(x^3) = 2x^3 - x^2 + 32x$$

를 만족시킬 때, $f'(1)$ 의 값을 구하여라.

풀이 주어진 등식의 좌변과 우변을 각각 x 에 대해 미분하면

$$\{f(x^3)\}' = f'(x^3) \times (x^3)' = f'(x^3) \times 3x^2$$

$$(2x^3 - x^2 + 32x)' = 6x^2 - 2x + 32$$

이므로 $f'(x^3) \times 3x^2 = 6x^2 - 2x + 32$ 가 성립하고, 여기에 $x=1$ 을 대입하면 다음과 같이 $f'(1)$ 의 값이 나타난다.

$$f'(1) \times 3 = 36 \Rightarrow f'(1) = 12$$

★ p.133의 합성함수 미분법 증명에는 다음 과정이 포함되어 있다.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \times \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \left(\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \right) \times \left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

여기서 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 가 성립함을 알 수 있으며, 합성함수를 미분할 때 이용할 수 있다.

합성함수의 미분법 II

- 두 함수 $y = f(u)$, $u = g(x)$ 의 도함수 $\frac{dy}{du}$, $\frac{du}{dx}$ 가 모두 존재하면, 합성함수 $y = f(g(x))$ 의 도함수 $\frac{dy}{dx}$ 는 $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 의 곱과 같다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

분수처럼 du 가 약분된다
고 보면 쉽게 이해된다.

합성함수의 미분법 II는 세 개 이상의 함수에 대해서도 성립한다.

- 세 함수 $y = f(v)$, $v = g(u)$, $u = h(x)$ 의 도함수 $\frac{dy}{dv}$, $\frac{dv}{du}$, $\frac{du}{dx}$ 가 모두 존재하면, 합성함수 $y = f(g(h(x)))$ 의 도함수 $\frac{dy}{dx}$ 는 $\frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ 의 곱과 같다.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

분수처럼 dv , du 가 약분된다
고 보면 쉽게 이해된다.

[예1] 함수 $y = \frac{\cos(x^2+x)}{\sin(x^2+x)+1}$ 의 도함수

주어진 함수식을 그대로 미분하는 것은 계산이 복잡하므로 반복되는 식 x^2+x 를 u 로 치환해서 두 함수 $y = \frac{\cos u}{\sin u + 1}$, $u = x^2+x$ 로 분리한 다음, 합성함수의 미분법 II를 적용한다.

$$\frac{dy}{du} = \frac{(-\sin u)(\sin u + 1) - (\cos u)(\cos u)}{(\sin u + 1)^2} = -\frac{1}{\sin u + 1} = -\frac{1}{\sin(x^2+x)+1}$$

$$\frac{du}{dx} = 2x+1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\sin(x^2+x)+1} \times (2x+1) = -\frac{2x+1}{\sin(x^2+x)+1}$$

[예2] 함수 $y = 2\cos(3x^2+x)^4$ 의 도함수

$3x^2+x = u$ 로 두면 $y = 2\cos u^4$ 이 되고, 다시 $u^4 = v$ 로 두면 $y = 2\cos v$ 가 된다. 따라서 주어진 함수는 세 함수 $y = 2\cos v$, $v = u^4$, $u = 3x^2+x$ 로 분리되며, 합성함수의 미분법 II를 적용하면 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dv} = -2\sin v = -2\sin u^4 = -2\sin(3x^2+x)^4$$

$$\frac{dv}{du} = 4u^3 = 4(3x^2+x)^3 \quad \frac{du}{dx} = 6x+1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left\{ -2\sin(3x^2+x)^4 \right\} \times 4(3x^2+x)^3 \times (6x+1) = -8(6x+1)(3x^2+x)^3 \sin(3x^2+x)^4$$

합성함수의 미분법 I을 두 번 반복해서 도함수를 구할 수도 있다. 첫 번째로 $f(x) = 2\cos x$, $g(x) = (3x^2+x)^4$ 로 보고 $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$ 를 적용하면

$$y' = \left\{ 2\cos(3x^2+x)^4 \right\}' = \left\{ -2\sin(3x^2+x)^4 \right\}' \times \left\{ (3x^2+x)^4 \right\}'$$

↓ 곱미분
↓ 그대로
↓ 속미분

가 되고, 두 번째로 속미분 $\left\{ (3x^2+x)^4 \right\}'$ 에서 $f(x) = x^4$, $g(x) = 3x^2+x$ 로 보고 $\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$ 를 적용하면 다음과 같다.

$$y' = \left\{ -2\sin(3x^2+x)^4 \right\}' \times 4(3x^2+x)^3 \times (3x^2+x)'$$

$$= \left\{ -2\sin(3x^2+x)^4 \right\}' \times 4(3x^2+x)^3 \times (6x+1)$$

$$= -8(6x+1)(3x^2+x)^3 \sin(3x^2+x)^4$$

★ p.131에서 설명했듯이 n 이 정수일 때, 함수 $y = x^n$ 의 도함수는 $y' = nx^{n-1}$ 이다. 그리고 합성함수의 미분법으로 n 이 유리수일 때도 함수 $y = x^n$ 의 도함수가 $y' = nx^{n-1}$ 임을 보일 수 있다. (단, $x > 0$)

$n = \frac{q}{p}$ (p 는 자연수, q 는 정수)로 두면 함수 $y = x^n$ 은 $y = x^{\frac{q}{p}}$ 과 같고, 양변을 p 제곱하면 $y^p = x^q$ 이 된다. 여기서 양변을 z 로 두면 두 함수 $z = y^p$, $z = x^q$ 으로 분리되고, 각각의 도함수는 다음과 같다.

$$\frac{dz}{dy} = py^{p-1}, \frac{dz}{dx} = qx^{q-1} \quad \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

그리고 합성함수의 미분법 II에 의해

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

가 성립하고, ①을 여기에 대입하면 함수 $y = x^n$ 의 도함수가 된다.

$$qx^{q-1} = py^{p-1} \times \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{qx^{q-1}}{py^{p-1}} = \frac{q}{p} \times \frac{x^{q-1}}{\left(x^{\frac{q}{p}}\right)^{p-1}} = \frac{q}{p} \times \frac{x^{q-1}}{x^{\frac{q(p-1)}{p}}} = \frac{q}{p} \times x^{\frac{q-1}{p}} = nx^{n-1}$$

$\therefore y' = nx^{n-1}$

☆ p 가 자연수일 때
 $p = 1$ 이면 $x^{\frac{q}{p}} = x^q$
 $p \geq 2$ 이면 $x^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{x^q}$

따라서 다음과 같이 정리할 수 있다.

$y = x^n \Rightarrow y' = nx^{n-1}$

(단, n 은 유리수, $x > 0$)

[예1] 함수 $y = \sqrt{x} + x\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}$ 의 도함수
 각각의 거듭제곱근을 거듭제곱으로 바꾼 다음 미분하면 다음과 같다.

$$y = x^{\frac{1}{2}} + x \cdot x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{2}{3}}$$

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

[예2] 함수 $y = \sqrt{2x^3 + x}$ 의 도함수

거듭제곱근을 거듭제곱으로 바꾼 다음 합성함수의 미분법으로 미분하면 다음과 같다.

$$y = (2x^3 + x)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{1}{2}(2x^3 + x)^{-\frac{1}{2}}(2x^3 + x)' = \frac{1}{2}(2x^3 + x)^{-\frac{1}{2}}(6x^2 + 1) = \frac{6x^2 + 1}{2\sqrt{2x^3 + x}}$$

★ 제곱근의 도함수 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 은 자주 쓰이기 때문에 외워두도록 하자.

예제4 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y = \frac{x^2 + 3x}{\ln(x^2 + 3x) + 2}$ (2) $y = \sin^2(x^3 + 2x)$

풀이1 합성함수의 미분법 I에 따른 풀이

(1) 먼저 함수의 몫의 미분법에 따라 미분하면

$$y' = \frac{(x^2 + 3x)' \{ \ln(x^2 + 3x) + 2 \} - (x^2 + 3x) \{ \ln(x^2 + 3x) + 2 \}'}{\{ \ln(x^2 + 3x) + 2 \}^2}$$

가 된다. 다음으로 $\{ \ln(x^2 + 3x) + 2 \}'$ 에서 $f(x) = \ln x + 2$, $g(x) = x^2 + 3x$ 로 보고 $\{ f(g(x)) \}' = f'(g(x))g'(x)$ 를 적용하면

$$\{ \ln(x^2 + 3x) + 2 \}' = \frac{1}{x^2 + 3x} \times (2x + 3) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}$$

이므로 도함수는 다음과 같다.

$$y' = \frac{(2x + 3) \{ \ln(x^2 + 3x) + 2 \} - (x^2 + 3x) \times \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}}{\{ \ln(x^2 + 3x) + 2 \}^2}$$

$$= \frac{(2x + 3) \{ \ln(x^2 + 3x) + 2 \} - (2x + 3)}{\{ \ln(x^2 + 3x) + 2 \}^2} = \frac{(2x + 3) \{ \ln(x^2 + 3x) + 1 \}}{\{ \ln(x^2 + 3x) + 2 \}^2}$$

(2) $\sin^2(x^3 + 2x) = \{ \sin(x^3 + 2x) \}^2$ 이므로

$$y' = \{ 2\sin(x^3 + 2x) \} \times \{ \sin(x^3 + 2x) \}'$$

이 된다. 그리고 $\{ \sin(x^3 + 2x) \}'$ 에서 $f(x) = \sin x$, $g(x) = x^3 + 2x$ 로 보고

$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$ 를 적용하면 다음과 같다.

$$y' = \{2\sin(x^3+2x)\} \times \{\cos(x^3+2x)\} \times (x^3+2x)' \\ = \{\sin 2(x^3+2x)\} \times (3x^2+2) = (3x^2+2)\sin(2x^3+4x) \quad 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

풀이2 합성함수의 미분법 II에 따른 풀이

(1) 공통 부분 x^2+3x 를 u 로 치환해서 두 함수 $y = \frac{u}{\ln u + 2}$, $u = x^2 + 3x$ 로 분리한 다음, 합성함수의 미분법 II를 적용한다.

$$\frac{dy}{du} = \frac{1 \cdot (\ln u + 2) - u \cdot \frac{1}{u}}{(\ln u + 2)^2} = \frac{\ln u + 1}{(\ln u + 2)^2} = \frac{\ln(x^2+3x)+1}{\{\ln(x^2+3x)+2\}^2} \quad \frac{du}{dx} = 2x+3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{\ln(x^2+3x)+1}{\{\ln(x^2+3x)+2\}^2} \cdot (2x+3) = \frac{(2x+3)\{\ln(x^2+3x)+1\}}{\{\ln(x^2+3x)+2\}^2}$$

(2) $x^3+2x=u$ 로 두면 $y = \sin^2 u$ 가 되고, 다시 $\sin u = v$ 로 두면 $y = v^2$ 이 된다. 따라서 주어진 함수는 세 함수 $y = v^2$, $v = \sin u$, $u = x^3 + 2x$ 로 분리되며, 합성함수의 미분법 II를 적용하면 다음과 같다.

$$\frac{dy}{dv} = 2v = 2\sin u = 2\sin(x^3+2x)$$

$$\frac{dv}{du} = \cos u = \cos(x^3+2x) \quad \frac{du}{dx} = 3x^2+2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \{2\sin(x^3+2x)\} \times \{\cos(x^3+2x)\} \times (3x^2+2) \\ = \{\sin 2(x^3+2x)\} \times (3x^2+2) = (3x^2+2)\sin(2x^3+4x)$$

예제5 다음 함수의 도함수를 구하여라.

(1) $y = \sqrt[4]{(4x+3)^3}$ (2) $y = x\sqrt{4-x^2}$ (3) $y = \sin\sqrt{x^2+x}$

★ n 이 유리수일 때, 함수 $y = x^n$ 의 도함수가 $y = nx^{n-1}$ 이므로 합성함수의 미분법에 따라 함수 $y = \{f(x)\}^n$ 의 도함수는 $y = n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$ 이다.

풀이 (1) $\sqrt[4]{(4x+3)^3} = (4x+3)^{\frac{3}{4}}$ 이므로 도함수는 다음과 같다.

$$y' = \left\{ \frac{3}{4}(4x+3)^{-\frac{1}{4}} \right\} \times (4x+3)' = \frac{3}{4} \times \frac{1}{\sqrt[4]{4x+3}} \times 4 = \frac{3}{\sqrt[4]{4x+3}}$$

(2) 먼저 함수의 곱의 미분법을 적용하면

$$y' = 1 \times \sqrt{4-x^2} + x \times (\sqrt{4-x^2})'$$

이고, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 로부터

$$(\sqrt{4-x^2})' = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \times (4-x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} \times (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

이므로 도함수는 다음과 같다.

$$y' = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{-2x^2+4}{\sqrt{4-x^2}}$$

(3) 합성함수의 미분법 I에 따라 도함수는 다음과 같다.

$$y' = (\cos\sqrt{x^2+x}) \times (\sqrt{x^2+x})' = (\cos\sqrt{x^2+x}) \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \times (2x+1) \\ = \frac{(2x+1)\cos\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ 을 이용

예제6 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 다음의 조건들을 모두 만족할 때, $g'(8)$ 의 값을 구하여라.

(가) $f(x) = (x+4)^{\frac{3}{2}}$
 (나) $g(x)$ 는 모든 실수 x 에 대해 미분가능하다.
 (다) $h(x) = (g \circ f)(x)$, $h'(0) = 8$

풀이 두 함수 $f(x) = (x+4)^{\frac{3}{2}}$, $h(x) = g(f(x))$ 의 도함수는 각각

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x+4)^{\frac{1}{2}}, \quad h'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

이고, $h'(0) = 8$ 을 이용하기 위해 $x = 0$ 을 대입하면 다음과 같이 계산된다.

$$h'(0) = g'(f(0))f'(0) = g'(8) \times 3 = 8 \Rightarrow g'(8) = \frac{8}{3}$$