

5지선다형

1. $4^{\frac{1}{2}} + 3^0$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. 두 집합

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 4, 6\}$

에 대하여 $n(A-B)$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 2n + 1}{2n^2 + 7}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

4. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$a_{n+1} = 3a_n$

을 만족시킨다. $a_2 = 2$ 일 때, a_4 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 9 ③ 12 ④ 15 ⑤ 18

5. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 5) = 2017$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

6. 함수 $y = \frac{3}{x-2} + 2$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{a}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프와 일치한다. $a+m+n$ 의 값은? (단, a, m, n 은 상수이다.) [3점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

7. 함수 $f(x) = 2x + a$ 에 대하여 $f^{-1}(1) = 2$ 일 때, $f(3)$ 의 값은? (단, a 는 상수이다.) [3점]

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

8. $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ 라 할 때, $\log \frac{4}{15}$ 를 a, b 로 나타낸 것은? [3점]

- ① $3a - b - 1$ ② $3a + b - 1$ ③ $2a - b + 1$
④ $2a + b - 1$ ⑤ $a - 3b + 1$

수학 영역(나형)

3

9. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{k}{a_n + 2}$$

를 만족시킬 때, $a_3 = \frac{3}{2}$ 이 되도록 하는 상수 k 의 값은? [3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

10. 실수 x, y 에 대한 두 조건

$$p : x \geq k \text{이고 } y \geq 1,$$

$$q : (x-3)^2 + (y-4)^2 < 1$$

에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 실수 k 의 최댓값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

11. 첫째항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = 4a_3, \quad a_2 + a_3 = -12$$

를 만족시킬 때, a_5 의 값은? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

12. 실수 x 에 대한 조건

‘모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4kx + 3k^2 \geq 2k - 3$ 이다.’
가 참인 명제가 되도록 하는 상수 k 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자. $M - m$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

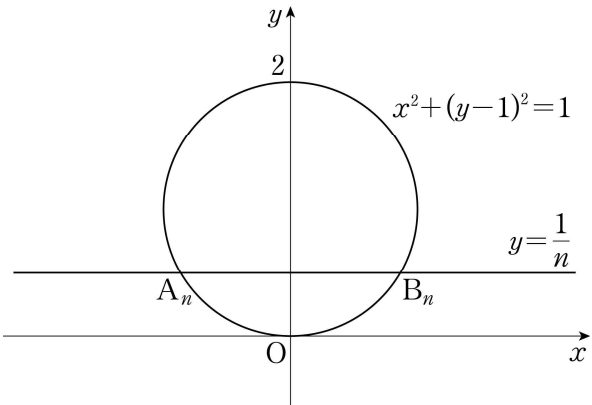
13. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대하여 일대일 대응인 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(2)-f(3)=f(4)-f(1)=f(5)$
(나) $f(1)<f(2)<f(4)$

$f(2)+f(5)$ 의 값은? [3점]

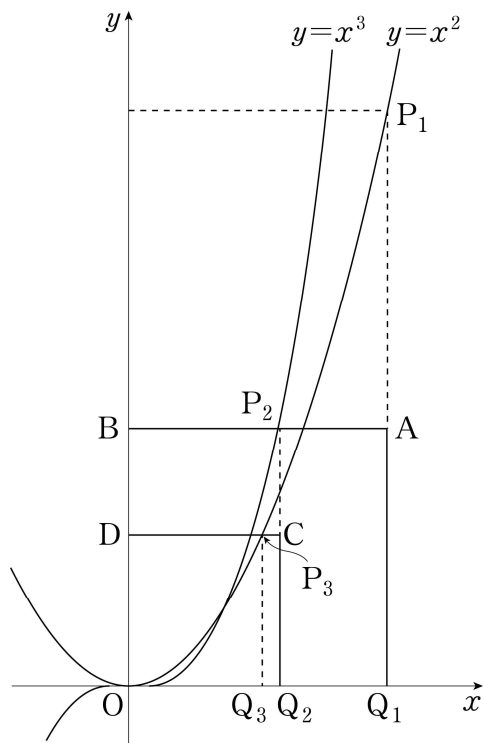
- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

14. 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 직선 $y=\frac{1}{n}$ 과 원 $x^2+(y-1)^2=1$ 의 두 교점을 각각 A_n, B_n 이라 하자. 선분 A_nB_n 의 길이를 l_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} n(l_n)^2$ 의 값은? [4점]



- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

15. 그림과 같이 좌표평면에 두 함수 $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$ 의 그래프가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $P_1(a, f(a))$ ($a>1$)에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q_1 이라 하자. 선분 OQ_1 을 한 변으로 하는 정사각형 OQ_1AB 의 한 변 AB 가 곡선 $y=g(x)$ 와 만나는 점을 P_2 , 점 P_2 에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q_2 라 하자. 선분 OQ_2 를 한 변으로 하는 정사각형 OQ_2CD 의 한 변 CD 가 곡선 $y=f(x)$ 와 만나는 점을 P_3 , 점 P_3 에서 x 축에 내린 수선의 발을 Q_3 이라 하자. 두 점 Q_2, Q_3 의 x 좌표를 각각 b, c 라 할 때, $bc=2$ 가 되도록 하는 점 P_1 의 y 좌표의 값은? (단, O 는 원점이고, 두 점 A, C 는 제1사분면에 있다.) [4점]



- ① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

16. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가

$$f(x) = \frac{6x+12}{2x-1},$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{가 정수인 경우}) \\ 0 & (x \text{가 정수가 아닌 경우}) \end{cases}$$

일 때, 방정식 $(g \circ f)(x)=1$ 을 만족시키는 모든 자연수 x 의 개수는? [4점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

17. 함수

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} & (x \geq 0) \\ 4x & (x < 0) \end{cases}$$

의 역함수 $g(x)$ 에 대하여 부등식 $g(x) \leq -\frac{1}{4}x^2 + 3$ 의 해가 $a \leq x \leq b$ 일 때, $a+b$ 의 값은? [4점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

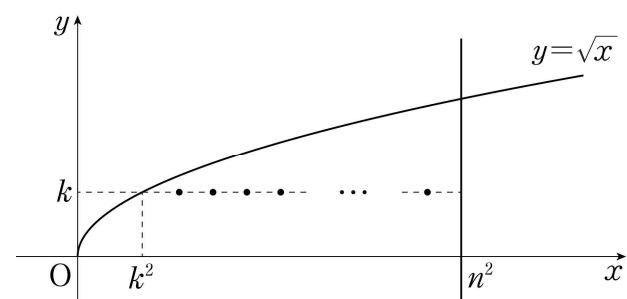
18. 다음은 2 이상의 자연수 n 에 대하여 함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x = n^2$ 으로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수 a_n 을 구하는 과정이다.

$n=2$ 일 때, 곡선 $y = \sqrt{x}$, x 축 및 직선 $x=4$ 로 둘러싸인 도형의 내부에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은 $(2, 1), (3, 1)$ 이므로

$$a_2 = \boxed{\text{(가)}}$$

이다.

3 이상의 자연수 n 에 대하여 a_n 을 구하여 보자.



위의 그림과 같이 $1 \leq k \leq n-1$ 인 정수 k 에 대하여 주어진 도형의 내부에 있는 점 중에서 x 좌표가 정수이고, y 좌표가 k 인 점은

$$(k^2+1, k), (k^2+2, k), \dots, (\boxed{\text{(나)}}, k)$$

이므로 이 점의 개수를 b_k 라 하면

$$b_k = \boxed{\text{(나)}} - k^2$$

이다. 따라서

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \boxed{\text{(다)}}$$

이다.

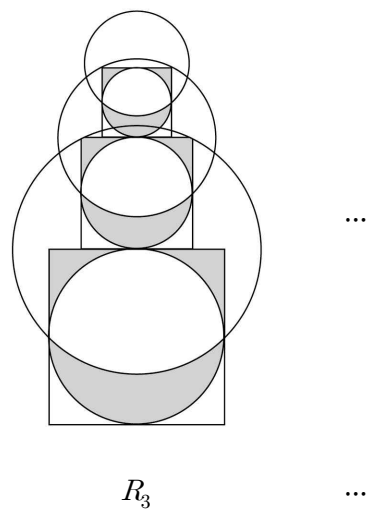
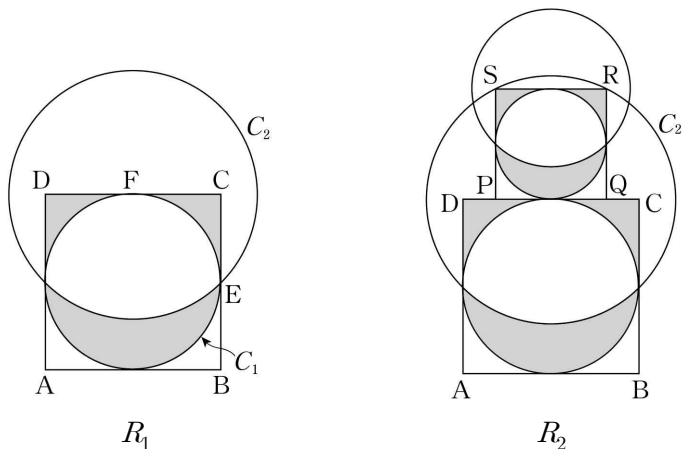
위의 (가)에 알맞은 수를 p 라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $p+f(4)+g(6)$ 의 값은? [4점]

- ① 131 ② 133 ③ 135 ④ 137 ⑤ 139

19. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD가 있다. 이 정사각형에 내접하는 원을 C_1 이라 하자. 원 C_1 이 변 BC, CD와 접하는 점을 각각 E, F라 하고, 점 F를 중심으로 하고 점 E를 지나는 원을 C_2 라 하자. 원 C_1 의 내부와 원 C_2 의 외부의 공통부분인 \smile 모양의 도형과, 원 C_1 의 외부와 원 C_2 의 내부 및 정사각형 ABCD의 내부의 공통부분인 \frown 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 두 꼭짓점이 변 CD 위에 있고 나머지 두 꼭짓점이 정사각형 ABCD의 외부에 있으면서 원 C_2 위에 있는 정사각형 PQRS를 그리고, 이 정사각형 안에 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 \smile 모양과 \frown 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{26-5\pi}{6}$ ② $\frac{28-5\pi}{6}$ ③ $\frac{30-5\pi}{6}$
 ④ $\frac{32-5\pi}{6}$ ⑤ $\frac{34-5\pi}{6}$

20. 실수 x 에 대한 두 조건

$$p: x^2 - x - 6 < 0,$$

$$q: x^2 + (6-3a)x + 2a^2 - 10a + 8 \geq 0$$

이 모두 참이 되도록 하는 정수 x 가 오직 하나 존재할 때, 모든 정수 a 의 값의 합은? [4점]

- ① 3 ② 5 ③ 7 ④ 9 ⑤ 11

21. 자연수 m 에 대하여 집합 A_m 을

$$A_m = \left\{ (a, b) \left| 2^a = \frac{m}{b}, a, b \text{는 자연수} \right. \right\}$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
[4점]

- ㄱ. $A_4 = \{(1, 2), (2, 1)\}$

ㄴ. 자연수 k 에 대하여 $m = 2^k$ 이면 $n(A_m) = k$ 이다.

ㄷ. $n(A_m) = 1$ 이 되도록 하는 두 자리 자연수 m 의 개수는 23이다.

- ① ㄱ

② ㄱ, ㄴ

③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ

⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \times \log_2 8$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_2 = 2$, $a_5 - a_3 = 6$ 일 때, a_6 의 값을 구하시오. [3점]

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) = 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2b_n) = 9$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n(1 + b_n)$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

25. $0 \leq x \leq 3$ 일 때, 함수 $y = 2\sqrt{x+1} + k$ 의 최댓값을 M ,
최솟값을 m 이라 하자. $M+m=40$ 일 때, 상수 k 의 값을
구하시오. [3점]

27. 함수 $f(x) = x^2 + x - \frac{1}{3}$ 에 대하여 부등식

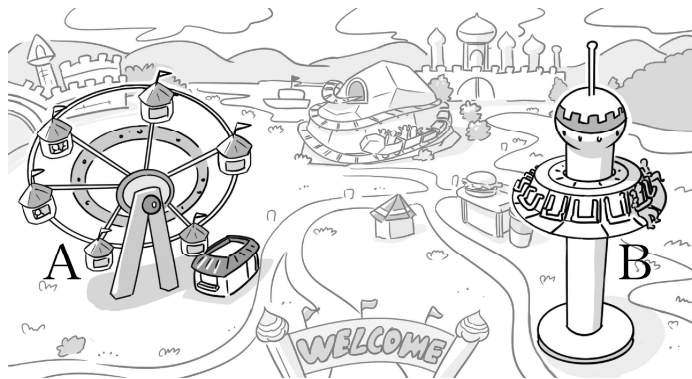
$$f(n) < k < f(n) + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

을 만족시키는 정수 k 의 값을 a_n 이라 하자.

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{a_n} = \frac{q}{p} \text{ 일 때, } p+q \text{의 값을 구하시오. (단, } p \text{와 } q \text{는}$$

서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 어느 날 2개의 놀이 기구 A, B가 있는 놀이공원에 다녀온 30명의 학생을 대상으로 그날 어떤 놀이 기구를 이용했는지 조사하였더니 놀이 기구 A를 이용한 학생은 23명, 놀이 기구 B를 이용한 학생은 16명이었다. 놀이 기구 A, B를 모두 이용한 학생 수의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하시오. [4점]



29. 2 이상의 자연수 x 에 대하여

$\log_x n$ (n 은 $1 \leq n \leq 300$ 인 자연수)

가 자연수인 n 의 개수를 $A(x)$ 라 하자. 예를 들어, $A(2)=8$, $A(3)=5$ 이다.

집합 $P=\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합 X 에 대하여 집합 X 에서 집합 X 로의 대응 f 를

$$f(x)=A(x) \quad (x \in X)$$

로 정의하면 어떤 대응 f 는 함수가 된다. 함수 f 가 일대일 대응이 되도록 하는 집합 X 의 개수를 구하시오. [4점]

30. 자연수 전체의 집합의 부분집합 X 가 상수 p 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(X)=3$

(나) $x \in X$ 일 때,

$$x \text{가 홀수이면 } \frac{x+p}{2} \in X,$$

$$x \text{가 짝수이면 } \frac{x}{2} \in X \text{이다.}$$

$5 \in X$ 일 때, 모든 자연수 p 의 값의 합을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.