

2017학년도 사관학교 기출 문제

수학 영역(가형)

1

1. $\int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

2. 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르는 확률변수 X 의 평균이 5일 때, 자연수 n 의 값은? [2점]

- ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

3. 좌표공간에서 세 점 $A(6, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, -3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC 의 무게중심을 G 라 할 때, 선분 OG 의 길이는? (단, O 는 원점이다.) [2점]

- ① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{10}$

4. 자연수 10의 분할 중에서 짝수로만 이루어진 것의 개수는? [3점]

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

5. 한 개의 주사위를 던질 때 짝수의 눈이 나오는 사건을 A , 소수의 눈이 나오는 사건을 B 라 하자. $P(B|A) - P(B|A^c)$ 의 값은? (단, A^c 은 A 의 여사건이다.) [3점]

- ① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{6}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

6. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^{\sec x}$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1
④ e ⑤ e^2

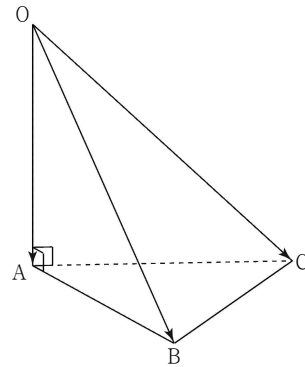
7. 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	a	b	c	1

$E(X)=1$, $V(X)=\frac{1}{4}$ 일 때, $P(X=0)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{8}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

8. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC 를 밑면으로 하고 $\overline{OA}=2$, $\overline{OA} \perp \overline{AB}$, $\overline{OA} \perp \overline{AC}$ 인 사면체 $OABC$ 가 있다. $|\overline{OA} + \overline{OB} - \overline{OC}|$ 의 값은? [3점]



- ① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$
④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

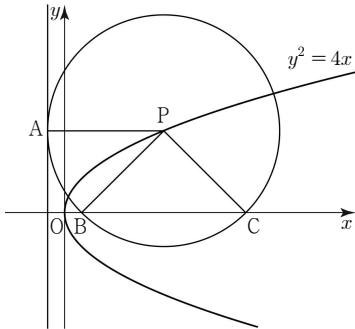
수학 영역(가형)

3

9. 두 학생 A, B를 포함한 8명의 학생을 임의로 3명, 3명, 2명씩 3개의 조로 나눌 때, 두 학생 A, B가 같은 조에 속할 확률은? [3점]

- ① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

10. 그림과 같이 포물선 $y^2 = 4x$ 위의 한 점 P를 중심으로 하고 준선과 점 A에서 접하는 원이 x축과 만나는 두 점을 각각 B, C라 하자. 부채꼴 PBC의 넓이가 부채꼴 PAB의 넓이의 2배일 때, 원의 반지름의 길이는? (단, 점 P의 x좌표는 1보다 크고, 점 C의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 크다.) [3점]



- ① $2+2\sqrt{3}$ ② $3+2\sqrt{2}$ ③ $3+2\sqrt{3}$
 ④ $4+2\sqrt{2}$ ⑤ $4+2\sqrt{3}$

11. 어느 공장에서 생산하는 균용 위장크림 1개의 무게는 평균이 m , 표준편차가 σ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산하는 균용 위장크림 중에서 임의로 택한 1개의 무게가 50 이상일 확률은 0.1587이다. 이 공장에서 생산하는 균용 위장크림 중에서 임의추출한 4개의 무게의 평균이 50 이상일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, 무게의 단위는 g이다.) [3점]

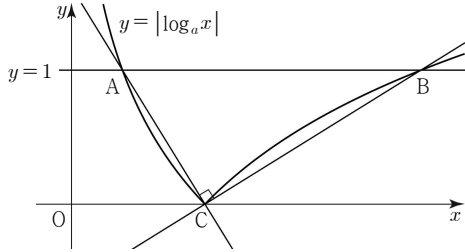
z	$P(0 \leq Z \leq z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

- ① 0.0228 ② 0.0668 ③ 0.1587
 ④ 0.3085 ⑤ 0.4332

12. 곡선 $y = \tan \frac{x}{2}$ 와 직선 $x = \frac{\pi}{2}$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

- ① $\frac{1}{4} \ln 2$ ② $\frac{1}{2} \ln 2$ ③ $\ln 2$
 ④ $2 \ln 2$ ⑤ $4 \ln 2$

13. 그림과 같이 곡선 $y = |\log_a x|$ 가 직선 $y=1$ 과 만나는 점을 각각 A, B라 하고 x 축과 만나는 점을 C라 하자. 두 직선 AC, BC가 서로 수직이 되도록 하는 모든 양수 a 의 값의 합은? (단, $a \neq 1$) [3점]

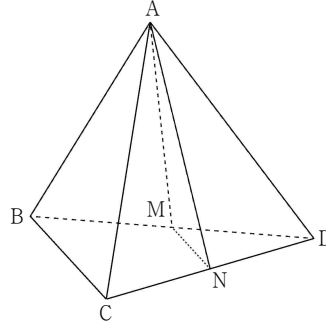


- ① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

14. 같은 종류의 볼펜 6개, 같은 종류의 연필 6개, 같은 종류의 지우개 6개가 필통에 들어 있다. 이 필통에서 8개를 동시에 꺼내는 경우의 수는? (단, 같은 종류끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

- ① 18 ② 24 ③ 30 ④ 36 ⑤ 42

15. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 12인 정사면체 ABCD에서 두 모서리 BD, CD의 중점을 각각 M, N이라 하자. 사각형 BCNM의 평면 AMN 위로의 정사영의 넓이는? [4점]



- ① $\frac{15\sqrt{11}}{11}$ ② $\frac{18\sqrt{11}}{11}$ ③ $\frac{21\sqrt{11}}{11}$
 ④ $\frac{24\sqrt{11}}{11}$ ⑤ $\frac{27\sqrt{11}}{11}$

16. 자연수 n 에 대하여

$$S_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1}$$

이라 할 때, 다음은 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값을 구하는 과정이다.

$$\begin{aligned}
 & 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2} \\
 &= \boxed{(가)} - (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{1+x^2} \text{ 이므로} \\
 S_n &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1} \\
 &= \int_0^1 \{1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2}\} dx \\
 &= \int_0^1 \boxed{(가)} dx - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \text{ 이다.}
 \end{aligned}$$

한편, $0 \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq x^{2n}$ 이므로

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx = \boxed{(나)} \text{ 이다.}$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 \boxed{(가)} dx \text{ 이다.}$$

$x = \tan \theta$ ($-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$)로 놓으면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 \boxed{(가)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} d\theta = \boxed{(다)} \text{ 이다.}$$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(x)$, $g(n)$, (다)에 알맞은 수를 k 라 할 때, $k \times f(2) \times g(2)$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{\pi}{40}$ ② $\frac{\pi}{60}$ ③ $\frac{\pi}{80}$ ④ $\frac{\pi}{100}$ ⑤ $\frac{\pi}{120}$

17. 좌표공간에 평행한 두 평면 $\alpha : 2x - y + 2z = 0$,

$\beta : 2x - y + 2z = 6$ 위에 각각 점 $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 1)$ 이 있다.

평면 α 위의 점 P 와 평면 β 위의 점 Q 에 대하여

$\overline{AQ} + \overline{QP} + \overline{PB}$ 의 최솟값은? [4점]

- ① 6 ② $\sqrt{37}$ ③ $\sqrt{38}$
 ④ $\sqrt{39}$ ⑤ $2\sqrt{10}$

18. 함수 $f(x) = \int_1^x e^{t^3} dt$ 에 대하여 $\int_0^1 xf(x) dx$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1-e}{2}$ ② $\frac{1-e}{3}$ ③ $\frac{1-e}{4}$
 ④ $\frac{1-e}{5}$ ⑤ $\frac{1-e}{6}$

19. 실수 t 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 P 가 나타내는 도형의 둘레의 길이를 $f(t)$ 라 하자.

- (가) 점 P 는 구 $x^2+y^2+z^2=25$ 위의 점이다.
 (나) 점 $A(t+5, 2t+4, 3t-2)$ 에 대하여 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP}=0$ 이다.

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, 0는 원점이다.) [4점]

- < 보 기 >
- ㄱ. $f(0) = \frac{20}{3}\pi$
 ㄴ. $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 10\pi$
 ㄷ. $f(t)$ 는 $t = -1$ 에서 최솟값을 갖는다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 지수함수 $f(x) = a^x$ ($0 < a < 1$)의 그래프가 직선 $y = x$ 와 만나는 점의 x 좌표를 b 라 하자. 함수

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq b) \\ f^{-1}(x) & (x > b) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, ab 의 값은? [4점]

- ① e^{-e-1} ② $e^{-e-\frac{1}{e}}$ ③ $e^{-e+\frac{1}{e}}$
 ④ e^{e-1} ⑤ e^{e+1}

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(0) = 0, f'(0) = 1$
 (나) 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$ 이다.

$f(-1) = k$ ($-1 < k < 0$)일 때, $\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx$ 의 값을 k 로 나타낸 것은? [4점]

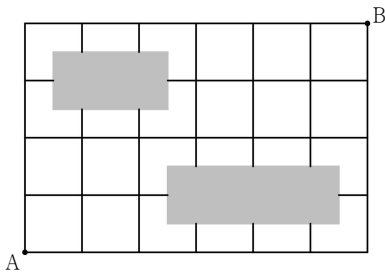
- ① $1-k^2$ ② $1-2k$ ③ $1-k$
 ④ $1+k$ ⑤ $1+k^2$

22. $\sin^2 \theta = \frac{4}{5}$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) 일 때, $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = p$ 이다. $\frac{1}{p^2}$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 두 초점 F, F' 을 공유하는 타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{16} = 1$ 과 쌍곡선

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 이 있다. 타원과 쌍곡선이 만나는 점 중 하나를 P 라 할 때, $|\overline{PF}^2 - \overline{PF'}^2|$ 의 값을 구하시오. (단, a는 양수이다.) [3점]

23. 어느 부대가 그림과 같은 바둑판 모양의 도로망에서 장애물(어두운 부분)을 피해 A 지점에서 B 지점으로 도로를 따라 이동하려고 한다. A 지점에서 출발하여 B 지점까지 최단거리로 가는 경우의 수를 구하시오. [3점]



25. 매개변수 t ($t > 0$) 으로 나타내어진 함수

$$x = t^3, y = 2t - \sqrt{2t}$$

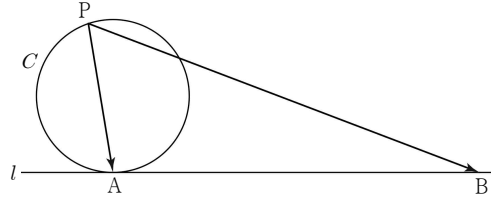
의 그래프 위의 점 $(8, a)$ 에서의 접선의 기울기는 b 이다. $100ab$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 곡선 $y = \sin^2 x$ ($0 \leq x \leq \pi$)의 두 변곡점을 각각 A, B라 할 때, 점 A에서의 접선과 점 B에서의 접선이 만나는 점의 y 좌표는 $p+q\pi$ 이다. $40(p+q)$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 유리수이다.) [4점]

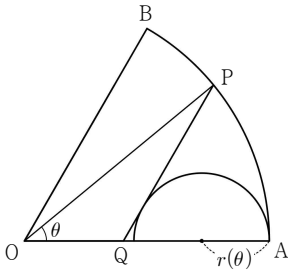
27. 주머니에 1, 2, 3, 4, 5, 6의 숫자가 하나씩 적혀 있는 6개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 차례로 꺼낸다. 꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 곱이 짝수일 때, 첫 번째로 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수이었을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 공은 다시 넣지 않고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 5인 원 C와 원 C 위의 점 A에서의 접선 l 이 있다.

원 C 위의 점 P와 $\overline{AB} = 24$ 를 만족시키는 직선 l 위의 점 B에 대하여 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]



29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P를 지나고 선분 OB와 평행한 직선이 선분 OA와 만나는 점을 Q라 하고 $\angle AOP = \theta$ 라 하자. 점 A를 지름의 한 끝점으로 하고 지름이 선분 AQ 위에 있으며 선분 PQ에 접하는 반원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{r(\theta)}{\theta} = a + b\sqrt{3}$ 이다. $a^2 + b^2$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ 이고, a, b 는 유리수이다.) [4점]



30. 좌표공간에 평면 $z=1$ 위의 세 점 $A(1, -1, 1)$, $B(1, 1, 1)$, $C(0, 0, 1)$ 이 있다. 점 $P(2, 3, 2)$ 를 지나고 벡터 $\vec{d} = (a, b, 1)$ 과 평행한 직선이 삼각형 ABC의 둘레 또는 내부를 지날 때, $|\vec{d} + 3\overline{OA}|^2$ 의 최솟값을 구하시오. (단, O는 원점이고, a, b 는 실수이다.) [4점]