01

[풀이]

성분으로 주어진 벡터의 연산에 의하여

$\vec{a}+\vec{b}=(2,\ 4)+(1,\ 1)=(3,\ 5)$

따라서 구하는 값은 $3+5=8$이다.

답 ④

02

[풀이]

사인함수 $y=\sin x$의 주기는 2π이므로

$\sin\frac{7\pi}{3}=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

답 ⑤

03

[풀이]

로그의 성질과 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}=\lim_{x\to 0}3\ln(1+3x)^{\frac{1}{3x}}=3\ln e=3$

답 ③

04

[풀이]

두 사건 A와 B가 서로 독립이므로

두 사건이 서로 독립일 필요충분조건에 의하여

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{6}$

답 ①

05

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=e^x(2x+1)+e^x\times 2=e^x(2x+3)$

$\therefore\ f'(1)=5e$

답 ④

06

[풀이]

매개변수로 나타내어진 함수의 미분법에 의하여

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2+1}{2t}$ (단, $\frac{dx}{dt}\neq 0$)

$t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}=\frac{4}{2}=2$이다.

답 ④

07

[풀이]

$8=5+1+1+1$

$=4+2+1+1$

$=3+3+1+1$

$=3+2+2+1$

$=2+2+2+2$

이므로

$\therefore\ P(8,\ 4)=5$

답 ②

08

[풀이]

로그의 정의에 의하여 $\log_2\frac{1}{2}=-1$이므로

(우변)$=1-(-1)=2$

주어진 부등식은

$2\log_2|x-1|\leq 2$

정리하면

$\log_2|x-1|\leq 1=\log_2 2$

밑이 1보다 크므로

$|x-1|\leq 2$

(단, 진수의 조건에 의하여 $|x-1|\neq 0$)

$\Leftrightarrow$

$-2\leq x-1\leq 2$ (단, $x\neq 1$)

$\Leftrightarrow$

$-1\leq x\leq 3$ (단, $x\neq 1$)

x는 정수이므로 주어진 부등식의 해집합은

$\{-1,\ 0,\ 2,\ 3\}$

따라서 구하는 값은 4이다.

답 ②

09

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=-\frac{1}{(x+3)^2}$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$$f''(x)=\frac{2}{(x+3)^3}$$

함수 $f'(x)$는 미분가능하므로

$$f''(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}=2$$

즉, $\dfrac{2}{(a+3)^3}=2$

정리하면

$(a+3)^3=1$ 즉, $a+3=1$

풀면

$\therefore\ a=-2$

답 ①

[참고]

삼차방정식

$x^3=1$ $\cdots(*)$

의 실근은 $x=1$로 유일하다. 이유는 다음과 같다.

$(*)$을 정리하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

그런데 $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$이므로

$x-1=0$ 즉, $x=1$이다.

10

[풀이]

$a>0$, $b>0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

문제에서 주어진 쌍곡선의 주축의 길이가 4이므로

$a=2$ $\cdots$㉠

문제에서 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구하면

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ 즉, $y=\pm\dfrac{b}{a}x$

문제에서 주어진 조건에 의하여 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{5}{2}$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$a=2$, $b=5$

$\therefore\ a^2+b^2=29$

답 ⑤

11

[풀이1]

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\vec{a}//\vec{v}+\vec{b}$

벡터의 평행의 필요충분조건에 의하여

$\vec{v}+\vec{b}=k\vec{a}$ (단, $k\neq 0$인 실수)

이제 $\vec{v}=(x,\ y)$로 두자.

성분으로 주어진 벡터의 연산에 의하여

$\vec{v}+\vec{b}=(x+4,\ y-2)$, $k\vec{a}=(3k,\ k)$

이므로

$(x+4,\ y-2)=(3k,\ k)$

성분으로 주어진 벡터의 상등의 정의에 의하여

$x=3k-4$, $y=k+2$

성분으로 주어진 벡터의 크기를 구하는 공식에 의하여

$|\vec{v}|^2=(3k-4)^2+(k+2)^2=10k^2-20k+20$

$=10(k-1)^2+10\geq 10$

(단, 등호는 $k=1$일 때 성립한다.)

답 ⑤

[풀이2]

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\vec{a}//\vec{v}+\vec{b}$

벡터의 평행의 필요충분조건에 의하여

$\vec{v}+\vec{b}=k\vec{a}$ (단, $k\neq 0$인 실수)

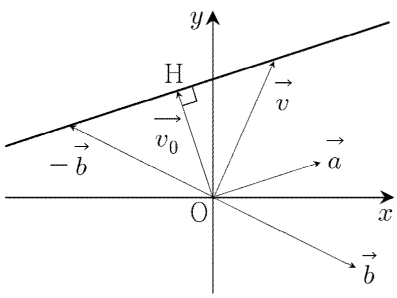
정리하면

$\vec{v}=-\vec{b}+k\vec{a}$ $\cdots(*)$

벡터 $\vec{v}$의 종점의 자취는 벡터 $-\vec{b}$의 종점을 지나고 벡터 $\vec{a}$에 평행한 직선이다.

원점 O에서 이 직선에 내린 수선의 발을 H, $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{v_0}$라고 하자.

그리고 $\vec{v}=\overrightarrow{v_0}$일 때, $(*)$를 만족시키는 k의 값을 k_0라고 하자.



$\overrightarrow{v_0}\perp\vec{a}$이므로 $\overrightarrow{v_0}\cdot\vec{a}=0$이다.

벡터의 내적의 성질에 의하여

$\overrightarrow{v_0}\cdot\vec{a}=(-\vec{b}+k_0\vec{a})\cdot\vec{a}=-\vec{a}\cdot\vec{b}+k_0|\vec{a}|^2=0$

정리하면

$k_0=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}=\dfrac{10}{10}=1$이므로 $\overrightarrow{v_0}=\vec{a}-\vec{b}$이다.

성분으로 주어진 벡터의 크기를 구하는 공식에 의하여

$\therefore\ |\vec{v}|^2\geq|\overrightarrow{v_0}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=10$

답 ⑤

[참고]

$\left|\overrightarrow{v_0}\right|$의 값을 다음과 같은 방법으로 구할 수도 있다.

벡터 $\vec{v}$의 종점의 자취는 점 $(-4, 2)$를 지나고 기울기가 $\frac{1}{3}$인 직선이다.

이 직선의 방정식은

$x-3y+10=0$

원점 O에서 이 직선까지의 거리가 $\left|\overrightarrow{v_0}\right|$이므로

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$\left|\overrightarrow{v_0}\right|=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

12

[풀이]

문제에서 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)dt=1^2-a\sqrt{1}$ 즉, $0=1-a$이므로 $a=1$

문제에서 주어진 등식을 다시 쓰면

$\int_1^x f(t)dt=x^2-\sqrt{x}\,(x>0)$

적분과 미분의 관계에 의하여

$f(x)=2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\,(x>0)$

$\therefore\ f(1)=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

답 ②

13

[풀이1]

다섯 개의 팀을 각각 A, B, C, D, E라고 하자.

(1) 첫째 날에 두 팀, 둘째 날에 세 팀이 공연하는 경우

첫째 날에 공연하는 팀의 순서를 정하는 경우의 수는

순열의 수에 의하여

${}_5\mathrm{P}_2(={}_5\mathrm{C}_2\times 2!)$

둘째 날에 공연하는 팀의 순서를 정하는 경우의 수는

순열의 수에 의하여

${}_3\mathrm{P}_3(={}_3\mathrm{C}_3\times 3!)$

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_2\times{}_3\mathrm{P}_3=5!=120$

(2) 첫째 날에 세 팀, 둘째 날에 두 팀이 공연하는 경우

첫째 날에 공연하는 팀의 순서를 정하는 경우의 수는

순열의 수에 의하여

${}_5\mathrm{P}_3(={}_5\mathrm{C}_3\times 3!)$

둘째 날에 공연하는 팀의 순서를 정하는 경우의 수는

순열의 수에 의하여

${}_2\mathrm{P}_2(={}_2\mathrm{C}_2\times 2!)$

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_3\times{}_2\mathrm{P}_2=5!=120$

(1), (2)는 동시에 일어나지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$120+120=240$

답 ③

[풀이2]

다섯 개의 팀을 각각 A, B, C, D, E라고 하자.

(1) 첫째 날에 두 팀, 둘째 날에 세 팀이 공연하는 경우

이 다섯 개의 팀을 일렬로 나열한 후에, 가장 왼쪽부터 순서대로 '첫째 날에 첫 번째로 공연하는 팀', '첫째 날에 두 번째로 공연하는 팀', '둘째 날에 첫 번째로 공연하는 팀', '둘째 날에 두 번째로 공연하는 팀', '둘째 날에 세 번째로 공연하는 팀'이라고 하자. 예를 들어, B, A, C, E, D와 같이 나열된 경우를 생각하면

B는 첫째 날에 첫 번째로 공연하는 팀,

A는 첫째 날에 두 번째로 공연하는 팀,

C는 둘째 날에 첫 번째로 공연하는 팀,

E는 둘째 날에 두 번째로 공연하는 팀,

D는 둘째 날에 세 번째로 공연하는 팀이다.

경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_5\mathrm{P}_5(=120)$이다.

(2) 첫째 날에 세 팀, 둘째 날에 두 팀이 공연하는 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수는

순열의 수에 의하여 ${}_5\mathrm{P}_5(=120)$이다.

(1), (2)는 동시에 일어나지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$120+120=240$

답 ③

14

[풀이1]

$x-1=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=1$이고,

$x=2$일 때, $t=1$, $x=6$일 때, $t=5$이므로

정적분의 치환적분법에 의하여

$\int_2^6 \ln(x-1)dx=\int_1^5 \ln t dt=[t\ln t-t]_1^5=5\ln 5-4$

($\because$ 정적분의 부분적분법)

답 ③

[풀이2]

정적분의 부분적분법에 의하여

$\int_{2}^{6}\ln(x-1)dx = \int_{2}^{6}1\times\ln(x-1)dx$

$=[(x-1)\ln(x-1)]_{2}^{6}-\int_{2}^{6}dx$

$=5\ln5-4$

답 ③

15

[풀이1]

문제에서 주어진 12장의 카드를 아래처럼 구별하자.

1_a, 1_b, 1_c, 2_a, 2_b, 2_c, 3_a, 3_b, 3_c, 4_a, 4_b, 4_c

3장의 카드 1_a, 1_b, 1_c는 1의 숫자가 적혀 있다는 점에서 공통된 성질을 가지지만, 각기 다른 카드이다. 그리고 각각의 카드가 선택될 확률은 $\frac{1}{12}$로 모두 같으므로, 수학적 확률의 정의를 이용하여 확률을 계산해도 좋다.

위의 12장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 선택할 때, 아래처럼 각기 다른 세 가지의 경우를 생각할 수 있다.

(1) 3장 모두 같은 숫자가 적힌 경우

이 경우는 문제의 조건을 만족시킨다.

(2) 오직 2장만 같은 숫자가 적힌 경우

이 경우는 문제의 조건을 만족시킨다.

(3) 3장 모두 다른 숫자가 적힌 경우

이 경우는 문제의 조건을 만족시키지 않는다.

예를 들어 1_a, 2_c, 4_a가 선택된 경우이다.

경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_4C_3\times{}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_1$

${}_4C_3$은 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 세 개의 숫자를 선택하는 경우의 수이다. 1, 2, 4가 선택되었다고 할 때, ${}_3C_1$은 세 개의 1_a, 1_b, 1_c 중에서 한 개를 선택하는 경우의 수, ${}_3C_1$은 세 개의 2_a, 2_b, 2_c 중에서 한 개를 선택하는 경우의 수, ${}_3C_1$은 세 개의 4_a, 4_b, 4_c 중에서 한 개를 선택하는 경우의 수이다.

구하는 확률을 p라고 두면

수학적 확률의 정의와 여사건의 확률에 의하여

$$\therefore\ p=1-\frac{{}_4C_3\times{}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_1}{{}_{12}C_3}=1-\frac{27}{55}=\frac{28}{55}$$

답 ⑤

[풀이2]

문제에서 주어진 12장의 카드를 아래처럼 구별하자.

1_a, 1_b, 1_c, 2_a, 2_b, 2_c, 3_a, 3_b, 3_c, 4_a, 4_b, 4_c

3장의 카드 1_a, 1_b, 1_c는 1의 숫자가 적혀 있다는 점에서 공통된 성질을 가지지만, 각기 다른 카드이다. 그리고 각각의 카드가 선택될 확률은 $\frac{1}{12}$로 모두 같으므로, 수학적 확률의 정의를 이용하여 확률을 계산해도 좋다.

위의 12장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 선택할 때, 아래처럼 각기 다른 세 가지의 경우를 생각할 수 있다.

(1) 3장 모두 같은 숫자가 적힌 경우

이 경우는 문제의 조건을 만족시킨다.

예를 들어 1_a, 1_b, 1_c가 선택된 경우이다.

경우의 수는 4이다.

(2) 오직 2장만 같은 숫자가 적힌 경우

이 경우는 문제의 조건을 만족시킨다.

예를 들어 1_a, 1_b, 3_b가 선택된 경우이다.

경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

$4\times{}_3C_2\times{}_9C_1=108$

4는 네 개의 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 한 개의 숫자를 선택하는 경우의 수이다. 1이 선택되었다고 할 때, ${}_3C_2$는 세 개의 1_a, 1_b, 1_c 중에서 두 개를 선택하는 경우의 수, ${}_9C_1$은 아홉 개의 2_a, 2_b, 2_c, 3_a, 3_b, 3_c, 4_a, 4_b, 4_c 중에서 한 개를 선택하는 경우의 수이다.

구하는 확률을 p라고 두면

수학적 확률의 정의에 의하여

$$\therefore\ p=\frac{4+4\times{}_3C_2\times{}_9C_1}{{}_{12}C_3}=\frac{28}{55}$$

답 ⑤

16

[풀이1]

함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-x$로 두면

$$h(x)=\begin{cases}x^2-x+k & (x\le 2)\\ \ln(x-2)-x & (x>2)\end{cases}$$

다음과 같은 필요충분조건을 생각하자.

$f(x)=x+t \Leftrightarrow f(x)-x=t \Leftrightarrow h(x)=t$

직선 $y=t$와 함수 $h(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 $g(t)$이다.

구간 $(-\infty,\ 2]$에서 함수 $h(x)$의 방정식은

$$h(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+k-\frac{1}{4}$$

구간 $(-\infty,\ 2]$에서 함수 $h(x)$는 이차함수의 일부이다.

이때, 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ k-\frac{1}{4}\right)$이다.

그리고 $h(2)=k+2$이므로

함수 $h(x)$의 그래프는 점 $(2,\ k+2)$를 지난다.

구간 $(2,\ \infty)$에서 함수 $h(x)$의 도함수는

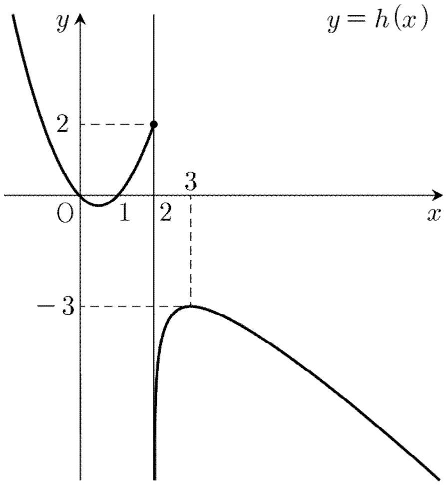
$$h'(x)=\frac{1}{x-2}-1=\frac{3-x}{x-2}\ (x>2)$$

$h'(x)=0$이면 $x=3$

$x=3$의 좌우에서 $h'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로, 함수 $h(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.

$\lim_{x\to 2+} h(x)=-\infty$이므로 직선 $x=2$는 함수 $h(x)$의 점근선이다.

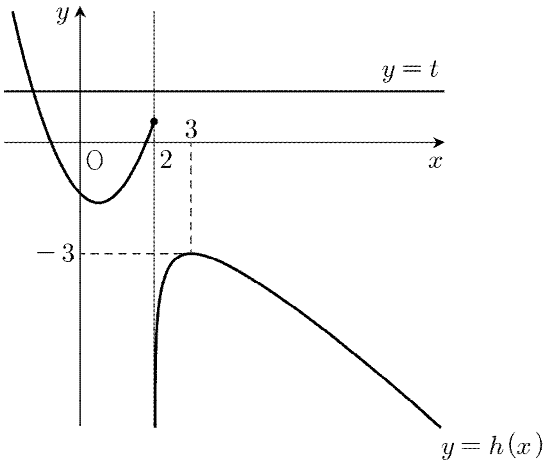
예를 들어 $k=0$일 때, 함수 $h(x)$의 그래프는



(1) $k-\frac{1}{4}>-3$인 경우

직선 $y=t$를 y축 방향으로 평행이동시키면서

직선 $y=t$와 함수 $h(x)$의 그래프의 교점의 개수를 관찰하자.



함수 $g(t)$의 방정식은

$$g(t)=\begin{cases} 1 & (t>k+2) \\ 2 & \left(k-\frac{1}{4}<t\le k+2\right) \\ 1 & \left(t=k-\frac{1}{4}\right) \\ 0 & \left(-3<t<k-\frac{1}{4}\right) \\ 1 & (t=-3) \\ 2 & (t<-3) \end{cases}$$

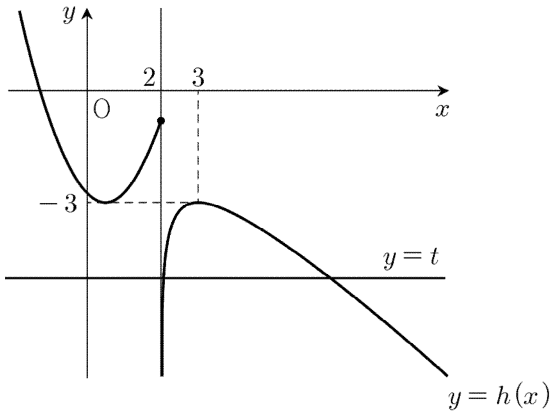
함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 3이다.

($t=k+2$, $t=k-\frac{1}{4}$, $t=-3$에서 불연속이다.)

(2) $k-\frac{1}{4}=-3$인 경우

직선 $y=t$를 y축 방향으로 평행이동시키면서

직선 $y=t$와 함수 $h(x)$의 그래프의 교점의 개수를 관찰하자.



함수 $g(t)$의 방정식은

$$g(t)=\begin{cases} 1 & (t>k+2) \\ 2 & (t\le k+2) \end{cases}$$

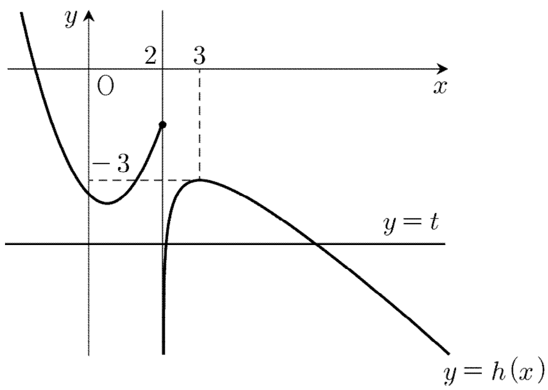
함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 1이다.

($t=k+2$에서 불연속이다.)

(3) $k-\frac{1}{4}<-3<k+2=h(2)$인 경우

직선 $y=t$를 y축 방향으로 평행이동시키면서

직선 $y=t$와 함수 $h(x)$의 그래프의 교점의 개수를 관찰하자.



함수 $g(t)$의 방정식은

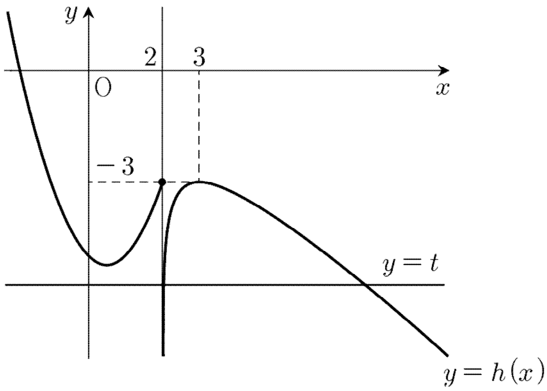
$$g(t)=\begin{cases} 1 & (t>k+2) \\ 2 & (-3<t\le k+2) \\ 3 & (t=-3) \\ 4 & \left(k-\frac{1}{4}<t<-3\right) \\ 3 & \left(t=k-\frac{1}{4}\right) \\ 2 & \left(t<k-\frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 3이다.

($t=k+2$, $t=-3$, $t=k-\frac{1}{4}$에서 불연속이다.)

(4) $h(2)=k+2=-3$인 경우

직선 $y=t$를 y축 방향으로 평행이동시키면서
직선 $y=t$와 함수 $h(x)$의 그래프의 교점의 개수를 관찰하자.



함수 $g(t)$의 방정식은

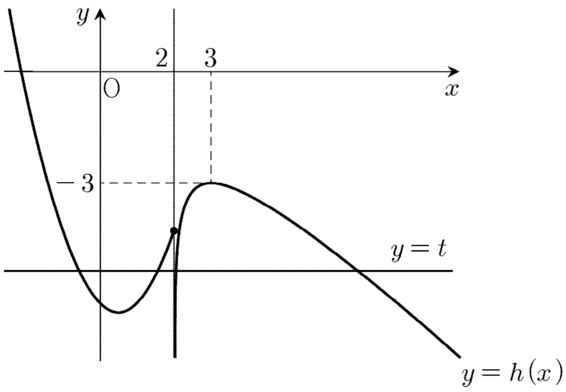
$$g(t)=\begin{cases} 1 & (t>-3) \\ 3 & (t=-3) \\ 4 & \left(k-\frac{1}{4}<t<-3\right) \\ 3 & \left(t=k-\frac{1}{4}\right) \\ 2 & \left(t<k-\frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 2이다.

($t=-3$, $t=k-\frac{1}{4}$에서 불연속이다.)

(5) $h(2)=k+2<-3$인 경우

직선 $y=t$를 y축 방향으로 평행이동시키면서
직선 $y=t$와 함수 $h(x)$의 그래프의 교점의 개수를 관찰하자.



함수 $g(t)$의 방정식은

$$g(t)=\begin{cases} 1 & (t>-3) \\ 2 & (t=-3) \\ 3 & (k+2<t<-3) \\ 4 & \left(k-\frac{1}{4}<t\le k+2\right) \\ 3 & \left(t=k-\frac{1}{4}\right) \\ 2 & \left(t<k-\frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 3이다.

($t=-3$, $t=k+2$, $t=k-\frac{1}{4}$에서 불연속이다.)

이상에서 (2)의 경우만이 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

$\therefore\ k=-\frac{11}{4}$

답 ④

[참고1]

구간 $(2,\ \infty)$에서 함수 $h(x)$의 이계도함수는

$h''(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}$

$h'(3)=0$, $h''(3)=-1<0$이므로, 함수 $h(x)$는 $x=3$에서 극댓값을 갖는다.

[풀이2]

구간 $(2,\ \infty)$에서 함수 $f(x)=\ln(x-2)$의 그래프에 접하고, 기울기가 1인 접선의 방정식을 구하자.

구간 $(2,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\frac{1}{x-2}$

접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라고 하자.(단, $t>2$)

접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=\frac{1}{t-2}=1$에서 $t=3$

접선은 기울기가 1이고, 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

접선의 방정식은

$y=x-3$ …Ⓐ

구간 $(-\infty,\ 2)$에서 함수 $f(x)=x^2+k$의 그래프의 접하고, 기울기가 1인 접선의 방정식을 구하자.

구간 $(-\infty,\ 2)$에서 함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(s,\ f(s))$라고 하자.(단, $s<2$)

접선의 기울기가 1이므로

$f'(s)=2s=1$에서 $s=\frac{1}{2}$

접선은 기울기가 1이고, 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}+k\right)$를 지나므로

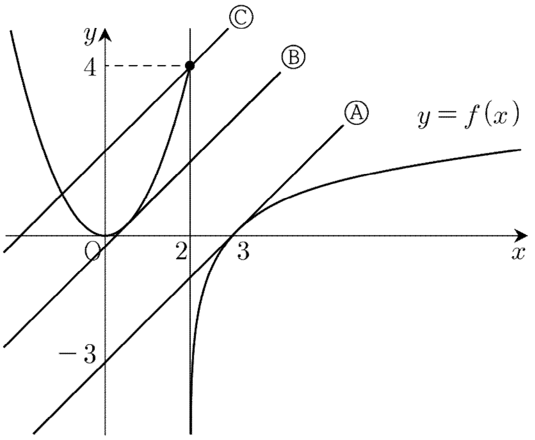
접선의 방정식은

$y=x+k-\frac{1}{4}$ …Ⓑ

기울기가 1이고, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ k+4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=x+k+2$ …Ⓒ

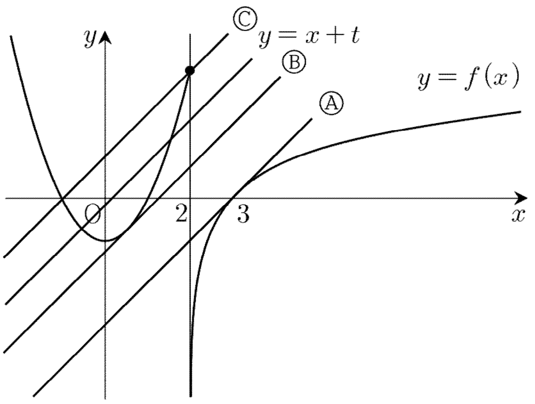
예를 들어 $k=0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 세 직선 Ⓐ, Ⓑ, Ⓒ를 한 평면 위에 모두 그리면 다음과 같다.



(1) $k-\dfrac{1}{4}>-3$인 경우 (즉, Ⓐ<Ⓑ<Ⓒ)

직선 $y=x+t$를 평행이동시키면서

직선 $y=x+t$와 함수 $f(x)$의 교점의 개수를 관찰하자.



함수 $g(t)$의 방정식은

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t>k+2)\\ 2 & \left(k-\dfrac{1}{4}<t\le k+2\right)\\ 1 & \left(t=k-\dfrac{1}{4}\right)\\ 0 & \left(-3<t<k-\dfrac{1}{4}\right)\\ 1 & (t=-3)\\ 2 & (t<-3)\end{cases}$$

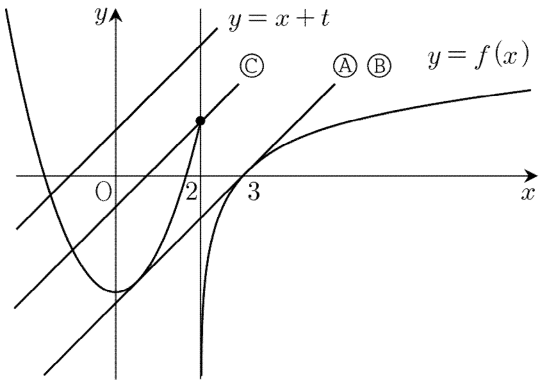
함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 3이다.

($t=k+2$, $t=k-\dfrac{1}{4}$, $t=-3$에서 불연속이다.)

(2) $k-\dfrac{1}{4}=-3$인 경우 (즉, Ⓐ=Ⓑ<Ⓒ)

직선 $y=x+t$를 평행이동시키면서

직선 $y=x+t$와 함수 $f(x)$의 교점의 개수를 관찰하자.



함수 $g(t)$의 방정식은

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t>k+2)\\ 2 & (t\le k+2)\end{cases}$$

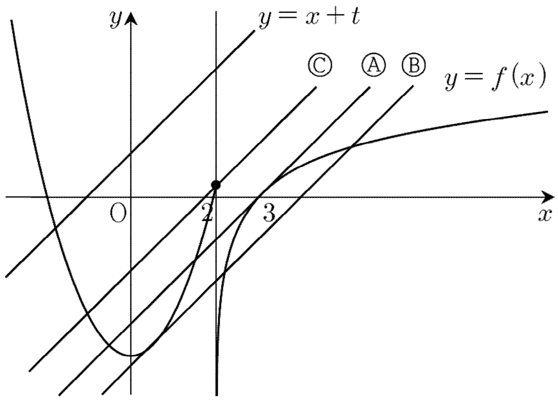
함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 1이다.

($t=k+2$에서 불연속이다.)

(3) $k-\dfrac{1}{4}<-3<k+2$인 경우 (즉, Ⓑ<Ⓐ<Ⓒ)

직선 $y=x+t$를 평행이동시키면서

직선 $y=x+t$와 함수 $f(x)$의 교점의 개수를 관찰하자.



함수 $g(t)$의 방정식은

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t>k+2)\\ 2 & (-3<t\le k+2)\\ 3 & (t=-3)\\ 4 & \left(k-\dfrac{1}{4}<t<-3\right)\\ 3 & \left(t=k-\dfrac{1}{4}\right)\\ 2 & \left(t<k-\dfrac{1}{4}\right)\end{cases}$$

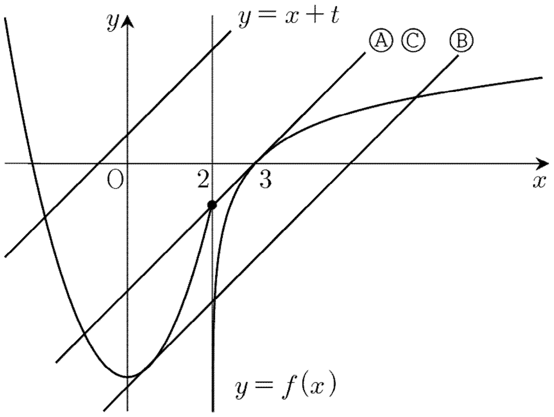
함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 3이다.

($t=k+2$, $t=-3$, $t=k-\dfrac{1}{4}$에서 불연속이다.)

(4) $k+2=-3$인 경우 (즉, Ⓑ<Ⓐ=Ⓒ)

직선 $y=x+t$를 평행이동시키면서

직선 $y=x+t$와 함수 $f(x)$의 교점의 개수를 관찰하자.



함수 $g(t)$의 방정식은

$$g(t)=\begin{cases} 1 & (t>-3) \\ 3 & (t=-3) \\ 4 & \left(k-\frac{1}{4}<t<-3\right) \\ 3 & \left(t=k-\frac{1}{4}\right) \\ 2 & \left(t<k-\frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

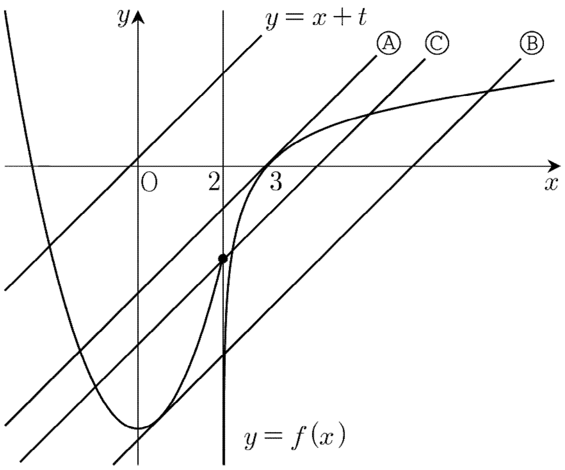
함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 2이다.

($t=-3$, $t=k-\frac{1}{4}$에서 불연속이다.)

(5) $k+2<-3$인 경우 (즉, Ⓑ<Ⓒ<Ⓐ)

직선 $y=x+t$를 평행이동시키면서

직선 $y=x+t$와 함수 $f(x)$의 교점의 개수를 관찰하자.



함수 $g(t)$의 방정식은

$$g(t)=\begin{cases} 1 & (t>-3) \\ 2 & (t=-3) \\ 3 & (k+2<t<-3) \\ 4 & \left(k-\frac{1}{4}<t\le k+2\right) \\ 3 & \left(t=k-\frac{1}{4}\right) \\ 2 & \left(t<k-\frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

함수 $g(t)$의 불연속점의 개수는 3이다.

($t=-3$, $t=k+2$, $t=k-\frac{1}{4}$에서 불연속이다.)

이상에서 (2)의 경우만이 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

$\therefore\ k=-\frac{11}{4}$

답 ④

[참고2]

구간 $(-\infty,\ 2)$에서 함수 $f(x)=x^2+k$의 그래프의 접하고, 기울기가 1인 접선의 방정식을 구하자.

접선의 방정식을 $y=x+a$로 두고, 함수 $f(x)$의 방정식과 연립하면

$x^2+k=x+a$

정리하면

$x^2-x+k-a=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(-1)^2-4(k-a)=0$ 즉, $a=k-\frac{1}{4}$

접선의 방정식은

$y=x+k-\frac{1}{4}$

17

[풀이]

(1) 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수가 같을 때, 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 확률을 p_1이라고 하자.

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수가 같을 확률은 수학적 확률의 정의에 의하여 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$이다.

동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 각각 2, 2일 확률은 독립시행의 확률의 정의에 의하여

${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$

확률의 곱셈정리에 의하여

$p_1=\frac{1}{6}\times{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{16}$

(2) 서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수가 다를 때, 동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 확률을 p_2라고 하자.

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수가 다를 확률은 여사건의 확률의 정의에 의하여 $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$이다.

동전의 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 각각 1,

1일 확률은 독립시행의 확률의 정의에 의하여

$${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1$$

확률의 곱셈정리에 의하여

$$p_2=\frac{5}{6}\times{}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{12}$$

구하는 확률을 p라고 하면 조건부 확률의 정의에 의하여

$$p=\frac{p_1}{p_1+p_2}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}+\frac{5}{12}}=\frac{3}{23}$$

답 ①

18

[풀이]

점 P의 시각 t에서의 위치를 $(x,\ y)$라고 하면

$$\frac{dx}{dt}=2t,\ \frac{dy}{dt}=2\pi\sin2\pi t$$

각각에 대한 부정적분을 구하면

$x=t^2+C_1,\ y=-\cos2\pi t+C_2$(단, $C_1,\ C_2$는 적분상수)

$t=0$일 때, $x=0+C_1=0,\ y=-1+C_2=-1$이므로

$C_1=0,\ C_2=0$

점 P의 시각 t에서의 위치는

$\mathrm{P}(t^2,\ -\cos2\pi t)$

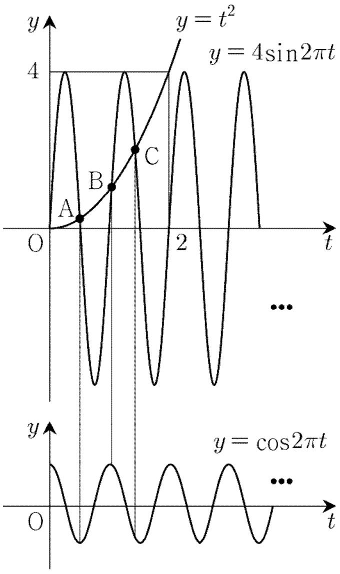
$t>0$일 때, 두 점 P, Q의 위치가 같다고 하면

$t^2=4\sin2\pi t,\ -\cos2\pi t=|\cos2\pi t|\ \Leftrightarrow$

$t^2=4\sin2\pi t,\ \cos2\pi t\le0,\ t>0$ $\cdots(*)$

($\because$ 실수 a에 대하여 $|a|=-a$이면 $a\le0$이다.)

이제 두 곡선 $y=t^2,\ y=4\sin2\pi t$의 교점의 개수를 구하자. (단, $t>0,\ \cos2\pi t\le0$)



위의 그림에서 두 함수

$y=4\sin2\pi t,\ y=\cos2\pi t$

의 주기는 모두 1이다.

$t>0$일 때, 두 곡선 $y=t^2,\ y=4\sin2\pi t$의 세 교점을 각각 A, B, C라고 하자.

그리고 세 점 A, B, C의 t좌표를 각각 $t_1,\ t_2,\ t_3$이라고 하면

$$0<t_1<\frac{1}{2},\ 1<t_2<\frac{5}{4},\ \frac{5}{4}<t_3<\frac{3}{2}$$

이때,

$\cos2\pi t_1<0,\ \cos2\pi t_2>0,\ \cos2\pi t_3<0$

이므로 방정식 $(*)$의 해집합은 $\{t_1,\ t_3\}$이다.

따라서 출발한 후 두 점 P, Q가 만나는 횟수는 2이다.

답 ②

19

[풀이]

$(x+a^2)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$a^2n(={}_nC_1(a^2)={}_nC_{n-1}(a^2))$이다.

$(x^2-2a)(x+a)^n=x^2(x+a)^n-2a(x+a)^n$에서

$x^2(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $\boxed{{}_nC_3}\times a^3$이고,

($\because$ $(x+a)^n$에서 x^{n-3}의 계수는 ${}_nC_3a^3(={}_nC_{n-3}a^3)$)

$2a(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $2a^2n$이다.

($\because$ $(x+a)^n$에서 x^{n-1}의 계수는 ${}_nC_1a(={}_nC_{n-1}a)$)

따라서 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$\boxed{{}_nC_3}\times a^3-2a^2n$

이다. 그러므로

$a^2n=\boxed{{}_nC_3}\times a^3-2a^2n$

이다. 이 식을 정리하면

$$a^2n=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\times a^3-2a^2n$$

양변을 양수 a^2n으로 나누면

$$1=\frac{(n-1)(n-2)}{6}\times a-2\ \text{즉},\ 3=\frac{(n-1)(n-2)}{6}\times a$$

양변을 $\frac{(n-1)(n-2)}{6}$으로 나누어

a를 n에 관한 식으로 나타내면

$$a=\frac{18}{\boxed{(n-1)(n-2)}}$$

이다.

$n=4$일 때, $a=\frac{18}{3\times2}=3$(자연수○)

$n=5$일 때, $a=\frac{18}{4\times3}=\frac{3}{2}$(자연수×)

$n=6$일 때, $a=\dfrac{18}{5\times4}=\dfrac{9}{10}<1$(자연수×)

$n=7$일 때, $a=\dfrac{18}{6\times5}=\dfrac{3}{5}<1$(자연수×)

⋮

$n\geq6$일 때, $(n-1)(n-2)\geq20$이고, $a<1$이므로

a는 자연수가 아니다.

여기서 a는 자연수이고 n은 4 이상의 자연수이므로

$n=\boxed{4}$

이다.

(가): ${}_n\mathrm{C}_3$, (나): $(n-1)(n-2)$, (다): 4

두 함수 $f(n)$, $g(n)$의 방정식은

$f(n)={}_n\mathrm{C}_3$, $g(n)=(n-1)(n-2)$

$\therefore\ f(4)+g(4)={}_4\mathrm{C}_3+3\times2=4+6=10$

답 ①

20

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3ae^{3x}+be^{x}$

함수 $f(x)$의 이계도함수는

$f''(x)=9ae^{3x}+be^{x}$

조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 변곡점을 찾자.

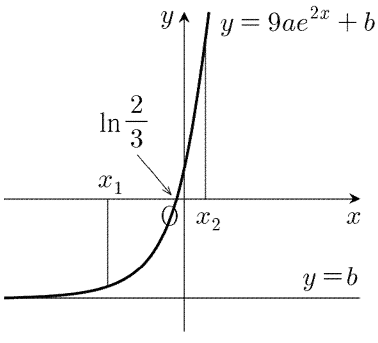
조건 (가)에서 주어진 서로 다른 두 수 x_1, x_2에 대하여

$f''(x_1)f''(x_2)=(9ae^{3x_1}+be^{x_1})(9ae^{3x_2}+be^{x_2})$

$=e^{x_1+x_2}(9ae^{2x_1}+b)(9ae^{2x_2}+b)<0$

$\Leftrightarrow\ (9ae^{2x_1}+b)(9ae^{2x_2}+b)<0\ (\because e^{x_1+x_2}>0)$

함수 $y=9ae^{2x}+b$의 그래프를 그리면



조건 (가)에서 주어진 부등식을 만족시키기 위해서는

$b<0$이어야 하고, 사이값 정리에 의하여

곡선 $y=9ae^{2x}+b$는 점 $\left(\ln\dfrac{2}{3},\ 0\right)$을 지나야 한다.

$0=9ae^{2\ln\frac{2}{3}}+b$

로그의 성질과 정의에 의하여

$0=9ae^{\ln\frac{4}{9}}+b$, $0=9a\times\dfrac{4}{9}+b$

즉, $b=-4a(b<0)$ …㉠

이제 조건 (가)에서 주어진 부등식을 다시 쓰면

$x_1<\ln\dfrac{2}{3}<x_2$일 때, $f''(x_1)<0$, $f''(x_2)>0$이다.

$x=\ln\dfrac{2}{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로

변곡점의 정의에 의하여 점 $\left(\ln\dfrac{2}{3},\ f\left(\ln\dfrac{2}{3}\right)\right)$는

함수 $f(x)$의 변곡점이다.

이제 함수 $f(x)$의 그래프를 그리자.

㉠에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=ae^{3x}-4ae^{x}(a>0)$

$f(0)=-3a$, $f(\ln2)=0$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는

두 점 $(0,\ -3a)$, $(\ln2,\ 0)$을 지난다.

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3ae^{3x}-4ae^{x}=ae^{x}(3e^{2x}-4)$

$f'(x)=0$에서 $x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$

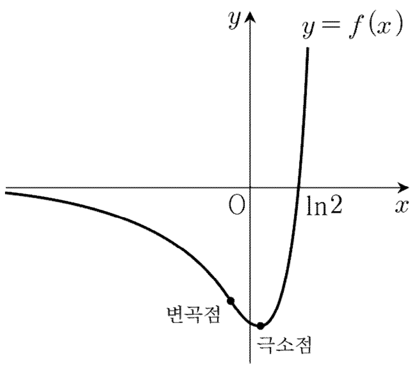
$x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$에서 극솟값을 갖는다.

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{a}{e^{3t}}-\frac{4a}{e^{t}}\right)=0$이므로

x축($y=0$)은 함수 $f(x)$의 점근선이다.

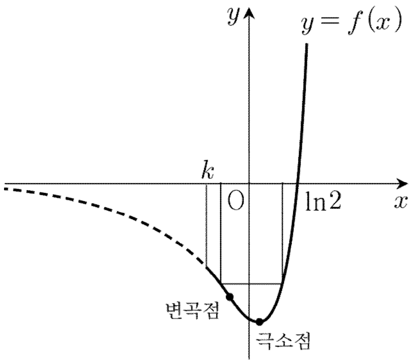
함수 $f(x)$의 그래프는



조건 (나)에 의하여

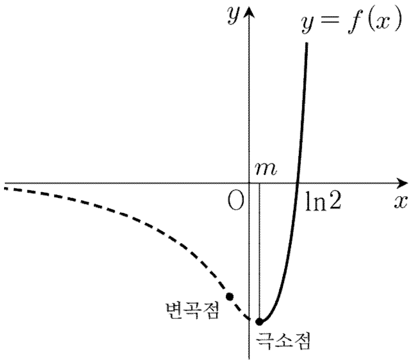
구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하기 위해서는

구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.



만약 $k<\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}=$(극소점의 x좌표)이면

구간 $[k,\ \infty)$에서 함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니다.



$k\ge\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}=$(극소점의 x좌표)이어야 하므로

$m=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$

로그의 정의와 성질에 의하여

$f(2m)=f\left(\ln\frac{4}{3}\right)=ae^{3\ln\frac{4}{3}}-4ae^{\ln\frac{4}{3}}$

$=ae^{\ln\frac{64}{27}}-4ae^{\ln\frac{4}{3}}$

$=a\times\frac{64}{27}-4a\times\frac{4}{3}=-\frac{80a}{27}=-\frac{80}{9}$

풀면

$a=3$

이를 ㉠에 대입하면

$b=-12$

$\therefore\ \ a+b=-9$

답 ③

21

[풀이1]

두 함수 $F(x)$, $G(x)$의 도함수는 각각

$F'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$, $G'(x)=\frac{g'(x)\sin x+g(x)\cos x}{g(x)\sin x}$

문제에서 주어진 두 등식 중에서 왼쪽 식을 다시 쓰면

$\lim_{x\to1}(x-1)F'(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f'(x)}{f(x)}=3$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f'(x)}{\frac{(x-1)f'(x)}{f(x)}}=\frac{0}{3}=0$

$f(x)$는 다항함수이므로

함수의 연속의 정의에 의하여

$f(1)=0$

인수정리에 의하여

$f(x)=(x-1)P_1(x)$

(단, $P_1(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수)

이를 문제에서 주어진 두 등식 중에서 왼쪽 식에 대입하여 정리하면

$\lim_{x\to1}(x-1)F'(x)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f'(x)}{f(x)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)P_1'(x)+P_1(x)}{P_1(x)}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{(x-1)P_1'(x)}{P_1(x)}+1\right\}=3$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)P_1'(x)}{P_1(x)}=2$ $\cdots$㉠

마찬가지의 방법으로 다음을 유도할 수 있다.

$P_1(x)=(x-1)P_2(x)$

(단, $P_2(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)P_2'(x)}{P_2(x)}=1$ $\cdots$㉡

마찬가지의 방법으로 다음을 유도할 수 있다.

$P_2(x)=(x-1)P_3(x)$

(단, $P_3(x)$는 최고차항의 계수가 1인 일차함수)

이를 ㉡에 대입하여 정리하면

$\lim_{x\to1}\frac{(x-1)P_3'(x)}{P_3(x)}=0$

$P_3(x)=x-\alpha$로 두면

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-\alpha}=0$

만약 $\alpha=1$이면

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-\alpha}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-1}=\lim_{x\to1}1=1$

이므로 $\alpha\ne1$이어야 한다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-1)^3(x-\alpha)$(단, $\alpha\ne1$)

문제에서 주어진 두 등식 중에서 오른쪽 식을 다시 쓰면

$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)g(x)\sin x}{f(x)(g'(x)\sin x+g(x)\cos x)}=\frac{1}{4}$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to0}f(x)(g'(x)\sin x+g(x)\cos x)$

$=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)g(x)\sin x}{\frac{f'(x)g(x)\sin x}{f(x)(g'(x)\sin x+g(x)\cos x)}}=\frac{0}{\frac{1}{4}}=0$

함수의 연속의 정의에 의하여

$f(0)(g'(0)\times0+g(0)\times1)=0$ 즉, $f(0)g(0)=0$

풀면

$f(0)=0$ 또는 $g(0)=0$

(1) $f(0)=0$인 경우($\alpha=0$)

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x(x-1)^3$

이를 문제에서 주어진 두 등식 중에서 오른쪽 식에 대입하여 정리하면

$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)g(x)\sin x}{f(x)(g'(x)\sin x+g(x)\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(4x-1)g(x)\frac{\sin x}{x}}{(x-1)(g'(x)\sin x+g(x)\cos x)}=\frac{1}{4}$ $\cdots$ ㉢

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to0}(x-1)(g'(x)\sin x+g(x)\cos x)$

$=\lim_{x\to0}\frac{(4x-1)g(x)\frac{\sin x}{x}}{\frac{(4x-1)g(x)\frac{\sin x}{x}}{(x-1)(g'(x)\sin x+g(x)\cos x)}}$

$=\frac{-g(0)}{\frac{1}{4}}=-4g(0)$

이고,

$\lim_{x\to0}(x-1)(g'(x)\sin x+g(x)\cos x)=-g(0)$

이므로 $-4g(0)=-g(0)$

즉, $g(0)=0$ (←혹은 귀류법에 의하여: [참고3])

인수정리에 의하여

$g(x)=xQ_1(x)$

(단, $Q_1(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)

이를 ㉢에 대입하여 정리하면

$\lim_{x\to0}\frac{4x-1}{x-1}\times\frac{Q_1(x)\frac{\sin x}{x}}{Q_1(x)\frac{\sin x}{x}+Q_1'(x)\sin x+Q_1(x)\cos x}$

$\left(=\frac{Q_1(0)}{2Q_1(0)}\right)=\frac{1}{4}$ $\cdots$ ㉣

마찬가지의 방법으로

$Q_1(0)=0$

(←혹은 귀류법에 의하여: [참고3]과 마찬가지의 방법으로)

인수정리에 의하여

$Q_1(x)=xQ_2(x)$

(단, $Q_2(x)$는 최고차항의 계수가 1인 일차함수)

이를 ㉣에 대입하여 정리하면

$\lim_{x\to0}\frac{4x-1}{x-1}$

$\times\frac{Q_2(x)\frac{\sin x}{x}}{2Q_2(x)\frac{\sin x}{x}+Q_2'\sin x+Q_2(x)\cos x}$

$\left(=\frac{Q_2(0)}{3Q_2(0)}\right)=\frac{1}{4}$

마찬가지의 방법으로

$Q_2(0)=0$

(←혹은 귀류법에 의하여: [참고3]과 마찬가지의 방법으로)

인수정리에 의하여

$Q_2(x)=x$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=x^3$

(2) $f(0)\neq0(\alpha\neq0)$이고 $g(0)=0$이라고 가정하자.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-1)^3(x-\alpha)(\alpha\neq0,\ \alpha\neq1)$

함수 $g(x)$의 방정식을

$g(x)=xR_1(x)$

(단, $R_1(x)$은 최고차항의 계수가 1인 이차함수)

이를 문제에서 주어진 두 등식 중에서 오른쪽 식에 대입하여 정리하면

$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)g(x)\sin x}{f(x)(g'(x)\sin x+g(x)\cos x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{4x-3\alpha-1}{(x-1)(x-\alpha)}$

$\times\frac{R_1(x)\sin x}{R_1(x)\frac{\sin x}{x}+R_1'(x)\sin x+R_1(x)\cos x}=\frac{1}{4}$

$\cdots$ ㉤

(1)에서와 마찬가지의 방법으로,

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$R_1(0)=0$

(←혹은 귀류법에 의하여: [참고3]과 마찬가지의 방법으로)

인수정리에 의하여

$R_1(x)=xR_2(x)$

(단, $R_2(x)$는 최고차항의 계수가 1인 일차함수)
이를 ㉤에 대입하여 정리하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-3\alpha-1}{(x-1)(x-\alpha)}\times\frac{R_2(x)\sin x}{2R_2(x)\frac{\sin x}{x}+R_2{}'(x)\sin x+R_2(x)\cos x}=\frac{1}{4}\quad\cdots㉥$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여
$R_2(0)=0$
(←혹은 귀류법에 의하여: [참고3]과 마찬가지의 방법으로)
인수정리에 의하여
$R_2(x)=x$
이를 ㉥에 대입하여 정리하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x-3\alpha-1}{(x-1)(x-\alpha)}\times\frac{\sin x}{3\frac{\sin x}{x}+\cos x}=0\neq\frac{1}{4}$$

이는 가정에 모순이다. 따라서 $f(0)=0$이다.
(1), (2)에서 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 방정식은
$f(x)=x(x-1)^3$, $g(x)=x^3$
$\therefore\ f(3)+g(3)=24+27=51$
답 ④

[참고1]
$f(1)=0$임을 알았을 때, $f(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가짐을 다음과 같이 보일 수도 있다.
$f'(1)\neq 0$이라고 가정하자.
문제에서 주어진 두 등식 중에서 왼쪽 식의 좌변을 변형하면

$$\lim_{x\to 1}(x-1)F'(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}=\frac{f'(1)}{f'(1)}=1\neq 3$$

이는 가정에 모순이므로, $f'(1)=0$이다.
따라서 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 가진다.

[참고2]
$f(1)=0$임을 알았을 때, $f(x)$가 $(x-1)^3$을 인수로 가짐을 다음과 같이 보일 수도 있다.
$f(x)=(x-1)^n S(x)$로 두자.
(단, n은 자연수이고, $S(x)$는 $x-1$을 인수로 갖지 않는다.)
이를 문제에서 주어진 두 등식 중에서 왼쪽 식에 대입하여 정리하면

$$\lim_{x\to 1}(x-1)F'(x)\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{nS(x)+(x-1)S'(x)}{S(x)}=\lim_{x\to 1}\left\{n+\frac{(x-1)S'(x)}{S(x)}\right\}=3\quad\cdots(*)$$

그런데 $S(1)\neq 0$이므로 $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)S'(x)}{S(x)}=0$이다.
함수의 극한에 대한 성질에 의하여
$(*)=n+0=3$ 즉, $n=3$
따라서 함수 $f(x)$는 $(x-1)^3$을 인수로 갖지만, $(x-1)^4$을 인수로 갖진 않는다.

[참고3]
$g(0)=0$임을 다음과 같이 보일 수도 있다.
만약 $g(0)\neq 0$이라고 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)g(x)\sin x}{f(x)(g'(x)\sin x+g(x)\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(4x-1)g(x)\frac{\sin x}{x}}{(x-1)(g'(x)\sin x+g(x)\cos x)}=\frac{g(0)}{g(0)}=1\neq\frac{1}{4}$$

이므로 가정에 모순이다. 따라서 $g(0)=0$이다.

[참고4]
$f(x)=x(x-1)^3$이고, $g(0)=0$임을 알았을 때,
$g(x)=x^3$임을 다음과 같이 보일 수도 있다.
$g(x)=x^nT(x)$로 두자.
(단, n은 자연수이고, $T(x)$는 x를 인수로 갖지 않는다.)
이를 문제에서 주어진 두 등식 중에서 오른쪽 식에 대입하여 정리하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)g(x)\sin x}{f(x)(g'(x)\sin x+g(x)\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x-1}{x-1}\times\frac{T(x)\frac{\sin x}{x}}{nT(x)\frac{\sin x}{x}+T'(x)\sin x+T(x)\cos x}=\frac{1}{n+1}=\frac{1}{4}$$

즉, $n=3$
함수 $g(x)$의 방정식은
$g(x)=x^3$

[참고5]
문제에서 주어진 두 등식 중에서 왼쪽 식에서 얻을 수 있

는 결과를 정리하면 다음과 같다.

$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)f'(x)}{f(x)} = 3$이면

사차함수 $f(x)$는 $(x-1)^3$을 인수로 갖지만,

$(x-1)^4$을 인수로 갖진 않는다.

함수 $f(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$f(x) = (x-1)^4 + a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d$

(단, a, b, c, d는 상수)

$h(x) = f(x+1)$로 두고, 위의 결과를 다시 정리하면

$\lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)} = 3$이면

사차함수 $h(x)$는 x^3을 인수로 갖지만,

x^4을 인수로 갖진 않는다.

[참고6]

[참고5]의 일반적인 경우를 생각하자.

$n(\geq 2)$차 다항함수 $h(x)$에 대하여

$\lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)} = k$

(단, $1 \leq k \leq n-1$인 자연수)

이면 함수 $h(x)$는 x^k을 인수로 갖지만,

x^{k+1}을 인수로 갖진 않는다.

(증명)

$h(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

(단, $n \geq 2$이고 $a_n \neq 0$)으로 두자.

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$

이므로

$\lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{na_n x^n + \cdots + ka_k x^k + \cdots + a_1 x}{a_n x^n + \cdots + a_k x^k + \cdots + a_1 x + a_0} \quad \cdots (*)$$

만약 $a_0 \neq 0$이면 $(*) = 0 \neq k$이므로 가정에 모순이다.

따라서 $a_0 = 0$이다. 이를 $(*)$에 대입하여 정리하면

$\lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{na_n x^{n-1} + \cdots + ka_k x^{k-1} + \cdots + a_1}{a_n x^{n-1} + \cdots + a_k x^{k-1} + \cdots + a_1}$$

만약 $a_1 \neq 0$이면 $(*) = 1 \neq k$이므로 가정에 모순이다.

따라서 $a_1 = 0$이다. 마찬가지의 방법으로

$a_2 = a_3 = \cdots = a_{k-1} = 0$임을 보일 수 있다.

이를 $(*)$에 대입하여 정리하면

$\lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{na_n x^{n-k} + \cdots + (k+1)a_{k+1}x + ka_k}{a_n x^{n-k} + \cdots + a_{k+1}x + a_k} = \frac{ka_k}{a_k} = k$$

이때, 귀류법에 의하여 $a_k \neq 0$이다.

함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x) = a_n x^n + \cdots + a_{k+1}x^{k+1} + a_k x^k$

$= x^k(a_n x^{n-k} + \cdots + a_{k+1}x + a_k)$

(단, $n \geq 2$, $a_n \neq 0$, $a_k \neq 0$)

$a_k \neq 0$이므로 함수 $h(x)$는 x^k을 인수로 갖지만,

x^{k+1}을 인수로 갖진 않는다.

[참고7]

n차 다항함수

$h(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

(단, n은 자연수이고, $a_n \neq 0$이다.)

에 대하여

$\lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)}$

가 가질 수 있는 값을 모두 구하자.

(풀이)

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$

이므로

$\lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{na_n x^n + \cdots + a_1 x}{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0} \quad \cdots (*1)$$

$a_0 \neq 0$이면 $(*1) = \frac{0}{a_0} = 0$이다.

$a_0 = 0$을 $(*1)$에 대입하여 정리하면

$\lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{na_n x^{n-1} + \cdots + 2a_2 x + a_1}{a_n x^{n-1} + \cdots + a_2 x + a_1} \quad \cdots (*2)$$

$a_1 \neq 0$이면 $(*2) = 1$이다.

$a_1 = 0$을 $(*2)$에 대입하여 정리하면

$\lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{na_n x^{n-2} + \cdots + 3a_3 x + 2a_2}{a_n x^{n-2} + \cdots + a_3 x + a_2} \quad \cdots (*3)$$

$a_2 \neq 0$이면 $(*3) = 2$이다.

$\vdots$

마찬가지의 방법으로

$1 \leq k \leq n$인 자연수 k에 대하여

$a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1} = 0$, $a_k \neq 0$

이면 $\lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)} = k$이다.

정리하면

$a_0 \neq 0$이면 $\lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)} = 0$

$a_0 = 0$이고,

함수 $h(x)$의 차수가 가장 낮은 항의 계수가 a_k

이면 $\lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)} = k$이다.

따라서 $\lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)}$가 가질 수 있는 값은 n 이하의 음이 아닌 정수이다.

즉, 0, 1, 2, $\cdots$, n

[풀이2]

※ [풀이1]~[참고7]을 모두 이해하면 아래와 같은 풀이도 가능합니다.

두 함수 $F(x)$, $G(x)$의 도함수는 각각

$F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$, $G'(x) = \frac{g'(x)\sin x + g(x)\cos x}{g(x)\sin x}$

두 함수 $f(x)$, $h(x)$의 방정식을 각각

$f(x) = (x-1)^4 + a(x-1)^3 + b(x-1)^2$
$+ c(x-1) + d$,

$h(x) = f(x+1) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

로 두자.

문제에서 주어진 두 등식 중에서 왼쪽 식을 다시 쓰면

$$\lim_{x \to 1}(x-1)F'(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4x^4 + 3ax^3 + 2bx^2 + cx}{x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d} \quad \cdots ㉠$$

만약 $d \neq 0$이면 ㉠$= 0 \neq 3$이므로 가정에 모순이다.

따라서 $d = 0$이다. 이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$㉠ = \lim_{x \to 0} \frac{4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c}{x^3 + ax^2 + bx + c} \quad \cdots ㉡$$

만약 $c \neq 0$이면 ㉡$= 1 \neq 3$이므로 가정에 모순이다.

따라서 $c = 0$이다. 이를 ㉡에 대입하여 정리하면

$$㉡ = \lim_{x \to 0} \frac{4x^2 + 3ax + 2b}{x^2 + ax + b} \quad \cdots ㉢$$

만약 $b \neq 0$이면 ㉢$= 2 \neq 3$이므로 가정에 모순이다.

따라서 $b = 0$이다. 이를 ㉢에 대입하여 정리하면

$$㉢ = \lim_{x \to 0} \frac{4x + 3a}{x + a} \quad \cdots ㉣$$

만약 $a = 0$이면 ㉣$= 4 \neq 3$이므로 가정에 모순이다.

따라서 $a \neq 0$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = (x-1)^4 + a(x-1)^3 = (x-1)^3(x-1+a)$

(단, $a \neq 0$)

위의 과정을 정리하면

함수 $h(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$에 대하여

$\lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)} = 3$

이면 $a \neq 0$, $b = c = d = 0$이다.

이제 다음과 같은 일반적인 명제를 생각하자.

「함수 $h(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$

(단, $a_n \neq 0$)에 대하여

$\lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)} = k$(단, $1 \leq k \leq n$인 자연수)

이면 $a_k \neq 0$, $a_{k-1} = a_{k-2} = \cdots = a_0 = 0$이다.

이때, $a_0 \neq 0$이면 $\lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)} = 0$이다.」

이 명제의 역도 성립한다. (←증명은 [참고7])

따라서 $\lim_{x \to 0} \frac{xh'(x)}{h(x)}$가 가질 수 있는 값은

n 이하의 음이 아닌 정수(0, 1, 2, $\cdots$, n)이다.

문제에서 주어진 두 등식 중에서 오른쪽 식을 다시 쓰면

$$\lim_{x \to 0} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)g(x)\sin x}{f(x)(g'(x)\sin x + g(x)\cos x)} = \frac{1}{4}$$

$\frac{\sin x}{x}$, $\frac{xf'(x)}{f(x)}$, $\frac{xg'(x)}{g(x)}$이 포함된 식으로 변형하면

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{xf'(x)}{f(x)}}{\frac{xg'(x)}{g(x)} + \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}} = \frac{1}{4} \quad \cdots (*)$$

함수 $f(x)$의 방정식이

$f(x) = (x-1)^3(x-1+a)$(단, $a \neq 0$)이므로

$\lim_{x \to 0} \frac{xf'(x)}{f(x)}$가 가질 수 있는 값은 0, 1이다.

만약 $\lim_{x \to 0} \frac{xf'(x)}{f(x)} = 0$이라고 하면

$(*)$의 좌변이 0이므로 가정에 모순이다.

따라서 $\lim_{x \to 0} \frac{xf'(x)}{f(x)} \neq 0$ 즉, $\lim_{x \to 0} \frac{xf'(x)}{f(x)} = 1$이다.

함수 $f(x)$의 상수항은 0이므로

(즉, 함수 $f(x)$는 x를 인수로 가지므로)

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = x(x-1)^3$

삼차함수 $g(x)$에 대하여

$\lim_{x \to 0} \frac{xg'(x)}{g(x)}$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

그런데 $\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}=1$이므로

(*)에서 함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)}{g(x)}=3$

함수 $g(x)$의 상수항, x의 계수, x^2의 계수가 모두 0이므로

(즉, 함수 $g(x)$는 x^3을 인수로 가지므로)

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=x^3$

$\therefore\ f(3)+g(3)=24+27=51$

답 ④

[참고8]

다음과 같은 방법으로 함수 $f(x)$의 방정식을 구해도 좋다.

함수 $F(x)$의 도함수는

$F'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$

만약 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이라고 가정하면

$\lim_{x\to 1}(x-1)F'(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f'(x)}{f(x)}=0\neq 3$

이므로 가정에 모순이다.

따라서 $f(x)=0$인 x가 적어도 하나 존재한다.

$f(\alpha)=0$이라고 하면

$f(x)=(x-\alpha)\times$(최고차항의 계수가 1인 삼차함수)

그런데 최고차항의 계수가 1인 삼차함수의 그래프는

x축과 적어도 하나 이상의 점에서 만나므로

인수정리에 의하여

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)$

(단, $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)

○ 방정식 $Q(x)=0$이 허근을 갖는 경우

함수 $F(x)$의 방정식은

$F(x)=\ln|x-\alpha|+\ln|x-\beta|+\ln|Q(x)|$

(단, 모든 실수 x에 대하여 $Q(x)>0$이다.)

함수 $F(x)$의 도함수는

$F'(x)=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{Q'(x)}{Q(x)}$

문제에서 주어진 두 등식 중에서 왼쪽 식을 다시 쓰면

$\lim_{x\to 1}(x-1)F'(x)$

$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{x-1}{x-\alpha}+\frac{x-1}{x-\beta}+\frac{(x-1)Q'(x)}{Q(x)}\right\}=3\ \cdots$ ㉠

그런데

$\alpha=1$이면 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\alpha}=1$, $\alpha\neq 1$이면 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\alpha}=0$,

$\beta=1$이면 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\beta}=1$, $\beta\neq 1$이면 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\beta}=0$,

$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)Q'(x)}{Q(x)}=0$

이므로 ㉠에서 주어진 등식은 성립하지 않는다.

○ 방정식 $Q(x)=0$이 중근을 갖는 경우

$Q(\gamma)=0$일 때, 함수 $F(x)$의 방정식은

$F(x)=\ln|x-\alpha|+\ln|x-\beta|+2\ln|x-\gamma|$

함수 $F(x)$의 도함수는

$F'(x)=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{2}{x-\gamma}$

문제에서 주어진 두 등식 중에서 왼쪽 식을 다시 쓰면

$\lim_{x\to 1}(x-1)F'(x)$

$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{x-1}{x-\alpha}+\frac{x-1}{x-\beta}+\frac{2(x-1)}{x-\gamma}\right\}=3\qquad\cdots$ ㉡

그런데

$\alpha=1$이면 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\alpha}=1$, $\alpha\neq 1$이면 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\alpha}=0$,

$\beta=1$이면 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\beta}=1$, $\beta\neq 1$이면 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\beta}=0$,

$\gamma=1$이면 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\gamma}=1$, $\gamma\neq 1$이면 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\gamma}=0$

이므로 ㉡에서 주어진 등식이 성립하기 위해서는

$\alpha=1$, $\beta\neq 1$, $\gamma=1$ 또는 $\alpha\neq 1$, $\beta=1$, $\gamma=1$

이어야 한다. 이때, 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-1)^3(x-k)$(단, $k\neq 1$)

○ 방정식 $Q(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우

$Q(\gamma)=Q(\delta)=0$(단, $\gamma\neq\delta$)일 때,

함수 $F(x)$의 방정식은

$F(x)=\ln|x-\alpha|+\ln|x-\beta|+\ln|x-\gamma|+\ln|x-\delta|$

함수 $F(x)$의 도함수는

$F'(x)=\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}+\frac{1}{x-\gamma}+\frac{1}{x-\delta}$

문제에서 주어진 두 등식 중에서 왼쪽 식을 다시 쓰면

$\lim_{x\to 1}(x-1)F'(x)$

$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{x-1}{x-\alpha}+\frac{x-1}{x-\beta}+\frac{x-1}{x-\gamma}+\frac{x-1}{x-\delta}\right\}=3\ \cdots$ ㉢

그런데

$\alpha=1$이면 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\alpha}=1$, $\alpha\neq 1$이면 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\alpha}=0$,

$\beta=1$이면 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\beta}=1$, $\beta\neq 1$이면 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\beta}=0$,

$\gamma=1$이면 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\gamma}=1$, $\gamma\neq 1$이면 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x-\gamma}=0$

$\delta=1$이면 $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-\delta}=1$, $\delta\neq1$이면 $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x-\delta}=0$

이므로 ㉡에서 주어진 등식이 성립하기 위해서는

α, β, γ, δ 중에서 세 수는 1, 나머지 한 수는 1이 아니어야 한다.

이때, 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-1)^3(x-k)$(단, $k\neq1$)

(1), (2), (3)에서 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-1)^3(x-k)$(단, $k\neq1$)

[참고9]

$f(x)=x(x-1)^3$일 때, 다음과 같은 방법으로 함수 $g(x)$의 방정식을 구해도 좋다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x(x-1)^3$

이를 문제에서 주어진 두 등식 중에서 오른쪽 식에 대입하여 정리하면

$$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)g(x)\sin x}{f(x)(g'(x)\sin x+g(x)\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(4x-1)g(x)\frac{\sin x}{x}}{(x-1)(g'(x)\sin x+g(x)\cos x)}=\frac{1}{4}$$

귀류법에 의하여 $g(0)=0$이다. ($\because$ [참고3])

함수 $g(x)$의 방정식을 다음과 같이 두자.

$g(x)=x(x^2+ax+b)$

이를 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)g(x)\sin x}{f(x)(g'(x)\sin x+g(x)\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x-1}{x-1}$$

$$\times\frac{(x^2+ax+b)\frac{\sin x}{x}}{\left\{(3x^2+2ax+b)\frac{\sin x}{x}+(x^2+ax+b)\cos x\right\}}$$

$$\left(=\frac{b}{2b}\right)=\frac{1}{4}$$

만약 $b\neq0$이면 위의 등식이 성립하지 않으므로

귀류법에 의하여 $b=0$이다.

이를 다시 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)g(x)\sin x}{f(x)(g'(x)\sin x+g(x)\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4x-1}{x-1}$$

$$\times\frac{(x+a)\frac{\sin x}{x}}{\left\{(3x+2a)\frac{\sin x}{x}+(x+a)\cos x\right\}}$$

$$\left(=\frac{a}{3a}\right)=\frac{1}{4}$$

만약 $a\neq0$이면 위의 등식이 성립하지 않으므로

귀류법에 의하여 $a=0$이다.

따라서 함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=x^3$

22

[풀이]

조합의 수에 의하여

$${}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{1\times2}=15$$

($\because$ $0\leq r\leq n$일 때, ${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$)

답 15

23

[풀이]

$y=x^r$(r은 유리수)의 도함수의 공식(역함수의 미분법)과 합성함수의 미분법에 의하여

함수 $f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

$$\therefore\ f'(2)=\frac{12}{6}=2$$

답 2

24

[풀이]

정적분의 치환적분법에 의하여

$$k=\int_2^4 2e^{2x-4}dx=\left[e^{2x-4}\right]_2^4=e^4-1$$

로그의 정의에 의하여

$\therefore\ \ln(k+1)=4$

답 4

25

[풀이]

문제에서 주어진 직선 위의 점을 $(x,\ y)$로 두면

$(x,\ y)=(6,\ 3)+t(2,\ 3)$ (단, t는 실수)

이 직선의 방정식을 매개변수 t로 나타내면

$x=6+2t$, $y=3+3t$

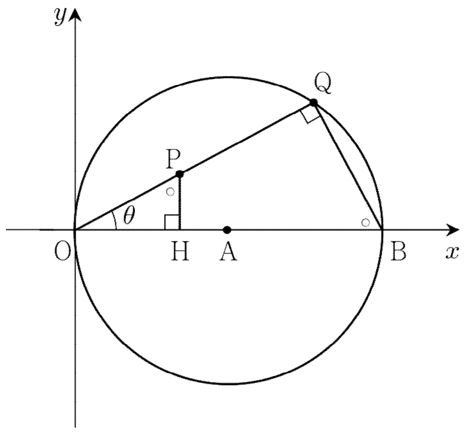
$y=0$일 때, $t=-1$이고 $x=4$이므로

점 A의 좌표는 A$(4,\ 0)$

$x=0$일 때, $t=-3$이고 $y=-6$이므로
점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(0,\ -6)$
두 점 사이의 거리 공식에 의하여
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}^2=4^2+6^2=52$
답 52

26

[풀이1]
문제에서 주어진 원이 x축과 만나는 두 점 중에서 원점이 아닌 점을 B, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{\mathrm{OB}}$는 문제에서 주어진 원의 지름이므로
원주각과 중심각 사이의 관계에 의하여

$$\angle\mathrm{BQO}=\frac{\pi}{2}$$

삼각형의 세 내각의 합은 π이므로
두 직각삼각형 OPH와 OBQ에 대하여

$$\angle\mathrm{OPH}=\angle\mathrm{OBQ}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

따라서 두 삼각형 OPH와 OBQ는 AA닮음이다.
직각삼각형 OBQ에서 삼각비의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{BO}}\cos\theta=2\cos\theta$
직각삼각형 OPH의 빗변의 길이를 구하면
$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}=2\cos\theta-1$
직각삼각형 OPH에서 삼각비의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OP}}\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta$
선분 PH의 길이가 점 P의 y좌표이므로
점 P의 y좌표를 $f(\theta)$로 두면

$$f(\theta)=2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$$

함수 $f(\theta)$의 도함수는
$f'(\theta)=2\cos^2\theta-2\sin^2\theta-\cos\theta$
$=4\cos^2\theta-\cos\theta-2\,(\because \sin^2\theta=1-\cos^2\theta)$
$\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$
함수 $f(\theta)$의 이계도함수는
$f''(\theta)=-8\cos\theta\sin\theta+\sin\theta$
$\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$
$f'(\theta)=0$으로 두고 $\cos\theta$에 대한 이차방정식을 풀자.
$0<\theta<\frac{\pi}{3}$일 때, $\frac{1}{2}<\cos\theta<1$이므로
이차방정식의 근의 공식에 의하여

$$\cos\theta=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$$

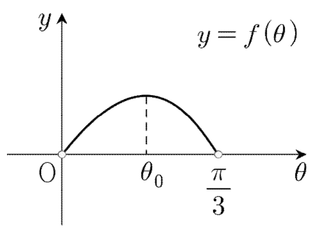
이때,

$$\frac{1}{2}<\frac{3}{4}=\frac{1+\sqrt{25}}{8}<\frac{1+\sqrt{33}}{8}<\frac{1+\sqrt{36}}{8}=\frac{7}{8}<1$$

$\cos\theta$가 $\frac{1-\sqrt{33}}{8}$의 값을 가질 수 없는 이유는

$$-\frac{5}{8}=\frac{1-\sqrt{36}}{8}<\frac{1-\sqrt{33}}{8}<\frac{1-\sqrt{25}}{8}=-\frac{1}{2}$$

$\cos\theta=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$인 θ의 값을 θ_0라고 하자.
$f''(\theta_0)=\sin\theta_0(1-8\cos\theta_0)=-\sqrt{33}\sin\theta_0<0$
$\left(\because 0<\theta_0<\frac{\pi}{3}\text{일 때, } \sin\theta_0>0\right)$
$f'(\theta_0)=0,\ f''(\theta_0)<0$이므로
함수 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_0$일 때, 극댓값을 갖는다.
그런데 $\lim_{\theta\to0+}f(\theta)=0,\ \lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}-}f(\theta)=0$이므로
함수 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_0$일 때, 최댓값을 갖는다.

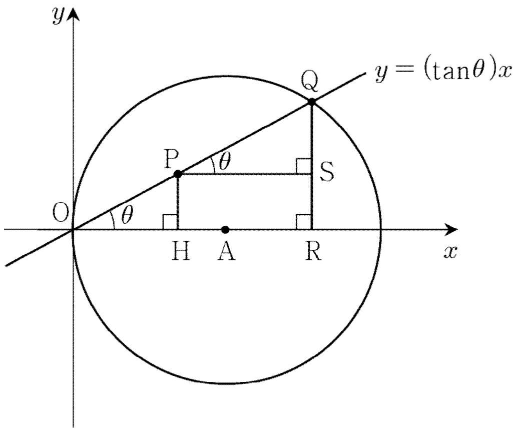


$\therefore\ a=1,\ b=33,\ a+b=34$
답 34

[참고1]
아래와 같은 방법으로 선분 PH의 길이를 구해도 좋다.
직각삼각형 OBQ에서 삼각비의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{OB}}\sin\theta=2\sin\theta,\ \overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{BO}}\cos\theta=2\cos\theta$
직각삼각형 OPH의 빗변의 길이를 구하면
$\overline{\mathrm{OP}}=\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}=2\cos\theta-1$
서로 닮은 두 삼각형 OPH와 OBQ에 대하여
$\overline{\mathrm{OP}}:\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{OB}}:\overline{\mathrm{BQ}}$

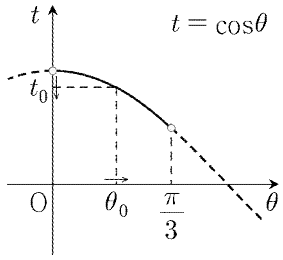
즉, $(2\cos\theta-1):\overline{\mathrm{PH}}=2:2\sin\theta$
정리하면
$\overline{\mathrm{PH}}=$(점 P의 y좌표)$=2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta$

[참고2]
점 P의 y좌표를 다음과 같이 구할 수도 있다.
두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, R, 점 P에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 S라고 하자.

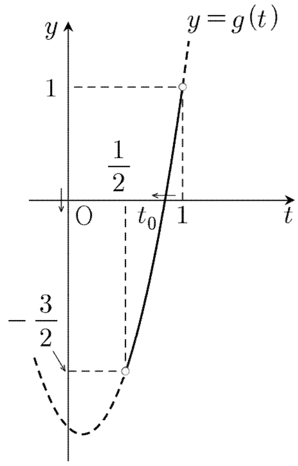


문제에서 주어진 원의 방정식은
$(x-1)^2+y^2=1$
과 직선 OQ의 방정식은
$y=(\tan\theta)x$
이 원과 직선의 방정식을 연립하면
$(x-1)^2+(\tan^2\theta)x^2=1$
좌변을 전개하여 정리하면
$(\sec^2\theta)x^2-2x=0$ ($\because \sec^2\theta=1+\tan^2\theta$)
좌변을 인수분해하면
$x(x\sec^2\theta-2)=0$
$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$일 때, $\sec\theta\neq0$이므로
이 이차방정식을 풀면
$x=0$ 또는 $x=2\cos^2\theta$($\because \cos\theta=\dfrac{1}{\sec\theta}$)
점 Q의 x좌표는 $2\cos^2\theta$이다.
이를 직선 OQ의 방정식에 대입하면
$y=2\cos\theta\sin\theta$
따라서 점 Q의 좌표는
$\mathrm{Q}(2\cos^2\theta,\ 2\cos\theta\sin\theta)$ 즉, $\overline{\mathrm{QR}}=2\cos\theta\sin\theta$
직각삼각형 QPS에서 삼각비의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{QS}}=\overline{\mathrm{PQ}}\sin\theta=\sin\theta$
이므로
$\overline{\mathrm{SR}}=\overline{\mathrm{QR}}-\overline{\mathrm{QS}}=2\cos\theta\sin\theta-\sin\theta$
직사각형 PHRS에서
$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{SR}}=2\cos\theta\sin\theta-\sin\theta$
점 P의 y좌표는 $2\cos\theta\sin\theta-\sin\theta$이다.

[참고3]
이계도함수를 이용하지 않고(즉, 도함수만을 이용하여), 함수 $f(\theta)$가 $\theta=\theta_0$에서 극댓값을 가짐을 보이자.
$\cos\theta=t$, $g(t)=f'(\theta)$로 두면
$g(t)=4t^2-t-2$(단, $\dfrac{1}{2}<t<1$)
그리고 $t_0=\cos\theta_0$로 두자. 이때, θ_0에 대하여 t_0는 유일하게 결정된다. (아래 그림)
두 함수 $t=\cos\theta$, $y=g(t)$의 그래프는

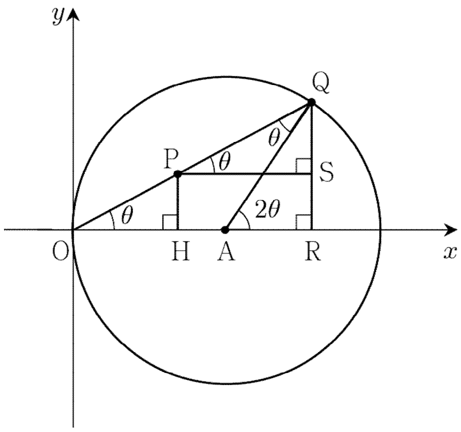


위의 그림처럼 θ가 θ_0 보다 작은 값을 갖다 큰 값을 갖도록 변하면, t는 t_0 보다 큰 값을 갖다 작은 값을 갖도록 변한다.



위의 그림처럼 t가 t_0 보다 큰 값을 갖다 작은 값을 갖도록 변하면, $g(t)$는 양수에서 음수로 바뀐다.
요컨대 $\theta=\theta_0$의 좌우에서 $f'(\theta)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로, 함수 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_0$에서 극댓값을 갖는다.

[풀이2] ※ 삼각함수의 배각의 공식을 이용한 풀이입니다. (교육과정 외)
두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H, R, 점 P에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 S라고 하자.



원의 정의에 의하여

$\overline{OA}=\overline{AQ}$

이등변삼각형 OAQ에서

$\angle AQO=\theta(=\angle AOQ)$

삼각형 OAQ의 꼭짓점 A에서의 외각은

$\angle QAR=2\theta$

두 직각삼각형 QAR과 QPS에서

삼각비의 정의에 의하여

$\overline{QR}=\overline{AQ}\sin 2\theta=\sin 2\theta$, $\overline{QS}=\overline{PQ}\sin\theta=\sin\theta$

이므로

$\overline{SR}=\overline{QR}-\overline{QS}=\sin 2\theta-\sin\theta$

직사각형 PHRS에서

$\overline{PH}=\overline{SR}=\sin 2\theta-\sin\theta$

점 P의 y좌표를 $f(\theta)$로 두면

$f(\theta)=\sin 2\theta-\sin\theta$(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$)

함수 $f(\theta)$의 도함수는

$f'(\theta)=2\cos 2\theta-\cos\theta$

$=4\cos^2\theta-\cos\theta-2$(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$)

($\because$ 삼각함수의 배각의 공식)

함수 $f(\theta)$의 이계도함수는

$f''(\theta)=-8\cos\theta\sin\theta+\sin\theta$

(단, $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$)

$f'(\theta)=0$으로 두고 $\cos\theta$에 대한 이차방정식을 풀자.

$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$일 때, $\dfrac{1}{2}<\cos\theta<1$이므로

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$

이때,

$\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{4}=\dfrac{1+\sqrt{25}}{8}<\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}<\dfrac{1+\sqrt{36}}{8}=\dfrac{7}{8}<1$

$\cos\theta$가 $\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}$의 값을 가질 수 없는 이유는

$-\dfrac{5}{8}=\dfrac{1-\sqrt{36}}{8}<\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}<\dfrac{1-\sqrt{25}}{8}=-\dfrac{1}{2}$

$\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$인 θ의 값을 θ_0라고 하자.

$f''(\theta_0)=\sin\theta_0(1-8\cos\theta_0)=-\sqrt{33}\sin\theta_0<0$

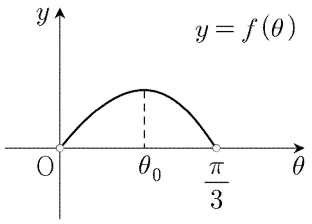
($\because 0<\theta_0<\dfrac{\pi}{3}$일 때, $\sin\theta_0>0$)

$f'(\theta_0)=0$, $f''(\theta_0)<0$이므로

함수 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_0$일 때, 극댓값을 갖는다.

그런데 $\lim\limits_{\theta\to 0+}f(\theta)=0$, $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{3}-}f(\theta)=0$이므로

함수 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_0$일 때, 최댓값을 갖는다.



$\therefore$ $a=1$, $b=33$, $a+b=34$

답 34

27

[풀이1]

문제에서 주어진 집합의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 조합의 수에 의하여

${}_5C_2=\dfrac{5\times 4}{1\times 2}=10$

이 10개의 부분집합 중에서 임의로 선택한 두 집합은 서로 같지 않다.

따라서 구하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

${}_{10}C_2=\dfrac{10\times 9}{1\times 2}=45$

답 45

[참고]

문제에서 주어진 집합의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 부분집합을 모두 쓰면 다음과 같다.

$\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$

$\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$,

$\{3, 4\}$, $\{3, 5\}$,

$\{4, 5\}$

[풀이2]

문제에서 주어진 집합의 부분집합 중 원소의 개수가 2인

부분집합의 개수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_2(=10)$이다. 이 10개의 집합 중에서 임의로 2개의 집합을 선택한다고 하자.

(1) 선택된 두 집합의 교집합의 원소의 개수가 0인 경우 (즉, 교집합이 공집합인 경우)

예를 들어, 선택된 두 집합이 각각 $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 5\}$인 경우이다.

1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 두 개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_2$이다. 예를 들어 1, 3을 선택하였을 때, 남은 2, 4, 5 중에서 서로 다른 두 개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_3C_2$이다. 예를 들어 2, 5를 선택하였다고 하자. 이때, $\{1,\ 3\}\to\{2,\ 5\}$의 순서대로 선택하는 경우와 $\{2,\ 5\}\to\{1,\ 3\}$의 순서대로 선택하는 경우가 중복되므로 ${}_5C_2\times{}_3C_2$를 순열의 수 $2!(={}_2P_2)$로 나누어 주어야 한다.

경우의 수는 조합의 수, 곱의 법칙, 순열의 수에 의하여

$$\frac{{}_5C_2\times{}_3C_2}{2!}=15$$

(2) 선택된 두 집합의 교집합의 원소의 개수가 1인 경우 (즉, 교집합이 공집합이 아닌 경우)

예를 들어, 선택된 두 집합이 각각 $\{1,\ 3\}$, $\{3,\ 4\}$인 경우이다.

1, 2, 3, 4, 5 중에서 '선택된 두 집합의 교집합의 원소가 될' 한 개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_1$이다. 예를 들어 3을 선택하였을 때, 남은 1, 2, 4, 5 중에서 한 개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_1$이다. 예를 들어 1을 선택하였을 때 ($\{1,\ 3\}$), 남은 2, 4, 5 중에서 한 개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_3C_1$이다. 예를 들어 4를 선택하였다고 하자.($\{3,\ 4\}$) 이때, $\{1,\ 3\}\to\{3,\ 4\}$의 순서대로 선택하는 경우와 $\{3,\ 4\}\to\{1,\ 3\}$의 순서대로 선택하는 경우가 중복되므로 ${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_1$을 순열의 수 $2!(={}_2P_2)$로 나누어 주어야 한다.

경우의 수는 조합의 수, 곱의 법칙, 순열의 수에 의하여

$$\frac{{}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_1}{2!}=30$$

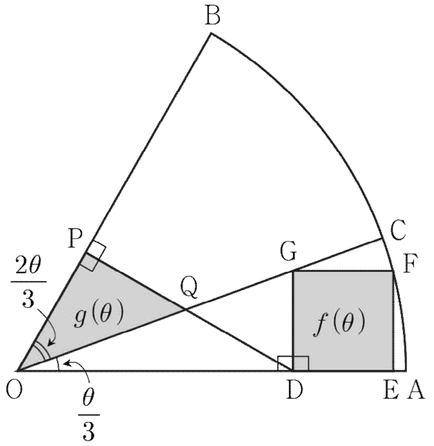
(1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로,
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$$\frac{{}_5C_2\times{}_3C_2}{2!}+\frac{5\times{}_4C_1\times{}_3C_1}{2!}=15+30=45$$

답 45

28

[풀이]



정사각형 DEFG의 한 변의 길이를 $x(\theta)$로 두자.

직각삼각형 ODG에서 삼각비의 정의에 의하여

$$\overline{OD}=\frac{\overline{DG}}{\tan\frac{\theta}{3}}=\frac{x(\theta)}{\tan\frac{\theta}{3}}$$

직각삼각형 DOP에서 삼각비의 정의에 의하여

$$\overline{OP}=\overline{DO}\cos\theta=\frac{x(\theta)\cos\theta}{\tan\frac{\theta}{3}}$$

직각삼각형 OPQ에서 삼각비의 정의에 의하여

$$\overline{PQ}=\overline{OP}\tan\frac{2\theta}{3}=\frac{x(\theta)\cos\theta\tan\frac{2\theta}{3}}{\tan\frac{\theta}{3}}$$

사각형과 삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$f(\theta)=\{x(\theta)\}^2$,

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\overline{OP}\,\overline{PQ}=\frac{\{x(\theta)\}^2\cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}}{2\tan^2\frac{\theta}{3}}$$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$k=\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\tan^2\frac{\theta}{3}}{\theta\cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\cos\frac{2\theta}{3}}{\cos^2\theta\cos^2\frac{\theta}{3}}\times\frac{\sin^2\frac{\theta}{3}}{\theta\sin\frac{2\theta}{3}}$$

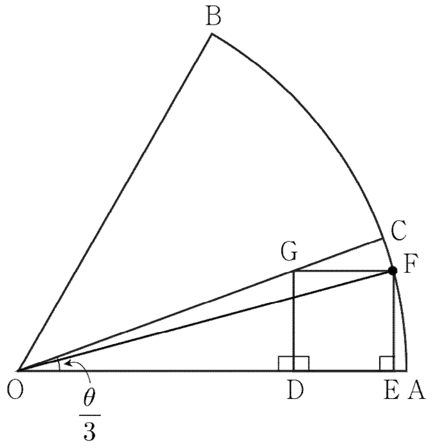
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\cos\frac{2\theta}{3}}{3\cos^2\theta\cos^2\frac{\theta}{3}}\times\left(\frac{\sin\frac{\theta}{3}}{\frac{\theta}{3}}\right)^2\times\frac{1}{\frac{\sin\frac{2\theta}{3}}{\frac{2\theta}{3}}}$$

$$=\frac{1}{3}\times1^2\times\frac{1}{1}=\frac{1}{3}$$

$\therefore\ 60k=20$

답 20

[참고1]
문제에서 주어진 조건인 ‘반지름의 길이가 1’을 이용하여 함수 $x(\theta)$의 방정식을 구하자.



정사각형 DEFG의 한 변의 길이를 $x(\theta)$로 두자.
직각삼각형 ODG에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OD}}=\dfrac{\overline{\mathrm{DG}}}{\tan\frac{\theta}{3}}=\dfrac{x(\theta)}{\tan\frac{\theta}{3}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{OE}}=\dfrac{x(\theta)}{\tan\frac{\theta}{3}}+x(\theta)$

직각삼각형 OEF에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{OF}}^2=\overline{\mathrm{OE}}^2+\overline{\mathrm{EF}}^2$
대입하면

$$1^2=\left\{\frac{x(\theta)}{\tan\frac{\theta}{3}}+x(\theta)\right\}^2+\{x(\theta)\}^2$$

정리하면

$$x(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\left(\cot\frac{\theta}{3}+1\right)^2+1}}$$

[참고2]
k의 값을 다음과 같은 방법으로 구해도 좋다.

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1$이므로

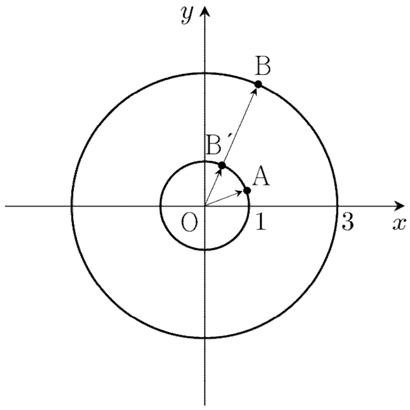
$$k=\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta\times g(\theta)}=\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\tan^2\frac{\theta}{3}}{\theta\cos^2\theta\tan\frac{2\theta}{3}}$$

$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{1}{3\cos^2\theta}\times\left(\frac{\tan\frac{\theta}{3}}{\frac{\theta}{3}}\right)^2\times\frac{1}{\frac{\tan\frac{2\theta}{3}}{\frac{2\theta}{3}}}$$

$$=\frac{1}{3}\times 1^2\times\frac{1}{1}=\frac{1}{3}$$

29

[풀이1]



중심이 원점인 단위원 위의 점 B′에 대하여
$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$
라고 하자. 그리고
$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$, $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$
라고 하자.
조건 (가)에서 주어진 등식에서
$3\vec{b}\cdot\vec{p}=3\vec{a}\cdot\vec{p}$
정리하면
$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\vec{p}=0$ 즉, $\overrightarrow{\mathrm{AB'}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$
두 벡터가 서로 수직일 필요충분조건에 의하여
$\overline{\mathrm{AB'}}\perp\overline{\mathrm{OP}}$ …㉠
벡터의 뺄셈의 정의에 의하여
$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{p}-\vec{a}$,
$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{p}-3\vec{b}$
이므로, 조건 (나)에서 주어진 등식에서
$|\vec{a}-\vec{p}|^2+|3\vec{b}-\vec{p}|^2=20$
벡터의 내적의 성질에 의하여
$|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}-6\vec{b}\cdot\vec{p}+2|\vec{p}|^2$
$=20$ …㉡
벡터의 내적의 성질에 의하여
$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-3\vec{b})$
$=|\vec{p}|^2-\vec{a}\cdot\vec{p}-3\vec{b}\cdot\vec{p}+3\vec{a}\cdot\vec{b}$ …㉢
㉡에서

$$|\vec{p}|^2-\vec{a}\cdot\vec{p}-3\vec{b}\cdot\vec{p}=10-\frac{|\vec{a}|^2+9|\vec{b}|^2}{2}$$

이를 ㉢에 대입하여 정리하면

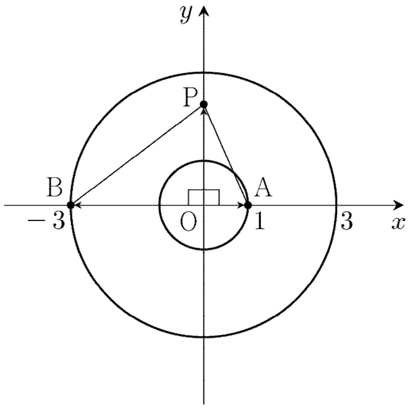
$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=10-\frac{|\vec{a}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2}{2}$$

$$=10-\frac{|\vec{a}-3\vec{b}|^2}{2}=10-\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2}{2}\geq 10-\frac{4^2}{2}=2$$

(단, 등호는 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$의 방향이 정반대일 때 성

립한다.)

따라서 $m=2$이다.



위의 그림처럼 두 점 A, B의 좌표를 각각

A$(1,\ 0)$, B$(-3,\ 0)$

으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

㉠에서 두 직선 AB(AB$'$), OP가 서로 수직이므로

점 P는 y축 위에 있다.

이때, 점 P의 좌표를 P$(0,\ t)$로 두고, $t>0$인 경우만을 생각해도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

조건 (나)에서

$|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2$

$=1^2+t^2+3^2+t^2=10+2t^2=20$

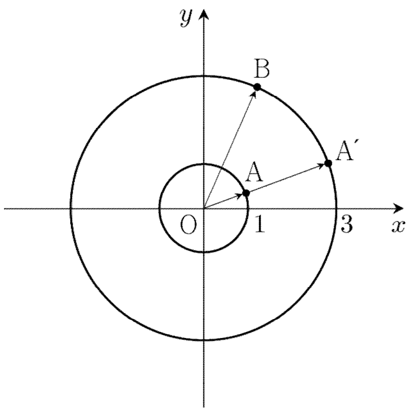
풀면 $t^2=5$

따라서 $k^2=t^2=5$이다.

$\therefore\ m+k^2=7$

답 7

[풀이2]



중심이 원점이고 반지름의 길이가 3인 원 위의 점 A$'$에 대하여

$\overrightarrow{OA'}=3\overrightarrow{OA}$

라고 하자. 이를 조건 (가)에서 주어진 등식에 대입하여 정리하면

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OP}$

벡터의 내적의 성질에 의하여

$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA'})\cdot\overrightarrow{OP}=0$ 즉, $\overrightarrow{A'B}\cdot\overrightarrow{OP}=0$

두 벡터가 서로 수직일 필요충분조건에 의하여

$\overline{A'B}\perp\overline{OP}$ …(*)

벡터의 내적의 성질에 의하여

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}|^2$

$=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$

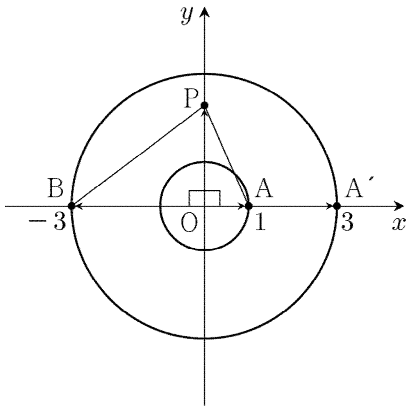
$=20-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ ($\because$ 조건 (나))

위의 등식을 다시 쓰면

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=10-\frac{|\overrightarrow{AB}|^2}{2}\geq 10-\frac{4^2}{2}=2$$

(단, 등호는 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$의 방향이 정반대일 때 성립한다.)

따라서 $m=2$이다.



위의 그림처럼 두 점 A, B의 좌표를 각각

A$(1,\ 0)$, B$(-3,\ 0)$

으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

(*)에서 두 직선 AB(A$'$B), OP가 서로 수직이므로

점 P는 y축 위에 있다.

이때, 점 P의 좌표를 P$(0,\ t)$로 두고, $t>0$인 경우만을 생각해도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

조건 (나)에서

$|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2$

$=1^2+t^2+3^2+t^2=10+2t^2=20$

풀면 $t^2=5$

따라서 $k^2=t^2=5$이다.

$\therefore\ m+k^2=7$

답 7

[참고]

다음과 같은 두 경우를 살펴보자.

$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA}|^2=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$

$=20-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$

에서

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 10 - \dfrac{|\overrightarrow{AB}|^2}{2}$ $\cdots$ ㉠

$|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}|^2 = |\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$

$= 20 + 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$

에서

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \dfrac{|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}|^2}{2} - 10$ $\cdots$ ㉡

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$가 최솟값을 갖기 위해서는

㉠의 경우: 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기가 최대여야 한다.

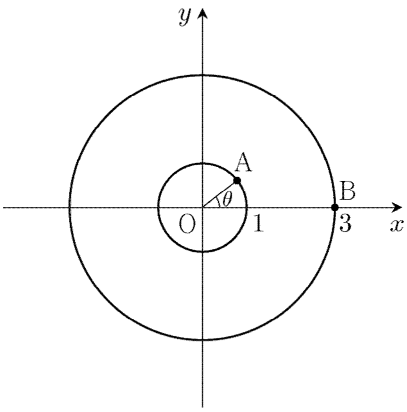
점 A의 위치를 고정시킨 상태에서, 점 B의 위치만을 결정하면 된다. 즉, 1개의 점의 위치만을 결정한다. (마치 한 변수 함수를 다루는 것과 같다.)

㉡의 경우: 벡터 $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}$의 크기가 최소여야 한다.

점 A의 위치를 고정시킨 상태에서, 두 점 B, P의 위치를 결정해야 한다. 즉, 2개의 점의 위치를 결정해야 한다. (마치 두 변수 함수를 다루는 것과 같다.)

[풀이2]에서 ㉡이 아닌 ㉠을 사용한 이유이다.

[풀이3]



점 B의 좌표를 B$(3,\ 0)$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

두 점 A, P의 좌표를 각각

A$(\cos\theta,\ \sin\theta)$, P$(x,\ y)$

로 두자. (단, $0 \le \theta < 2\pi$)

조건 (가)에서 주어진 등식은

$(x,\ y) \cdot (3 - 3\cos\theta,\ -3\sin\theta) = 0$

성분으로 주어진 벡터의 내적을 하면

$x(1 - \cos\theta) - y\sin\theta = 0$ $\cdots$ ㉠

조건 (나)에서 주어진 등식은

$(x - \cos\theta)^2 + (y - \sin\theta)^2 + (x - 3)^2 + y^2 = 20$

좌변을 전개하여 정리하면

$x^2 + y^2 - (3 + \cos\theta)x - y\sin\theta = 5$ $\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$x^2 + y^2 - 4x = 5$ 즉, $(x - 2)^2 + y^2 = 3^2$ $\cdots$ ㉢

점 P는 중심이 $(2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 3인 원 위에 있다.

성분에 의한 벡터의 내적을 하면

$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = (x - \cos\theta,\ y - \sin\theta) \cdot (x - 3,\ y)$

$= x^2 - (3 + \cos\theta)x + 3\cos\theta + y^2 - y\sin\theta$

$= x^2 - 4x + 3\cos\theta + y^2$ ($\because$ ㉠)

$= (x - 2)^2 + y^2 + 3\cos\theta - 4$

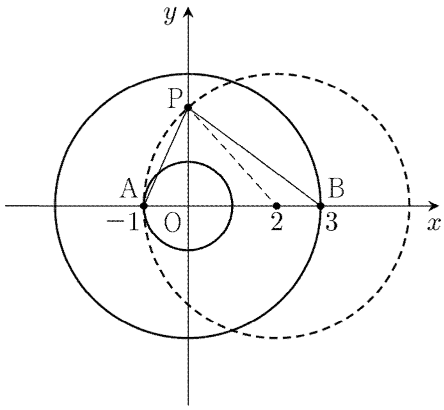
$= 5 + 3\cos\theta$ ($\because$ ㉢)

≥ 2

(단, 등호는 $\theta = \pi$일 때 성립한다.

이때, 점 A의 좌표는 A$(-1,\ 0)$이다.)

따라서 $m = 2$이다.



㉠에 $\theta = \pi$를 대입하면 $2x - 0 \times y = 0$ 즉, $x = 0$

이를 ㉢에 대입하면 $(-2)^2 + y^2 = 3^2$ 즉, $y = \pm\sqrt{5}$

점 P의 좌표는 P$(0,\ \pm\sqrt{5})$이므로 $k = \sqrt{5}$

$\therefore\ m + k^2 = 7$

답 7

30

[풀이]

적분과 미분의 관계에 의하여

$g'(x) = f(x)$

조건 (가)에 의하여

미분가능한 함수 $g(x)$가 $x = 1$에서 극값을 가지므로

$g'(1) = f(1) = \ln 2 - c = 0$ 즉, $c = \ln 2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = \ln(x^4 + 1) - \ln 2$

이제 함수 $f(x)$의 그래프를 그리자.

$f(-x) = f(x)$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

$f(0) = -\ln 2$, $f(-1) = f(1) = 0$이므로

함수 $f(x)$의 그래프는 세 점

$(-1,\ 0)$, $(0,\ -\ln 2)$, $(1,\ 0)$을 지난다.

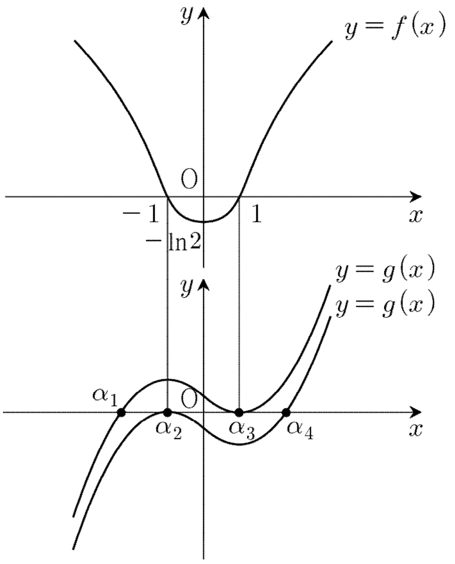
함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=\dfrac{4x^3}{x^4+1}$, $f'(x)=0$이면 $x=0$

$x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 갖는다.

$f(x)$는 $g(x)$의 도함수이므로 $f(x)$의 오목과 볼록, 변곡점에 대해서는 생각하지 않아도 좋다.

함수 $f(x)$의 그래프를 그리고, 그 아래에 'x축과 만나는 점의 개수가 2가 되도록' 함수 $g(x)$의 그래프를 그리자.



함수 $g(x)$의 그래프는 점 $(0,\ g(0))$에 대하여 대칭이다. (←[참고1])

문제에서 주어진 등식에서

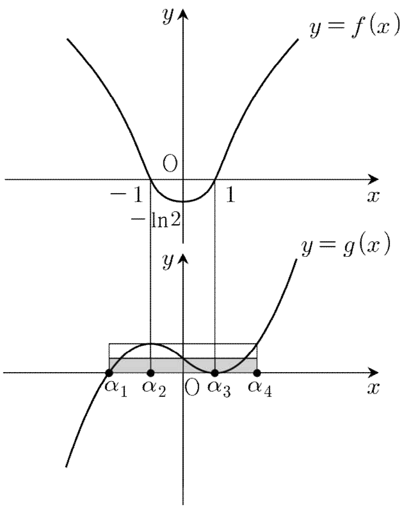
$$g(a)=\int_a^a f(t)dt=0$$

이므로 함수 $g(x)$는 $(a,\ 0)$을 지난다.

위의 그림에서 상수 a가 가질 수 있는 값은

α_1, $\alpha_2(=-1)$, $\alpha_3(=1)$, $\alpha_4(=-\alpha_1)$

이므로, $m=4$이다. 이제 문제에서 주어진 조건대로 α_1을 상수 a의 값으로 결정하자. 함수 $g(x)$의 그래프는



위의 그림에서 어두운 부분은 네 직선 $x=\alpha_1$, $x=\alpha_4$, $y=0$, $y=g(0)$으로 둘러싸인 직사각형이다.

함수 $g(x)$는 점 $(0,\ g(0))$에 대하여 대칭이므로

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx$$

$=$(어두운 직사각형의 넓이)

$=(\alpha_4-\alpha_1)g(0)=2\alpha_4 g(0)$ $\cdots$㉠

미적분의 기본정리에 의하여

$$k\alpha_m\int_0^1 |f(x)|dx=k\alpha_4\int_0^1(-f(x))dx$$

$=k\alpha_4[-g(x)]_0^1=k\alpha_4(g(0)-g(1))$

$=k\alpha_4 g(0)$ ($\because g(1)=g(\alpha_3)=0$) $\cdots$㉡

문제에서 주어진 조건에 의하여

㉠=㉡: $2\alpha_4 g(0)=k\alpha_4 g(0)$

$\alpha_4\neq 0$, $g(0)\neq 0$이므로 $k=2$이다.

로그의 정의에 의하여

$\therefore\ mk\times e^c=4\times 2\times e^{\ln 2}=16$

답 16

[참고1]

함수 $g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ g(0))$에 대칭임을 보이자.

정적분의 성질에 의하여

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_a^0 f(t)dt$$

함수 $h(x)=\int_0^x f(t)dt$의 그래프가 원점에 대하여 대칭임을 보이자.

$-X=t$로 두면 $-dX=dt$이고,

$t=0$일 때, $X=0$, $t=-x$일 때, $X=x$

정적분의 치환적분법에 의하여

$$\int_0^{-x} f(t)dt=\int_0^x(-f(-X))dX$$

$=-\int_0^x f(X)dX$ ($\because f(x)$는 y축에 대하여 대칭)

$=-\int_0^x f(t)dt$

즉, $h(-x)=-h(x)$이므로 함수 $h(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

함수 $h(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 $\int_a^0 f(t)dt$ $(=g(0))$ 만큼 평행이동시키면 함수 $g(x)$의 그래프와 일치하므로, 함수 $g(x)$의 그래프는 점 $(0,\ g(0))$에 대칭이다.

[참고2]

함수 $g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ g(0))$에 대칭임을 보이자.
함수 $f(x)$에 대하여
$f(-x)=f(x)$
부정적분을 하면
$\int f(-x)dx=\int f(x)dx+C$(단, C는 적분상수)
그런데 $g(x)$의 도함수가 $f(x)$이므로
$-g(-x)=g(x)+C$
$x=0$을 대입하여 정리하면 $C=-2g(0)$이므로
$-g(-x)=g(x)-2g(0)$
정리하면
$\frac{g(x)+g(-x)}{2}=g(0)$
함수 $g(x)$의 그래프는 점 $(0,\ g(0))$에 대하여 대칭이다.

[참고3]
$\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=2\alpha_4 g(0)$임을 아래와 같이 보일 수도 있다.
함수 $g(x)$의 그래프가 점 $(0,\ g(0))$에 대하여 대칭이므로
함수 $g(x)-g(0)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
정적분의 성질과 미적분의 기본정리에 의하여
$\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx$
$=\int_{\alpha_1}^{\alpha_4}\{g(x)-g(0)+g(0)\}dx$
$=\int_{\alpha_1}^{\alpha_4}\{g(x)-g(0)\}dx+\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(0)dx$
$=0+(\alpha_4-\alpha_1)g(0)=2\alpha_4 g(0)(\because \alpha_1=-\alpha_4)$

[참고4]
$\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)dx=2\alpha_4 g(0)$임을 아래와 같이 보일 수도 있다.
함수 $g(x)$의 그래프는 점 $(0,\ g(0))$에 대하여 대칭이므로
$\frac{g(x)+g(-x)}{2}=g(0)$($\because$ [참고2])
이제 아래와 같은 등식을 생각하자.
$\int_{\alpha_1}^{\alpha_4}\frac{g(x)+g(-x)}{2}dx=\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(0)dx$
정적분의 성질에 의하여
$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx+\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(-x)dx=\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(0)dx$
$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx-\frac{1}{2}\int_{-\alpha_1}^{-\alpha_4} g(t)dt=(\alpha_4-\alpha_1)g(0)$
($\because$ 정적분의 치환적분법)
$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx+\frac{1}{2}\int_{-\alpha_4}^{-\alpha_1} g(t)dt=2\alpha_4 g(0)$
$(\because -\alpha_1=\alpha_4)$
$\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx+\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(t)dt=2\alpha_4 g(0)$
$(\because -\alpha_1=\alpha_4,\ -\alpha_4=\alpha_1)$
$\therefore\ \int_{\alpha_1}^{\alpha_4} g(x)dx=2\alpha_4 g(0)$