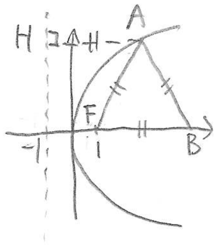
☑ 2020 수특 기벡 변형

1. 이차곡선

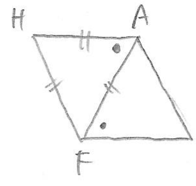
★★☆

5p 예제 1 – 포물선 성질

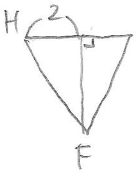
포물선 $y^2=4x$의 초점을 F라 하자. 포물선 위의 점 A와 x축 위의 점 B에 대해 삼각형 AFB가 정삼각형일 때, $\overline{\mathrm{OB}}$의 값을 구하시오. (단, 점 A의 x좌표는 1보다 크다.)



$\Longrightarrow$



△HAF도 정삼각형.



$\rightarrow \overline{HA}=4,\ \overline{FB}=4.\ \overline{OB}=1+4=\boxed{5}$.

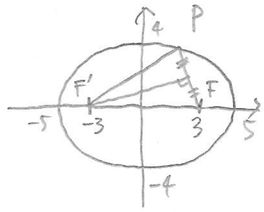
★★

7p 예제 2 – 타원, 피타고라스

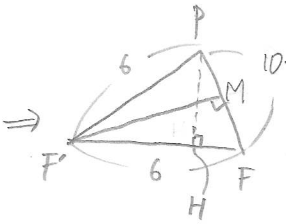
타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F′이라 하자. 제1사분면에 있는 타원 위의 점 P에 대하여 삼각형 PFF′이 이등변삼각형일 때, 점 P의 y좌표의 값은?

① $\dfrac{7\sqrt{2}}{3}$　② $\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$　③ $3\sqrt{2}$

④ $\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$　⑤ $\dfrac{11\sqrt{2}}{3}$



$\Longrightarrow$



$10-6=4$

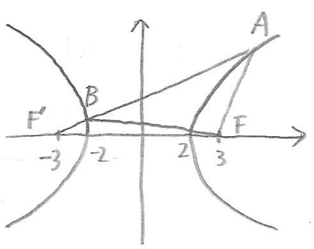
$\overline{F'M}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$.

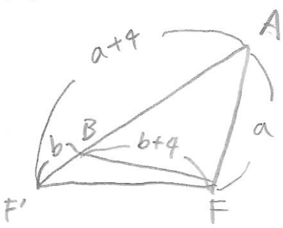
$\triangle PF'F$ 넓이 $=\frac{1}{2}\times\overline{PF}\times\overline{F'M}=\frac{1}{2}\times\overline{F'F}\times\overline{PH}.\ \Longrightarrow\ \overline{PH}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

★☆

9p 예제 3, 14p 기본 7 – 쌍곡선, 삼각형

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F′이라 하자. 제1사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 A에 대하여 선분 AF′이 쌍곡선과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 삼각형 ABF의 둘레의 길이가 20일 때, $\overline{\mathrm{AF}}$의 값을 구하시오.





$\Longrightarrow \overline{AB}+\overline{BF}+\overline{FA}=(a+4-b)+(b+4)+a=2a+8$

$=20,$

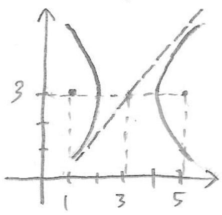
$a=\boxed{6}$.

★

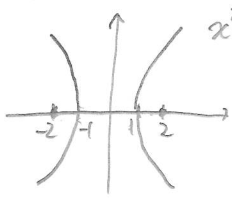
11p 예제 4 – 이차곡선 평행이동

두 초점이 F(1, 3), F′(5, 3)이고 주축의 길이가 2인 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=ax+b$ $(a>0)$일 때, $3a+b$의 값을 구하시오.

$y=a(x-3)+3$



$\Longrightarrow$ 중심 원점으로



$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1.$

$\therefore$ 점근선 기울기 $\pm\sqrt{3}$.

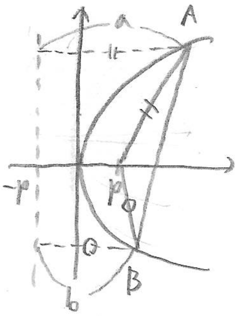
$\rightarrow y=\sqrt{3}x-3\sqrt{3}+3,$

$3a+b=\boxed{3}$.

★★

13p 기본 2 - 포물선, 무게중심

초점이 F인 포물선 $y^2=4px\,(p>0)$가 있다. 이 포물선 위에 있는 서로 다른 두 점 A, B에 대하여 $\overline{AF}+\overline{BF}=20$이고 삼각형 AFB의 무게중심의 x좌표가 6일 때, 상수 p의 값을 구하시오.



무게중심 x : $\frac{(a-p)+(b-p)+p}{3}=6$

$a+b-p=18$,

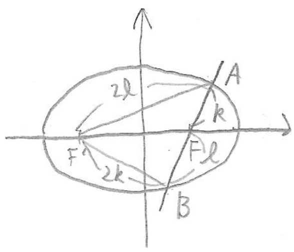
$a+b=20$이므로 $p=\boxed{2}$.

★★★

13p 기본 4 - 타원, 삼각형

두 초점이 F, F′인 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$이 있다. 점 F를 지나는 직선이 이 타원과 만나는 두 점을 A, B라 할 때, $\frac{\overline{BF'}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{AF'}}{\overline{BF}}=2$이다. $\frac{a^2}{b^2}$의 값은?

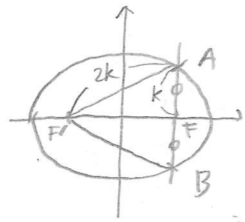
① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$



$2l+k=2k+l$

$\Rightarrow k=l$.

$\Rightarrow$



$\overline{AF'}+\overline{AF}=3k=2a$, $k=\frac{2}{3}a$.

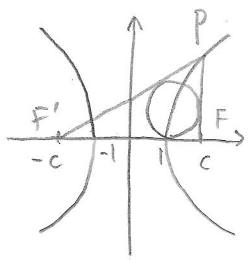
$\overline{F'F}=\sqrt{3}k=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$, $\overline{OF}=\frac{\sqrt{3}}{3}a=\sqrt{a^2-b^2}$.

$\therefore b^2=\frac{2}{3}a^2$, $\frac{a^2}{b^2}=\frac{3}{2}$.

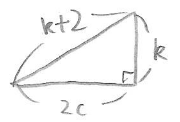
★★★

14p 기본 8 - 쌍곡선, 내접원

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P와 이 쌍곡선의 두 초점 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$ $(c>0)$에 대하여 $\angle PFF'=\frac{\pi}{2}$이고, 삼각형 PF′F의 내접원의 반지름의 길이는 1이다. $10c$의 값을 구하시오.

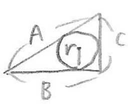


$\Rightarrow$



$(k+2)^2=k^2+4c^2 \rightarrow c^2=k+1$

내접원 반지름 공식 $\rightarrow$ $k+(k+2)+2c=k\cdot 2c$, $k+c+1=kc$

(*  $\rightarrow$ 삼각형 넓이 $=\frac{1}{2}r(A+B+C)$)

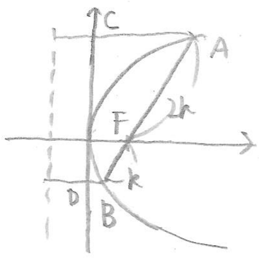
$k+1=(k-1)c$, $(k+1)^2=(k-1)^2\cdot(k+1)$

$k^2-3k=0$, $k=3$ $\therefore c=2$, $10c=\boxed{20}$.

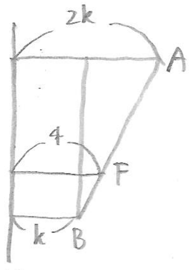
★★

15p 실력 1 - 포물선, 사다리꼴

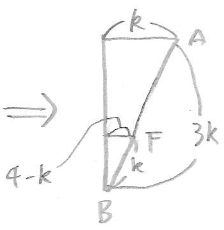
포물선 $y^2=8x$의 초점 F를 지나는 직선이 이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, B에서 y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{AF}=2\overline{BF}$일 때, 사각형 CDBA의 둘레의 길이는 $a+b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)



$\Rightarrow$

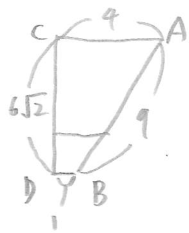


$\Rightarrow$



닮음 $\rightarrow$ $k:3k=4-k:k$, $k=3$.

$A(4, 4\sqrt{2})$, $B(1, -2\sqrt{2})$



$\therefore a+b\sqrt{2}=14+6\sqrt{2}$,

$a+b=\boxed{20}$.

2. 평면 곡선의 접선

★★★☆

25p 기본 2 - 근과 계수 또는 역함수

곡선 $\sin y = x \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ 위에 있는 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$에서의 접선의 기울기를 각각 m_1, m_2라 하자. $(x_1)^2, (x_2)^2$이 이차방정식 $9x^2-9x+1=0$의 서로 다른 두 근일 때, $\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)^2 = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

$\cos y \cdot y' = 1$, $y' = \frac{1}{\cos y}$ → $\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \cos y_1 + \cos y_2$.

$x_1^2 = \sin^2 y_1 = 1-\cos^2 y_1$, $x_2^2 = \sin^2 y_2 = 1-\cos^2 y_2$

두근합 $1 = 2 - \cos^2 y_1 - \cos^2 y_2$ → $\cos^2 y_1 + \cos^2 y_2 = 1$.

두근곱 $\frac{1}{9} = 1 - \cos^2 y_1 - \cos^2 y_2 + \cos^2 y_1 \cos^2 y_2$ → $\cos^2 y_1 \cos^2 y_2 = \frac{1}{9}$

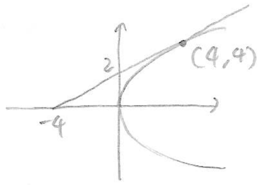
$\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \to \cos y > 0\right)$ → $\cos y_1 \cos y_2 = \frac{1}{3}$

∴ $\cos^2 y_1 + 2\cos y_1 \cos y_2 + \cos^2 y_2 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. $\boxed{8}$

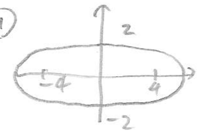
★★★

25p 기본 3 - 이차곡선 접선

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(4, 4)$에서의 접선 l이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$의 한 초점과 한 꼭짓점을 지날 때, 가능한 모든 a^2+b^2의 값의 합을 구하시오.

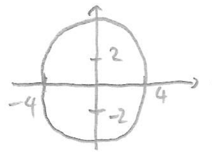


①



⇒ $a^2=20$, $b^2=4$

②



⇒ $a^2=16$, $b^2=20$

$24+36=\boxed{60}$.

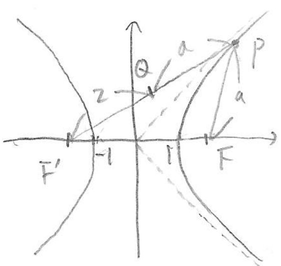
★★★★☆

26p 실력 1 - 점 자취 추론

쌍곡선 $x^2-y^2=1$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F′이라 하자. 쌍곡선 위의 x좌표가 양수인 점 P에 대하여 직선 F′P 위의 점 Q가 $\overline{PQ}=\overline{PF}$를 만족시킬 때, 점 Q가 나타내는 도형을 C라 하자. 쌍곡선 위의 점 $\mathrm{A}(a, b)$에서의 접선이 도형 C와 만나지 않게 하는 실수 a의 최솟값은?

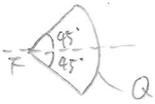
① $-\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{6}}{2}$ ③ -1

④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

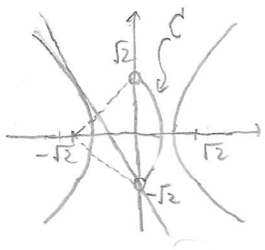


⇒ Q는 중심이 F′, 반지름이 2인 원의 일부.

점근선이 $y=\pm x$이므로,



← 이만큼만 그려짐.



⇒ 접선이 $(0, \pm\sqrt{2})$를 지날 때 a가 최소.

(a, b)에서의 접선 $ax-by=1$에 $(0, \sqrt{2})$ 대입

→ $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$a^2-b^2=1$로부터 $a^2=\frac{3}{2}$, $a=-\frac{\sqrt{6}}{2}$.

★★☆

26p 실력 4 - 매개변수, 기울기 최소

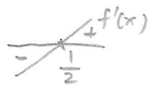
매개변수 $\theta \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 나타낸 곡선 $x=3+\sec\theta$, $y=\tan\theta+4\cos\theta$ 위의 점에서의 접선의 기울기의 최솟값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2\theta - 4\sin\theta}{\sec\theta\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - 4\cos^2\theta = 4\sin^2\theta - 4 + \frac{1}{\sin\theta}$

$f(x) = 4x^2-4+\frac{1}{x}$ $(0<x<1)$로 놓으면

$f'(x) = 8x - \frac{1}{x^2}$,



∴ $x=\frac{1}{2}$ 극소.

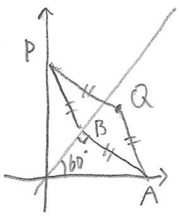
∴ $\sin\theta=\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-4+\frac{1}{\frac{1}{2}} = -1$.

3. 벡터의 연산

★★

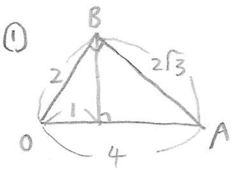
29p 예제 1 - 벡터의 크기

좌표평면 위의 점 $A(4,0)$에서 직선 $y=\sqrt{3}x$에 내린 수선의 발을 B라 하자. y축 위에 있는 점 P에 대하여 점 Q가 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PQ}=\vec{0}$을 만족시킨다. $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BP}|$일 때, 점 Q의 좌표는 (a,b)이다. a^2b^2의 값을 구하시오.



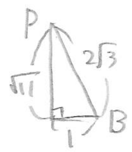
ABPQ : 마름모.

①



∴ $\overline{PB}=2\sqrt{3}$

②



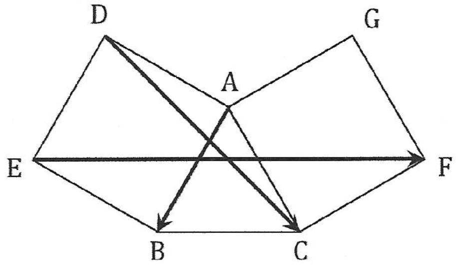
∴ $\overrightarrow{BP}=(-1,\sqrt{11})$
$=\overrightarrow{AQ}$

⇒ $Q(3,\sqrt{11})$. $9\cdot 11=\boxed{99}$.

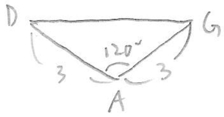
★☆

31p 예제 2 - 벡터의 덧셈, 뺄셈

그림과 같이 한 평면 위에 정삼각형 ABC와 두 정사각형 ADEB, ACFG가 있다. 벡터 $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB}$의 크기가 3일 때, $|\overrightarrow{DG}|^2$의 값을 구하시오.



$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE} \rightarrow |\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DE}|$
$=|\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}|=|\overrightarrow{CF}|=3.$



$\rightarrow |\overrightarrow{DG}|=3\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{DG}|^2=\boxed{27}$.

★★☆

33p 예제 3 - 점 위치 잡기

한 평면 위에 있는 삼각형 ABC와 점 P가

$$\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}+k\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{BC}$$

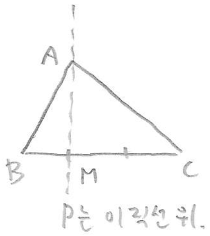
를 만족시킨다. 삼각형 ABC의 넓이가 삼각형 APC의 넓이의 3배가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은?

① -10 ② -8 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CB}+k\overrightarrow{PA}=\vec{0}$.

$\frac{2\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}}{3}=\frac{-k\overrightarrow{PA}}{3}$

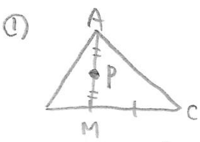
↳ $\overrightarrow{PM}$ (M은 $\overline{BC}$ 1:2 내분점)



$\frac{2}{3}\triangle ABC=\triangle AMC$ 이므로,

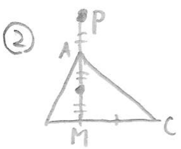
$2\triangle APC=\triangle AMC$ 여야 조건 성립.

①



$\overrightarrow{PM}=-\overrightarrow{PA}$, $k=3$.

②



$\overrightarrow{PM}=3\overrightarrow{PA}$, $k=-9$.

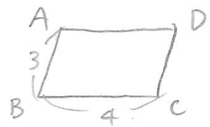
$3+(-9)$
$=-6$.

★★

35p 기본 2 - 벡터 정리

$\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$인 평행사변형 ABCD에 대하여 평면 ABCD 위의 점 P가 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$를 만족시킬 때, 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값을 구하시오.

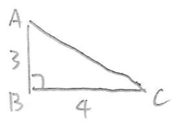
$\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$
$\|$
$\overrightarrow{BA}$
$\|$
$\overrightarrow{CD}$



∴ $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{PC}$ ∴ $2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$,
$\|$
$\overrightarrow{CP}$

$P=C$.

△ABC 넓이 최댓값:



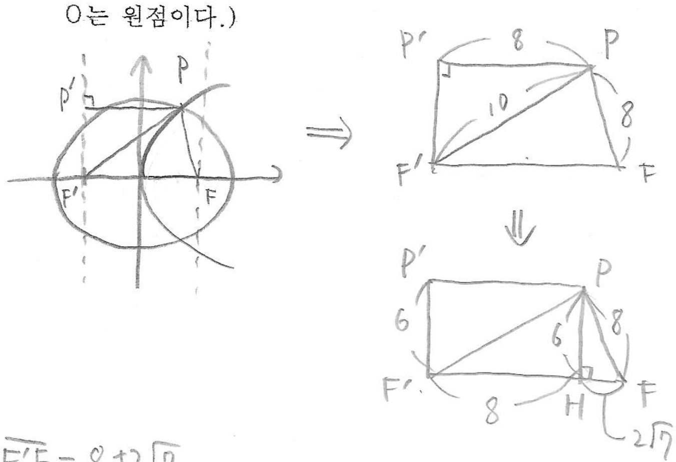
수직일 때.

$\frac{3\times 4}{2}=\boxed{6}$.

★★★

35p 기본 3 - 포물선과 벡터

타원 $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<9)$의 두 초점 중 x좌표가 양수인 점을 F, 음수인 점을 F′이라 하자. 원점을 꼭짓점으로 하고 점 F를 초점으로 하는 포물선이 타원과 만나는 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{PF}|=8$일 때, $|\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{PF'}|$의 값은 $a+\sqrt{b}$이다. 두 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



$\overline{F'F}=8+2\sqrt{7}$,

$|\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{PF'}|=\overline{OF'}=4+\sqrt{7}$. $\therefore a+b=\boxed{11}$.

★★★

36p 실력 1 - 합이 0인 벡터 이해

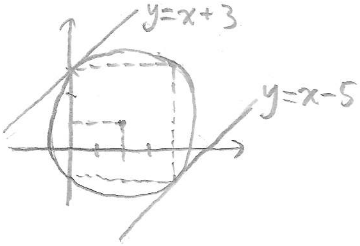
원 $x^2-4x+y^2-2y-3=0$ 위의 점 P와 직선 $y=x+k$ 위의 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|=0$을 만족시키는 두 점 P, Q가 존재하도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오.

원: $(x-2)^2+(y-1)^2=8$.

$\rightarrow \overrightarrow{OQ}=-\overrightarrow{OP}$, Q는 P와 원점 대칭.

$\Rightarrow$ Q가 $y=x+k$ 위 점이면 P는 $y=x-k$ 위 점이다.

$\therefore$ $(x-2)^2+(y-1)^2=8$ 위에 있으면서 $y=x-k$ 위에 있는 점 P가 존재해야 하므로 원과 직선이 교점을 가져야 한다.



$\Rightarrow k=-3,-2,\cdots,4,5$

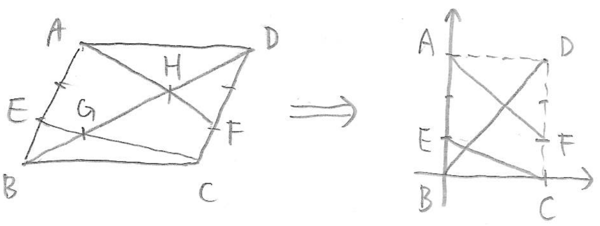
합: $4+5=\boxed{9}$.

★★☆

36p 실력 2 - 평행사변형을 좌표계로

평행사변형 ABCD에서 $3\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AB}$인 점을 E, $3\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CD}$인 점을 F라 하자. 직선 BD와 선분 EC, AF가 만나는 점을 각각 G, H라 할 때, $\overrightarrow{GH}=s\overrightarrow{BD}$이다. 상수 s의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{7}{20}$ ③ $\frac{11}{30}$ ④ $\frac{23}{60}$ ⑤ $\frac{2}{5}$



B(0,0), A(0,3), C(1,0)으로 놓음.

직선 BD: $y=3x$. → 점 G x좌표: $\frac{1}{4}$

직선 EC: $y=-x+1$.

직선 AF: $y=-2x+3$ → 점 H x좌표: $\frac{3}{5}$

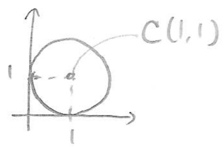
$\overline{BD}:\overline{GH}=1:\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{4}\right)$

$\Rightarrow \overline{GH}=\frac{7}{20}\overline{BD}$

★★☆

36p 실력 3 - 도형의 이동

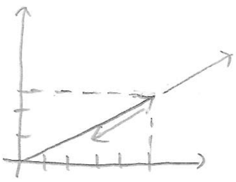
좌표평면에 점 A(2,0)과 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 위의 점 P, 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 Q가 있다. $|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|$의 최댓값과 최솟값의 곱을 구하시오.



$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}$로 분해.

$|\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OC}+3\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{OQ}|=|(5,3)+3\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{OQ}|$

$\overrightarrow{CP}$와 $\overrightarrow{OQ}$는 모두 길이가 1이고 방향이 자유로운 벡터.



(5,3)과 같은 방향으로 4만큼 갔을 때 최대, 반대 방향으로 4만큼 갔을 때 최소

$|(5,3)|=\sqrt{34}$

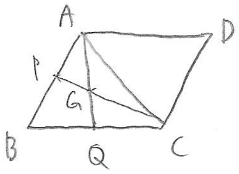
$\therefore (\sqrt{34}+4)\cdot(\sqrt{34}-4)=\boxed{18}$.

4. 평면벡터의 성분과 내적

★★

39p 유제 2 - 위치벡터

평행사변형 ABCD에서 삼각형 ABC의 무게중심을 G, 두 변 AB, BC의 중점을 각각 P, Q라 하자. $\overrightarrow{GP}=\vec{p}$, $\overrightarrow{GQ}=\vec{q}$라 할 때, $\overrightarrow{DA}=m\vec{p}+n\vec{q}$이다. 두 상수 m, n에 대하여 $10m+n$의 값을 구하시오.



$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CQ}$

$=2(\overrightarrow{GQ}-\overrightarrow{GC})$

$\to \overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{GP}$ 이므로

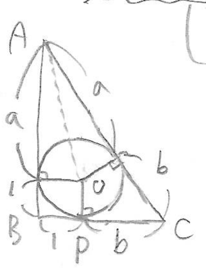
$2\overrightarrow{GQ}+4\overrightarrow{GP}=4\vec{p}+2\vec{q}$

$\therefore 10m+n=\boxed{42}$.

★★☆

43p 예제 3 - 내적 기하적 의미

$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에 중심이 O이고 반지름이 1인 원이 내접할 때, 이 원이 선분 BC와 만나는 점을 P라 하자. $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AB}=12$일 때, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PC}$의 값을 구하시오.



↳ $a(a+1)=12$, $a=3$.

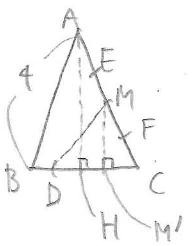
$4^2+(1+b)^2=(3+b)^2 \to b=2$.

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PC}=|\overrightarrow{BC}|\times|\overrightarrow{PC}|=3\cdot2=\boxed{6}$.

★★☆

45p 예제 4 - 벡터 2개 또는 중점

$\overline{AB}=\overline{AC}=4$인 이등변삼각형 ABC에서 선분 BC를 $1:3$로 내분하는 점을 D라 하고, 선분 AC를 $1:3$과 $3:1$로 내분하는 점을 각각 E, F라 하자. $|\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}|=\sqrt{19}$일 때, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$의 값을 구하시오.



$|\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{DF}|=2|\overrightarrow{DM}|=\sqrt{19}$.

$\overline{AH}=a$, $\overline{BH}=\overline{DM'}=b$라 하면

$a^2+b^2=4^2$,

$\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2=\left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2$ $\longrightarrow$ $a=\sqrt{15}$, $b=1$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{15},-1)\cdot(-\sqrt{15},1)=\boxed{14}$.

★☆

46p 기본 3 - 식 정리

한 평면 위의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2$, $|2\vec{a}+\vec{b}|=4|\vec{a}|$이다. 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, $0\le\theta\le\pi$)

① $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

제곱: $4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=16|\vec{a}|^2$,

$|\vec{b}|^2=8|\vec{a}|^2$, $|\vec{b}|=2\sqrt{2}|\vec{a}|$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}|^2$

$\Rightarrow 2\sqrt{2}|\vec{a}|^2\cos\theta=|\vec{a}|^2$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

★★★

48p 실력 1 - 내적 연산

좌표평면에서 중심이 O이고 반지름이 1인 원 위의 두 점 A, B에 대하여 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{b}$라 하면 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$이다. 두 $\boxed{\text{자연수}}$ m, n에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{OP}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{OQ}=m\vec{a}-n\vec{b}$가 다음 조건을 만족시킬 때, $m+n$의 최솟값을 구하시오.

(가) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$
(나) $\lvert\overrightarrow{OQ}\rvert^2\geq 7$

$\cancel{|\vec a||\vec b|}\cos\theta=\frac{1}{2} \to \theta=\frac{\pi}{3}$

(가) → $2m|\vec a|^2+(m-2n)\vec a\cdot\vec b-n|\vec b|^2=0$,

$n=\frac{5}{4}m$.

(나) → $m^2|\vec a|^2-2mn\,\vec a\cdot\vec b+n^2|\vec b|^2$

$=\frac{21}{16}m^2\geq 7$, $m^2\geq\frac{16}{3}$. → 자연수 $m\geq 3$.

→ 5.xx

$n=\frac{5}{4}m$이 자연수여야 하므로 $m=4$, $n=5$. $\boxed{9}$.

★★★★☆

48p 실력 4 - 벡터 제곱, 평면곡선 접선

좌표평면에서 서로 $\boxed{\text{수직}}$인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 ① $|\vec{a}+\vec{b}|=3$, ② $|2\vec{a}+\vec{b}|=3\sqrt{2}$를 만족시킬 때, ③ $|x\vec{a}+\vec{b}|=y$가 되도록 하는 두 실수 x, y에 대하여 점 (x, y)가 나타내는 곡선을 C라 하자. 점 $\mathrm{A}(1, \sqrt{3})$과 곡선 C 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에 대하여 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$의 최솟값을 구하시오.

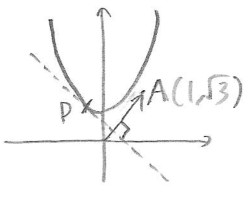
$y\geq 0$

$\vec a\cdot\vec b=0$

① 제곱: $|\vec a|^2+|\vec b|^2=9$

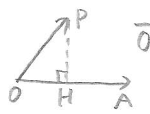
② 제곱: $4|\vec a|^2+|\vec b|^2=18$ → $|\vec a|^2=3$, $|\vec b|^2=6$

③ 제곱: $x^2|\vec a|^2+|\vec b|^2=y^2$, $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=-1$ $(y\geq 0)$



$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}$ 최소일 때는 점 P에서의 접선이 직선 OA와 수직일 때.

(*



$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\overline{OH}\times\overline{OA}$ → 최소여야 함)

$P(x_1, y_1)$

음함수 미분: $x-\frac{y}{3}\cdot\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{dy}{dx}=\frac{3x_1}{y_1}=-\frac{1}{\sqrt3}$ $\left(-\frac{1}{\sqrt3}\times\sqrt3=-1\right)$

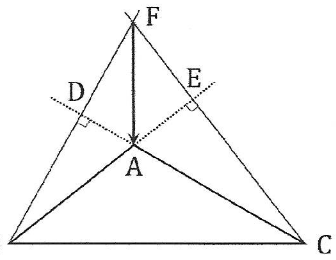
$y_1=-3\sqrt3x_1 \longrightarrow \frac{x_1^2}{2}-\frac{y_1^2}{6}=-1$ 대입. $x_1=-\frac{1}{2}$, $y_1=\frac{3\sqrt3}{2}$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}=(1,\sqrt3)\cdot\left(-\frac{1}{2},\frac{3\sqrt3}{2}\right)=\boxed{4}$.

★★★★★

48p 실력 2 - 두 벡터, 수직 이용

그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC}=3$, $\overline{BC}=4$인 삼각형 ABC가 있다. 점 B에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 D, 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 E라 하고 두 직선 BD와 CE가 만나는 점을 F라 하자. $\overrightarrow{FA}=k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}$이다.

ㄴ. $\overrightarrow{AB}\cdot\{k\overrightarrow{AB}+(l+1)\overrightarrow{AC}\}=0$이다.

ㄷ. $k=\frac{2}{3}$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{AC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+|\overrightarrow{AB}|^2$에서

$16=9-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+4$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-\frac{3}{2}$. (참)

ㄴ. $k\overrightarrow{AB}+(l+1)\overrightarrow{AC}=(k\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{FC}$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{FC}=0$. (참)

ㄷ. (ㄴ.)에서 $k|\overrightarrow{AB}|^2+(l+1)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$,

$4k-\frac{3}{2}(l+1)=0$ ······ ㉠

한편 '$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{FB}=0$'도 (ㄴ.)처럼 변형하면

$\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AC}\cdot\{(k+1)\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{AC}\}=0$,

$-\frac{3}{2}(k+1)+9l=0$ ······ ㉡

⇒ $6\times$㉠ + ㉡을 하면 $24k-\cancel{9l}-9-\frac{3}{2}k-\frac{3}{2}+\cancel{9l}=0$,

$k=\frac{7}{15}$. (거짓)

5. 평면 곡선과 평면 운동

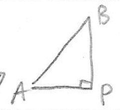
★★☆

51p 예제 1 - 직선과 원 방정식

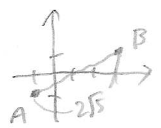
좌표평면 위의 두 점 A$(-1, -1)$, B$(3, 1)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 P가 두 개 존재할 때, 그 두 점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$라 하자. $\overline{\mathrm{P_1P_2}} = \sqrt{15}$일 때, 가능한 모든 양수 r의 값의 곱은?

(가) $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}| = r$

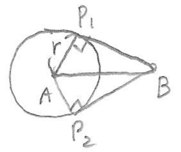
(나) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AP}} = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2$

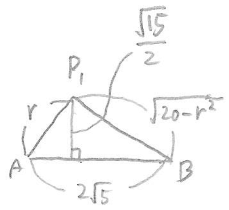


① $2\sqrt{15}$ ② 8 ③ $6\sqrt{2}$ ④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{5}$



$\Rightarrow$





$2\sqrt5 \times \frac{\sqrt{15}}{2} = r \times \sqrt{20-r^2}$, $r^4 - 20r^2 + 75 = 0$

-5

-15

$\therefore r = \sqrt5$ 또는 $r = \sqrt{15}$, $\sqrt5 \times \sqrt{15} = 5\sqrt3$.

★★

55p 예제 3 - 점이 움직인 거리

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t>0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x = \sqrt{t}(t-3),\quad y = 3t-2$$

일 때, 점 P의 y좌표가 1에서 25까지 변하는 동안 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

$\hookrightarrow$ $y=1$일 때 $t=1$

$y=25$일 때 $t=9$.

$\vec{v}\left(\frac{3}{2}\sqrt{t} - \frac{3}{2\sqrt{t}},\ 3\right)$

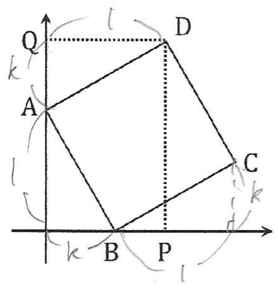
$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{9}{4}t - \frac{9}{2} + \frac{9}{4t} + 9} = \sqrt{\frac{9}{4}\left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{t} + \frac{3}{2\sqrt{t}}$

$\int_1^9 \left(\frac{3}{2}\sqrt{t} + \frac{3}{2\sqrt{t}}\right) dt = \left[t\sqrt{t} + 3\sqrt{t}\right]_1^9 = \boxed{32}$.

★★

58p 실력 1 - 좌표, 수직 조건 복합

좌표평면에서 점 A$(0, 1)$, x축 위의 점 B, 제1사분면 위의 두 점 C, D에 대하여 사각형 ABCD가 정사각형이다. 점 D에서 x축에 내린 수선의 발을 P, y축에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 직선 PQ와 직선 BC가 서로 수직일 때, 점 C의 좌표는 (a, b)이다. $(a+b)^2$의 값을 구하시오.



D$(1, 1+k)$

P$(1, 0)$

Q$(0, 1+k)$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (-1, 1+k) \cdot (1, k)$

$= k^2 + k - 1 = 0$, $k = \frac{-1+\sqrt5}{2}$

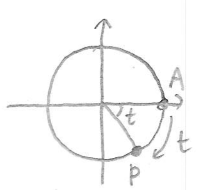
C$(k+1, k) \Rightarrow (a+b)^2 = (2k+1)^2 = \boxed{5}$.

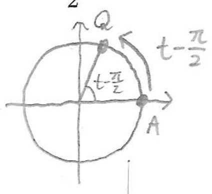
★★☆

58p 실력 2 - 좌표 식 세우기

좌표평면 위에 원점 O가 중심이고 반지름의 길이가 1인 원이 있다. 점 P는 점 A$(1, 0)$을 출발하여 원 위를 시계 방향으로 매초 1만큼의 거리를 움직이고, 점 Q는 점 P보다 $\boxed{\frac{\pi}{2}\text{초 후에}}$ 점 A를 출발하여 원 위를 반시계 방향으로 매초 1만큼의 거리를 움직인다. 점 P가 점 A를 출발하여 $\frac{\pi}{2}$초 경과한 후부터 선분 PQ의 중점을 R라 할 때, 점 R의 속력의 최댓값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$





t초일 때 t만큼 이동.

P$(\cos t, -\sin t)$

t초일 때 $t-\frac{\pi}{2}$만큼 이동.

Q$\left(\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right) = (\sin t, -\cos t)$

R$\left(\frac{\cos t + \sin t}{2}, \frac{-\sin t - \cos t}{2}\right)$, $\vec{v}\left(\frac{-\sin t + \cos t}{2}, \frac{-\cos t + \sin t}{2}\right)$

$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin t \cos t} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 2t} \le \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$.