

수학 영역 (가형)

성명

수험번호

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰십시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

긴 여행의 날들, 끝없는 행운만이 그대와 함께이길

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

Epsilon

2020년 8월 29일 시행 Epsilon 모의고사 1회 (가형)

출제위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon

19학번 : 강종우, 박석준, 백수정, 윤황규, 장지원, 정재훈, 정지혁, 황주영

20학번 : 김동연, 김동해, 김유진, 김태희, 송문주, 이도윤, 이선우, 정원철, 최인환

편집위원 : 성균관대학교 수학교육과 수학문제연구학회 Epsilon 편집위원회

19학번 : 강종우, 백수정

20학번 : 김유진, 김태희

검토위원 :

서희수 (성균관대학교 수학교육과 16)

김동현 (성균관대학교 수학교육과 18)

도대현 (성균관대학교 수학교육과 19)

박지용 (성균관대학교 수학교육과 19)

최정우 (성균관대학교 수학교육과 19)

최진우 (성균관대학교 수학교육과 19)

이상현 (성균관대학교 수학교육과 20)

이윤서 (성균관대학교 수학교육과 20)

이병주 (성균관대학교 수학교육과 20)

최연조 (성균관대학교 수학교육과 20)

엡실론(Epsilon) 팀 혹은 엡실론(Epsilon) 모의고사에 관하여 문의 사항이 있으신 경우 gasonha373@naver.com 으로 연락 주시기 바랍니다.

제 2 교시

Epsilon

수학 영역(가형)



성균관대학교 수학교육과 Epsilon 주관

5지선다형

1. $\sin \frac{7}{3}\pi$ 의 값은? [2점]

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n+1} - 5^{n-1}}{5^n + 2^{3n-2}}$ 의 값은? [2점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

3. 첫째항이 2이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2 \times a_3 = a_5$$

일 때, a_6 의 값은? [2점]

- ① 40 ② 48 ③ 56 ④ 64 ⑤ 72

4. 두 사건 A, B 가 서로 독립이고

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2}, P(A^c \cap B) = \frac{1}{6}$$

일 때, $P(B)$ 의 값은? (단, A^c 은 A 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

5. 1이 아닌 양수 a 에 대하여 닫힌구간 $\left[\frac{1}{4}, 16\right]$ 에서 함수 $y = \log_a x$ 가 최댓값 2를 갖도록 하는 모든 a 의 값의 합은?

[3점]

- ① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{9}{2}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

6. 7개의 숫자 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 배열할 때, 0은 서로 이웃하지 않으면서 1은 이웃하도록 배열하는 경우의 수는? [3점]

- ① 6 ② 12 ③ 18 ④ 24 ⑤ 30

7. 곡선 $y^2 \sin x + x^2 + 3y = 6$ 위의 점 $(0, k)$ 에서의 접선의 기울기가 m 일 때, $k+3m$ 의 값은? [3점]

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

8. 좌표평면 위의 서로 다른 두 점 $A(2a, \log_2 2a)$,
 $B\left(\frac{1}{a}, \log_4 \frac{1}{a}\right)$ 에 대하여 삼각형 OAB 의 넓이가 x 축에 의해
 이등분될 때, a 의 값은? (단, $a > 0$ 이고 O 는 원점이다.) [3점]

- ① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ 2 ⑤ 4

9. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P 의 시각 t
 $(t \geq 0)$ 에서의 속도 $v(t)$ 가

$$v(t) = \frac{2t-2}{t^2-2t+2}$$

이다. 점 P 가 시각 $t=1$ 에서 $t=k$ 까지 움직인 거리가 $\ln 5$ 일
 때, 양수 k 의 값은? [3점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

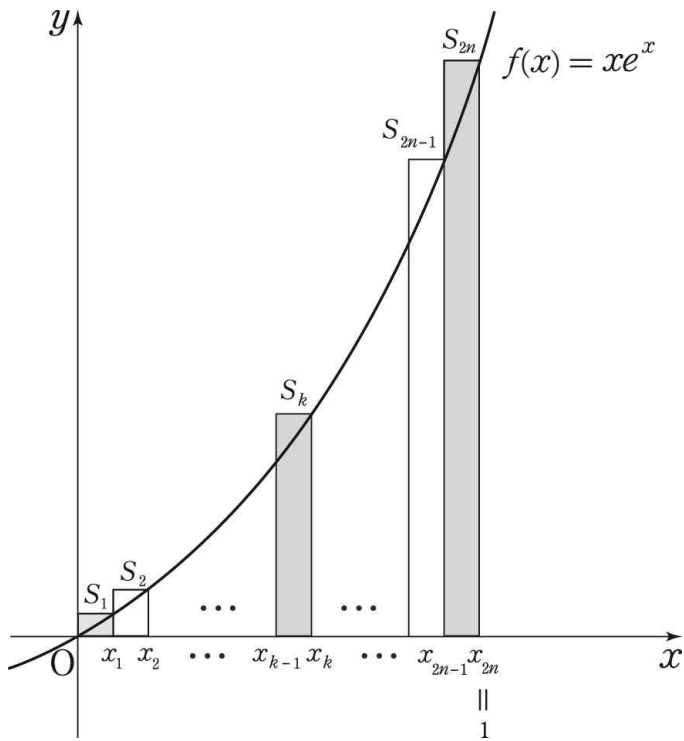
10. 어느 고등학교 학생들의 기말고사 수학 시험 점수는
 평균이 m 점, 표준편차가 σ 점인 정규분포를 따른다고 한다.
 이 고등학교 학생 중 36명을 임의추출하여 구한 수학 시험
 점수의 표본평균이 52점이고, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의
 신뢰구간이 $a \leq m \leq 57.88$ 이다. $a - \sigma$ 의 값은?
 (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때,
 $P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.475$ 로 계산한다.) [3점]

- ① 24.2 ② 26.16 ③ 28.12 ④ 30.08 ⑤ 32.04

11. 함수 $f(x) = xe^x$ 가 있다. 그림과 같이 2 이상인 자연수 n 에 대하여 닫힌구간 $[0, 1]$ 을 $2n$ 등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로

$$0 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n} = 1$$

이라 하자. 닫힌구간 $[x_{k-1}, x_k]$ 를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$ 인 직사각형의 넓이를 S_k 라 하자. 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k$ 의 값은? ($k=1, 2, \dots, 2n$) [3점]



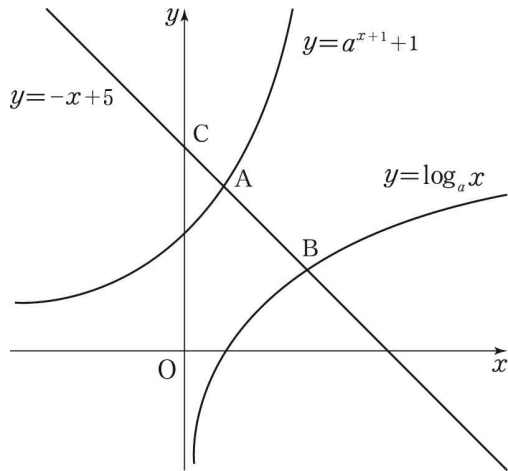
- ① $3 + \frac{\sqrt{e}}{2}$ ② $1 + \frac{\sqrt{e}}{2}$ ③ 1
- ④ $1 - \frac{\sqrt{e}}{2}$ ⑤ $3 - \frac{\sqrt{e}}{2}$

12. 1부터 9까지의 숫자 카드가 각각 1장씩, 총 9장이 들어있는 주머니에서 3장을 동시에 뽑는다. 뽑은 세 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c 라 할 때, 세 수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [3점]

- (가) $a+b+c$ 의 값은 짝수이다.
- (나) $2b-1=a+c$

- ① $\frac{1}{28}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{5}{84}$ ④ $\frac{1}{14}$ ⑤ $\frac{1}{12}$

13. 그림과 같이 두 곡선 $y=a^{x+1}+1$, $y=\log_a x$ ($a > 1$)와 직선 $y=-x+5$ 의 교점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-x+5$ 가 y 축과 만나는 점을 C라 하자. 점 A가 선분 BC를 2:1로 내분할 때, a 의 값은? [3점]



- ① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

14. 첫째항이 정수인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \sin\left(a_n + \frac{n}{2}\right)\pi$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{100} |a_n|$ 의 최솟값은? [4점]

- ① 48 ② 49 ③ 50 ④ 51 ⑤ 52

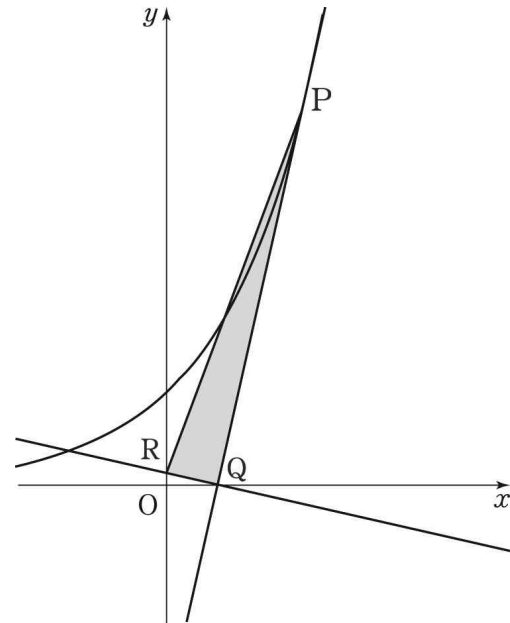
15. 흰 구슬이 3개, 검은 구슬이 1개가 들어있는 주머니가 있다.
이 주머니에서 다음과 같이 구슬을 꺼내는 시행을 한다.

- [1 단계] 주머니에서 2개의 구슬을 임의로 꺼내어 구슬의 색깔을 확인한 후 다시 넣는다.
- [2 단계] [1 단계]에서 꺼낸 구슬 중 흰 구슬의 개수만큼 이 주머니에서 임의로 구슬을 꺼낸 후 다시 넣지 않는다.
- [3 단계] 주머니에서 2개의 구슬을 임의로 꺼낸 후 [2 단계]에서 꺼낸 구슬과 함께 다시 넣는다.

이와 같은 시행을 120번 반복할 때 [3 단계]에서 흰 구슬이 2개가 나오는 횟수의 기댓값은? [4점]

- ① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

16. $t > 1$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y = e^x$ 위의 점 $P(t, e^t)$ 에서의 접선이 x 축과 만나는 점을 Q 라 하자. 점 Q 를 지나고 직선 PQ 에 수직인 직선이 y 축과 만나는 점을 R 라 할 때, 삼각형 PQR 의 넓이를 $S(t)$ 라 하자. $\lim_{t \rightarrow 1^+} \frac{S(t)}{t-1}$ 의 값은? [4점]



- ① $e + \frac{1}{2e}$ ② $e + \frac{1}{e}$ ③ $\frac{e}{2} + \frac{1}{2e}$ ④ $\frac{e}{2} - \frac{1}{e}$ ⑤ $\frac{e}{2} - \frac{2}{e}$

17. 다음은 방정식 $(3-x)(nx+y+2z+2w) = 4n$ 을 만족시키는 네 자연수 x, y, z, w 의 모든 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수를 a_n 이라할 때, $\sum_{n=6}^{13} a_n$ 의 값을 구하는 과정이다. (단, n 은 6 이상의 자연수이다.)

방정식 $(3-x)(nx+y+2z+2w) = 4n$ 을 만족시키는 자연수 x 는 (1) ' $x=1$ 인 경우'와 (2) ' $x=2$ 인 경우'가 있다.

(1) $x=1$ 인 경우:

$2 \times (n+y+2z+2w) = 4n$ 에서 $y+2z+2w = n$ 이다.

이때, i) ' $n=2k$ 인 경우'와 ii) ' $n=2k+1$ 인 경우'가 있다.

(단, k 는 3 이상의 자연수이다.)

i) $n=2k$ 인 경우:

$y+2z+2w=2k$ 를 만족시키는 자연수

y, z, w 의 모든 순서쌍 (y, z, w) 의 개수는

$k-1C_2$ 이다.

ii) $n=2k+1$ 인 경우:

$y+2z+2w=2k+1$ 을 만족시키는 자연수

y, z, w 의 모든 순서쌍 (y, z, w) 의 개수는

(가) 이다.

(2) $x=2$ 인 경우:

$2n+y+2z+2w=4n$ 에서 $y+2z+2w=2n$ 이다.

$y+2z+2w=2n$ 을 만족시키는 자연수 y, z, w 의 모든

순서쌍 (y, z, w) 의 개수는 (나) 이다.

따라서

$$\sum_{n=6}^{13} a_n = \sum_{k=3}^6 k-1C_2 + \sum_{k=3}^6 \text{ (가) } + \sum_{n=6}^{13} \text{ (나) } = \text{ (다) } \text{ 이다.}$$

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 식을 $g(n)$, (다)에 알맞은 수를 r 라 할 때, $f(9) + g(6) + r$ 의 값은? [4점]

- ① 372 ② 376 ③ 380 ④ 384 ⑤ 388

18. 모든 항과 공차가 0이 아닌 두 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 상수 k 에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $\frac{b_4}{a_4}$ 의 값은? [4점]

(가) 모든 자연수 n 에 대하여 $b_n = \frac{(a_{n+1})^2 - k}{a_n}$ 이다.

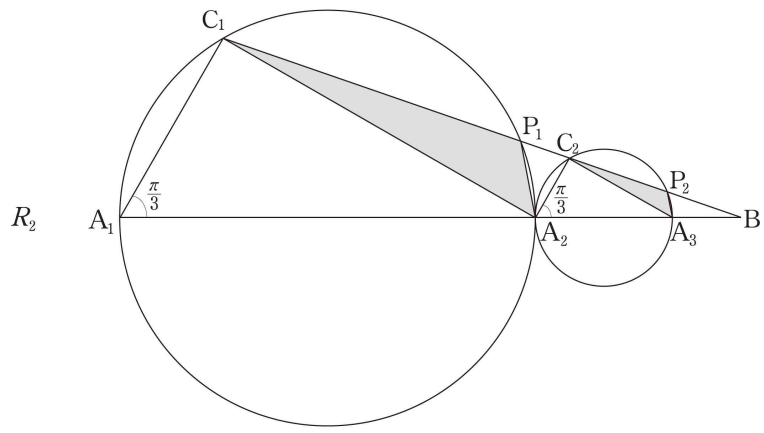
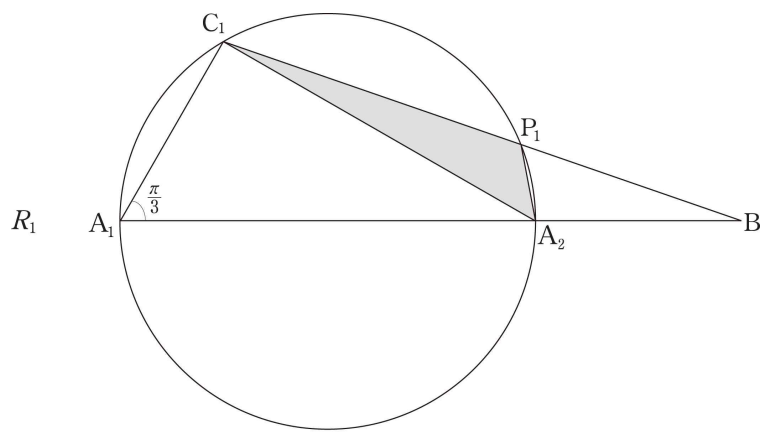
(나) $\sum_{n=1}^4 \frac{a_n - b_n}{2} = \sum_{n=1}^4 a_n = k$

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

19. 그림과 같이 $\overline{A_1B} = 3$, $\overline{A_1C_1} = 1$ 이고 $\angle BA_1C_1 = \frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 A_1BC_1 이 있다. 선분 A_1B 를 2:1로 내분하는 점을 A_2 라 하고 삼각형 $A_1A_2C_1$ 에 외접하는 원을 그린다. 삼각형 $A_1A_2C_1$ 의 외접원과 선분 C_1B 가 만나는 점 중 C_1 이 아닌 점을 P_1 이라 하자. 삼각형 $A_2C_1P_1$ 의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에서 선분 P_1B 위의 점 C_2 를 $\angle BA_2C_2 = \frac{\pi}{3}$ 가 되도록 잡고 선분 A_2B 를 2:1로 내분하는 점을 A_3 라 하자. 삼각형 $A_2A_3C_2$ 에 외접하는 원을 그리고 삼각형 $A_2A_3C_2$ 의 외접원과 선분 C_2B 가 만나는 점 중 C_2 이 아닌 점을 P_2 라 할 때, 삼각형 $A_3C_2P_2$ 의 내부를 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



⋮

⋮

- ① $\frac{9\sqrt{3}}{56}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{28}$ ③ $\frac{11\sqrt{3}}{56}$ ④ $\frac{3\sqrt{3}}{14}$ ⑤ $\frac{13\sqrt{3}}{56}$

20. 실수 전체의 집합에서 이계도함수가 연속인 함수 $f(x)$ 에 대하여 방정식 $f(x) = t$ 를 만족시키는 실수 x 의 최솟값을 $g(t)$ 라 하자. $f(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 실수 x 에 대하여 $f''(x) \leq 0$ 이다.
 (나) $f(2) = 0$, $f(4) = 4$

함수 $f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(g(t), f(g(t)))$ 에서의 접선의 x 절편을 $h(t)$ 라고 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

- <보 기>
- ㄱ. $0 \leq t < 4$ 일 때, $h'(t) \leq 0$ 이다.
 ㄴ. $\int_0^4 g(t)dt$ 의 최댓값은 12이다.
 ㄷ. $\int_0^4 h(t)dt$ 의 최댓값은 8이다.

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
 ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \ x > 0 \text{ 일 때, } f(x) = \int_0^x f(-t) dt \text{ 이다.}$$

$$(나) \ \text{모든 자연수 } n \text{에 대하여 } \int_n^{n+1} f(-x) dx = 2 \text{ 이다.}$$

함수 $g(x) = \int_0^x f(t)f(-t)dt$ 에 대하여 $g(2) = g(6)$ 일 때,
 $g(12) + g(-6)$ 의 값은? [4점]

- ① 84 ② 96 ③ 108 ④ 120 ⑤ 132

단답형

22. ${}_4H_3 + {}_4C_3$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n a_n = 1$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8a_n + 7 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2a_n + \left(\frac{1}{3}\right)^n} \text{의 값을 구하시오. [3점]}$$

24. $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때, 방정식

$$2\tan x \sin x - 2\sec x + 1 = 0$$

의 모든 실근의 합은 $a\pi$ 이다. a 의 값을 구하시오. [3점]

25. 두 개의 주사위를 동시에 던져 나온 두 눈의 수의 차만큼 한 개의 동전을 던진다. 동전을 3번 이상 던졌을 때, 동전을 던져서 나온 앞면과 뒷면의 개수가 같을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

26. $\overline{AB} = 2$, $\overline{AC} = 3$, $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ 인 삼각형 ABC가 있다.

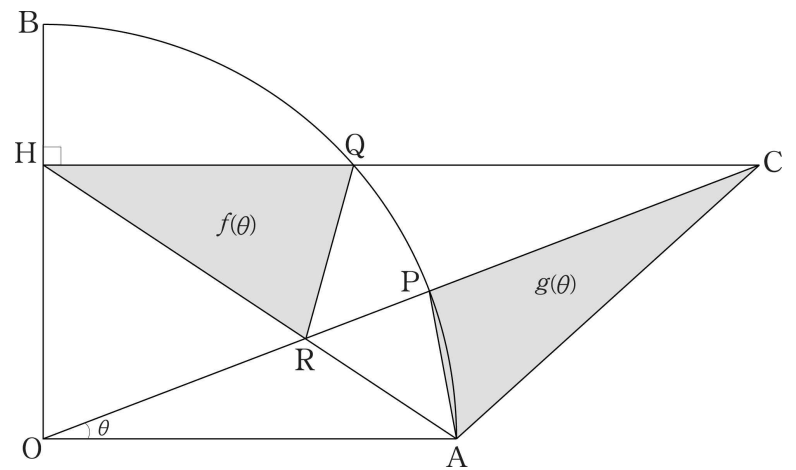
선분 AC 위의 점 P에 대하여 선분 BP를 3:2로 외분하는 점을 Q라 하자. 삼각형 ABP의 넓이와 삼각형 CPQ의 넓이가 같을 때, $\sin^2(\angle PCQ) = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 양의 실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

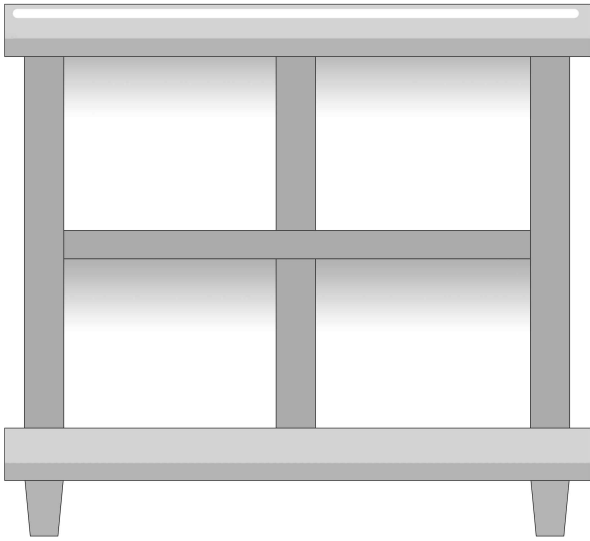
$$\begin{aligned} \text{(가)} \quad & f(x) = x \int_1^x g(t) dt \\ \text{(나)} \quad & \int_1^2 \frac{f(x)}{1+x^2} dx = 5 \ln 5 \end{aligned}$$

$\int_1^2 g(x) \ln(x^2+1) dx = 10 \ln 5$ 일 때, $\int_1^2 g(x) dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P를 $\angle AOP = \theta$ 가 되도록 잡고, 선분 OP의 연장선 위의 점 C를 $\overline{AC} = 1$ 이 되도록 잡는다. 점 C에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 CH와 호 AB가 만나는 점을 Q라 하고, 선분 AH가 선분 OC와 만나는 점을 R라 하자. 삼각형 QRH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 APC의 넓이를 $g(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{f(\theta)}{g(\theta)} = a$ 라 하자. $60a$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



29. 빨간 공 4개와 파란 공 3개를 그림과 같은 사물함에 넣으려 한다.



공을 넣지 않은 사물함이 있을 수 있으며 각 사물함에는 최대 3개의 공이 들어갈 수 있을 때, 모든 공을 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색의 공끼리는 구분하지 않는다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 1이고 $f(1) = f'(1) = 0$ 인 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수 $g(x) = e^{f(x)} - f(x)$ 가 있다. 합성함수 $(f \circ g)(x)$ 가 $x = f(0)$ 에서만 극댓값을 가질 때, $f(6)$ 의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.