우주설 도형 44제 정답과 해설

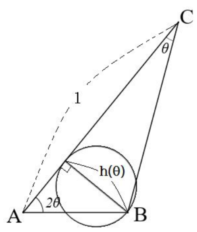
빠른정답

1	20	*2*	4	*3*	4	*4*	1	*5*	4
6	4	*7*	3	*8*	3	*9*	3	*10*	3
11	5	*12*	10	*13*	3	*14*	4	*15*	3
16	3	*17*	2	*18*	4	*19*	4	*20*	3
21	108	*22*	20	*23*	30	*24*	1	*25*	4
26	20	*27*	2	*28*	1	*29*	116	*30*	213
31	21	*32*	12	*33*	45	*34*	53	*35*	$\frac{128}{35}$
36	3	*37*	$\frac{12}{11}$	*38*	1	*39*	1	*40*	2
41	2	*42*	3	*43*	5	*44*	4		

1. [출제의도] 사인법칙

사인법칙 비례관계를 쓰지 않은 풀이

ⅰ) 원의 반지름이 최소일 때



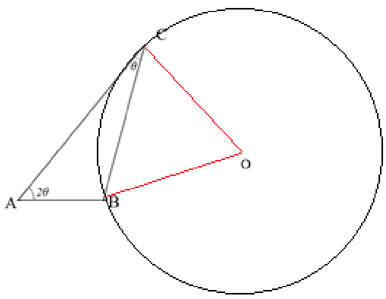
=> 원의 반지름은 점 B에서 내린 수선의 길이 $h(\theta)$를 지름으로 할 때에 최솟값을 가진다.

$\overline{AC}=\dfrac{h(\theta)}{\tan2\theta}+\dfrac{h(\theta)}{\tan\theta}$이므로,

$h(\theta)=\dfrac{\tan\theta\tan2\theta}{\tan\theta+\tan2\theta}=\dfrac{2\tan^2\theta}{3\tan\theta-\tan^3\theta}$

$r(\theta)=\dfrac{\tan^2\theta}{3\tan\theta-\tan^3\theta}$

ⅱ) 원의 반지름이 최대일 때



=> 점C가 접점이 될 때의 원의 반지름이 최댓값을 가진다.

원의 중심O로부터, 점B, C까지 거리가 반지름 $R(\theta)$로 같은 이등변 삼각형 OBC에 대하여,

$\overline{BC}=\dfrac{h(\theta)}{\sin\theta}$ 이고, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{\frac{1}{2}\overline{BC}}{R(\theta)}$이므로,

$\sin\theta=\dfrac{h(\theta)}{2R(\theta)\sin\theta}$

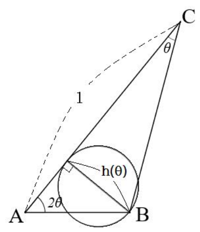
$R(\theta)=\dfrac{h(\theta)}{2\sin^2\theta}=\left\{\dfrac{\tan^2\theta}{(\sin^2\theta)(3\tan\theta-\tan^3\theta)}\right\}$

$$\lim_{\theta\to0+}r(\theta)R(\theta)=\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan^4\theta}{(3\tan\theta-\tan^3\theta)^2\sin^2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\frac{\tan\theta}{\theta}\right)^4}{\left(\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{\theta}\right)^2\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2}=\frac{1^4}{3^2\times1^2}=\frac{1}{9}$$

사인법칙 비례관계를 쓴 빠른풀이

ⅰ) 원의 반지름이 최소일 때

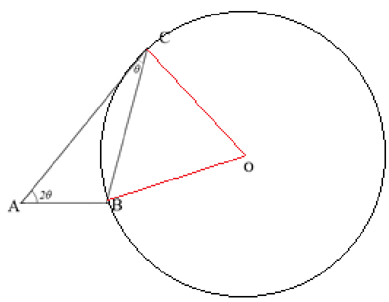


=> 원의 반지름은 점 B에서 내린 수선의 길이 $h(\theta)$를 지름으로 할 때에 최솟값을 가진다.

$\lim\limits_{\theta\to0+}$ 인 상황에서 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$가 1 : 2로 $\overline{AC}$를 나눠 가지므로, $\overline{BC}=\dfrac{2}{3}$이고, $h(\theta)=\dfrac{2}{3}\sin\theta$,

$r(\theta)=\dfrac{1}{3}\sin\theta$

ⅱ) 원의 반지름이 최대일 때



=> 점C가 접점이 될 때의 원의 반지름이 최댓값을 가진다.

마찬가지로 $\lim\limits_{\theta\to0+}$인 상황에서 $\overline{BC}=\dfrac{2}{3}$, 사인법칙을 사용하면 $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\frac{2}{3}}{\sin\theta}=\lim\limits_{\theta\to0+}2R(\theta)$이고,

$\lim\limits_{\theta\to0+}R(\theta)=\dfrac{1}{3\sin\theta}$

2. [출제의도] 사인법칙

삼각형 ABQ에서 사인법칙을 적용

$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)}=2=\dfrac{\overline{BQ}}{\sin\theta}$ 이므로 $\overline{BQ}=2\sin\theta$

이때, 삼각형 APD와 삼각형 BQE가 합동이므로 $\overline{AP}=2\sin\theta$, 구하고자 하는 정삼각형 PQR의 한 변의 길이를 x라 하면, $\dfrac{x+2\sin\theta}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)}=2$

$x=2\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta\right)-2\sin\theta$

$\dfrac{\pi}{6}-\theta=t$라 하면, 구하고자 하는

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{6}-}\frac{S(\theta)}{\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)^2}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}x^2}{t^2}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\lim_{t\to0+}\frac{x}{t}\right)^2$$

$$\lim_{t\to0+}\frac{x}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{2\left\{\sin\left(\frac{\pi}{6}+t\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-t\right)\right\}}{t}=2\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2=3\sqrt{3}$$

답: 4번

3.

직선 BC와 AE의 교점을 K라고 하면

$\overline{BK}=\tan\theta$이므로 $\overline{KC}=1-\tan\theta$,

$\overline{KC}=(1-\tan\theta)\sin\theta$이다. $\overline{AK}=\sec\theta$이므로

$\overline{AE}=\cos\theta+\sin\theta$이다. 그런데

$\overline{CE}=(1-\tan\theta)\cos\theta=\cos\theta-\sin\theta$이므로

$\overline{CF}=2\sin\theta$이다.

$\angle FCH=\angle ACE=\angle ACB+\angle BCE=\dfrac{\pi}{4}+\theta$이므로

$\overline{CH}=2\sin\theta\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$, $\overline{FH}=2\sin\theta\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$이며,

정사각형 AHIJ의 한 변의 길이는

$\sqrt{2}+\overline{CH}=\sqrt{2}+2\sin\theta\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$이다. 이때

$$\overline{FI}=\overline{HI}-\overline{FH}=\sqrt{2}+2\sin\theta\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-2\sin\theta\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\sqrt{2}+2\sin\theta\times(-\sqrt{2}\sin\theta)$$

이다. 따라서 $f(\theta)=\sqrt{2}-2\sqrt{2}\sin^2\theta$이다.

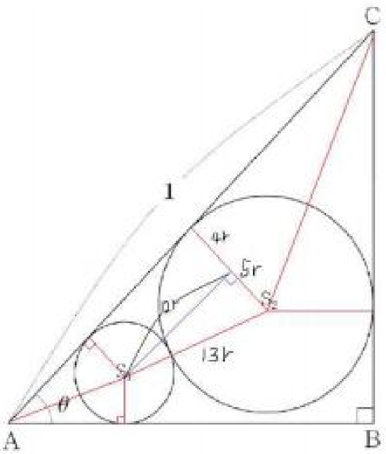
$\left(\because\ \cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\sin\theta\right)$

$\lim\limits_{\theta\to0+}a-f(\theta)=0$이어야 하므로 $a=\sqrt{2}$이고,

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{a-f(\theta)}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{2\sqrt{2}\sin^2\theta}{\theta^2}=2\sqrt{2}$이다.

답: 4번

4. [출제의도] 피타고라스



외접원의 관계를 통해 $13r$, $5r$을 구하고
피타고라스를 통해 $12r$을 얻는다.
빗변의 길이 1을 구성하는 나머지 길이들도 표시하면,
$1=r(\theta)\times\left(\frac{4}{\tan\frac{\theta}{2}}+12+\frac{9}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\right)$이므로,
$\lim_{\theta\to0+}\frac{r(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{\left(\frac{4}{\tan\frac{\theta}{2}}+12+\frac{9}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\right)\times\theta}$

$=\frac{1}{8}$

답: 1번

5. [출제의도] 엇각

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{OQ}\times\overline{OR}\times\sin(\angle QOR)$이다. 그런데 삼각형 QRP와 삼각형 P′RO는 닮았고 닮음비는 $2:1$이다. 따라서 $\overline{OR}\times2=\overline{PR}$이고 $\overline{OR}+\overline{PR}=1$이므로 $\overline{OR}=\frac{1}{3}$이다. 한편 $\angle QOR=\pi-2\times\angle POP'=\pi-2\theta$이고 $\overline{OQ}=1$이므로,
$S(\theta)=\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{3}\times\sin(\pi-2\theta)=\frac{1}{6}\sin2\theta$이다.
계산하면 $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\frac{1}{3}$이다.

답: 4번

6. [출제의도] 피타고라스

정사각형의 한 변의 길이를 $f(\theta)$라고 하자. 그러면 $S(\theta)=\{f(\theta)^2\}$이다.
반원의 중심을 O라고 하면
$\overline{OD}^2=(\overline{OH}+\overline{HC})^2+\overline{CD}^2$, $\overline{OH}=\cos2\theta$,
$\overline{HC}=\overline{CD}=f(\theta)$이므로
$(\cos2\theta+f(\theta))^2+\{f(\theta)\}^2=1$이다. 정리하면
$2\{f(\theta)\}+2\cos2\theta\times f(\theta)+\cos^2 2\theta-1=0$이고,
근의 공식을 이용하면

$f(\theta)=\frac{-\cos2\theta+\sqrt{2-\cos^2 2\theta}}{2}$이다. 이때
$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{f(\theta)}{\theta^2}\right)^2$이므로 $\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta^2}$을 먼저 구하자.

$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{\theta^2}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sqrt{2-\cos^2 2\theta}-\cos\theta}{2\theta^2}$

$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\sqrt{2-\cos^2 2\theta}-\cos\theta\right)\left(\sqrt{2-\cos^2 2\theta}+\cos\theta\right)}{2\theta^2\left(\sqrt{2-\cos^2 2\theta}+\cos\theta\right)}$

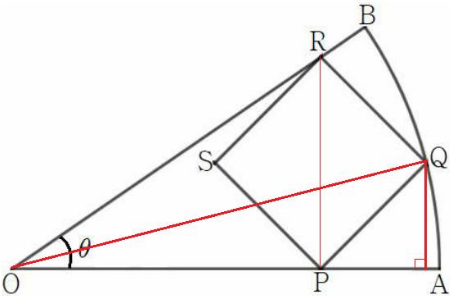
$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\left(1-\cos^2 2\theta\right)}{2\theta^2\left(\sqrt{2-\cos^2 2\theta}+\cos\theta\right)}$

$=2$

이며, 따라서 $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^4}=4$이다.

답: 4번

7. [출제의도] 피타고라스, 극한값의 연산성질



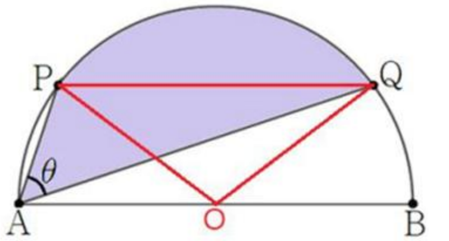
구하고자 하는 정사각형의 한 변의 길이 x에 대하여
$\overline{RP}=\sqrt{2}x$이고, 삼각비에 의해 $\overline{OP}=\frac{\sqrt{2}x}{\tan\theta}$
$\overline{QA}=\frac{\sqrt{2}}{2}x$이다.
OQ를 빗변으로 하는 직각삼각형에서 피타고라스를 하면,
$1^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{\tan\theta}x+\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2$
$1^2=x^2\left(\frac{2}{\tan^2\theta}+\frac{2}{\tan\theta}+1\right)$
$\lim_{\theta\to0+}1^2=\lim_{\theta\to0+}\frac{x^2}{\theta^n}\times\lim_{\theta\to0+}\theta^n\left(\frac{2}{\tan^2\theta}+\frac{2}{\tan\theta}+1\right)$

$n=2$일 때,

$1=\lim_{\theta\to0+}\frac{x^2}{\theta^n}\times2$
$m=\frac{1}{2}$

답: 3번

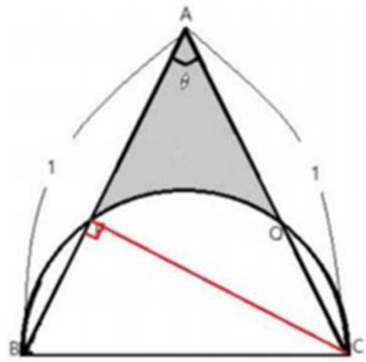
8. [출제의도] 원주각의 비례관계



$\angle PAB+\angle QAB=\frac{\pi}{2}$이므로 선분 PQ는 선분 AB와 평행하며, 두 점 P와 Q는 반원을 이등분하는 직선에 대하여 대칭이다.
삼각형 PAQ와 삼각형 POQ의 넓이가 같으므로
구하고자 하는 넓이 $S(\theta)$는 부채꼴 POQ의 넓이와 같다.
원주각에 의해 $\angle POQ=2\theta$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta=\theta$

9. [출제의도] 8번문제 복습



$S(\theta)$는 직각삼각형 APC의 넓이에서 호 PQ선분 CP, 선분 CQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 빼서 구할 수 있는데 반원의 중심을 O라 하면,
이는 문제 4번에서 본 방식을 이용하면
$\frac{1}{2}\times\overline{OP}^2\times2\angle PCQ=\frac{1}{2}\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times(\pi-2\theta)$

$S(\theta)=\frac{\sin\theta\cos\theta}{2}-\frac{\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{2}\times(\pi-2\theta)$

$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\frac{1}{2}$,

이다. $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\frac{1}{2}$, $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}=\frac{1}{2}$이므로 그 합은 1이다.

답: 3번

10. [출제의도] 코사인법칙 활용

원의 중심을 O라 하고, 반지름을 r이라 하면,

$\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{4}{\sin\frac{\theta}{2}}$, $\overline{\mathrm{AO}}=\dfrac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}$이다.

삼각형 AOB에서 코사인법칙 적용하면,

$$r^2=\left(\frac{4}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2-2\left(\frac{4}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)\cos\theta$$

$$S(\theta)=\pi r^2$$

$$=\pi\left\{\left(\frac{4}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2-2\cos\theta\left(\frac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2\right\}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\theta^2\times S(\theta)$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\pi\left\{\left(\frac{4\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2+\left(\frac{\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2-2\cos\theta\left(\frac{2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)^2\right\}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\pi\{(8)^2+(2)^2-2\times1\times(4)^2\}$$

$$=36\pi$$

마찬가지로,

$$\lim_{\theta\to\pi-}S(\theta)=\lim_{\theta\to\pi-}\pi\left\{\left(\frac{4}{1}\right)^2+\left(\frac{1}{1}\right)^2-2\times(-1)\times(2)^2\right\}$$

$$=25\pi$$

답: 3번

11. [출제의도] 피타고라스

삼각형 PBQ에서 피타고라스를 적절히 사용하면,

$l(\theta)=2\cos\theta+\sqrt{1-4\sin^2\theta}$ 이며, 구하려는 극한값은

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{3-l(\theta)}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{2-2\cos\theta}{\theta^2}+\frac{1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta^2}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}$$

$$+\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(1-\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)\left(1+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)}{\theta^2\left(1+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}+\lim_{\theta\to0+}\frac{4\sin^2\theta}{\theta^2\left(1+\sqrt{1-4\sin^2\theta}\right)}$$

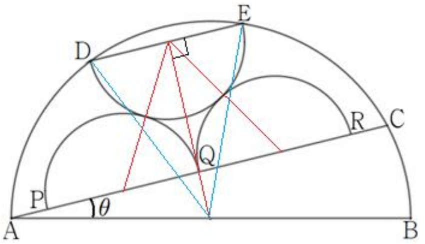
$$=1+2$$

$$=3$$

이다.

답: 5번

12. [출제의도] 피타고라스, 특수각



$$1^2=r^2+\left(r\sqrt{3}+\sin\theta\right)^2$$

$$4r^2+2\sqrt{3}\sin\theta\times r+\sin^2\theta-1=0$$

$$r=\frac{-\sqrt{3}\sin\theta+\sqrt{4-\sin^2\theta}}{4}$$

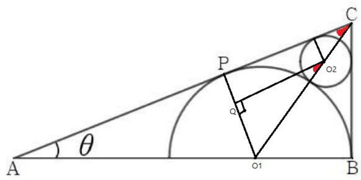
$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{r(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}=\lim_{t\to0+}\frac{-\sqrt{3}\cos t+\sqrt{4-\cos^2 t}}{4(t)^2}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{4\sin^2 t}{4(t)^2\left(\sqrt{4-\cos^2 t}+\sqrt{3}\cos t\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ ,\quad 120k^2=10$$

답: 10

13. [출제의도] 극한값의 연산



두 원이 외접해 있고 공통접선이 주어져 있다. 그림과 같이 반원 O_1의 중심을 점 O_1, 원 O_2의 중심을 점 O_2라고 하고, 직선 AC와 평행하며 점 O_2를 지나는 직선이 직선 PO_1과 만나는 점을 Q라고 하자. 그러면 $\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}=R(\theta)+r(\theta)$, $\overline{\mathrm{QO}_1}=R(\theta)-r(\theta)$이고,

$\angle\mathrm{ACO}_1=\angle\mathrm{QO}_2\mathrm{O}_1=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}$이다.

(그림에서 붉은색으로 표시한 각)

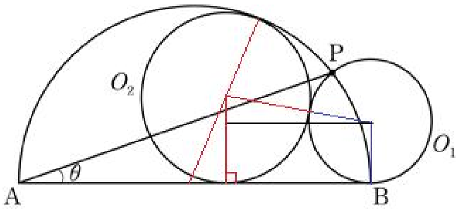
그러면 $\dfrac{R(\theta)-r(\theta)}{R(\theta)+r(\theta)}=\dfrac{1-\dfrac{r(\theta)}{R(\theta)}}{1+\dfrac{r(\theta)}{R(\theta)}}=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\theta}{2}\right)$이고,

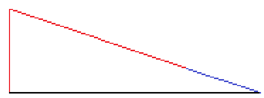
이를 간단히 하면 $\dfrac{r(\theta)}{R(\theta)}=\dfrac{1-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$이므로 이 값에 극한을 취하면 $3-2\sqrt{2}$이다.

14. [출제의도] 극한값의 연산, 피타고라스

f, g를 각각 구하지 않고,

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{g(\theta)}{f(\theta)}$를 구하는 방법이 있다.





빗변의 길이가 $f+g$인 직각삼각형의 각 변의 길이를 구해보자.

밑변의 길이가 반원의 반지름 1에서 $\sqrt{1-2g}$ (피타고라스 $\sqrt{(1-g)^2-g^2}$)를 뺀 것.

높이가 $g-f$이다. 피타고라스를 쓰면,

$$(f+g)^2=\left(1-\sqrt{1-2g}\right)^2+(g-f)^2$$

$4fg=\left(1-\sqrt{1-2g}\right)^2$, 여기서 양변을 f^2으로 나누자.

$$4\frac{g}{f}=\left(\frac{1-\sqrt{1-2g}}{f}\right)^2$$

$$4\frac{g}{f}=\left(\frac{2g}{f\left(1+\sqrt{1-2g}\right)}\right)^2$$

$4\dfrac{g}{f}=\left(\dfrac{g}{f}\right)^2\left(\dfrac{2}{\left(1+\sqrt{1-2g}\right)}\right)^2$ $\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{g(\theta)}{f(\theta)}$가 수렴하고 $\lim\limits_{\theta\to0+}g(\theta)=0$이므로

양변에 극한을 취하면, 4답 $=$ 답$^2\times(1)^2$

답: 4

15. [출제의도] 극한값의 연산, 피타고라스

$$\sqrt{2}=\frac{r(\theta)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}+r(\theta)\times\sqrt{2}$$

$$=r(\theta)\times\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}+\sqrt{2}\right)$$

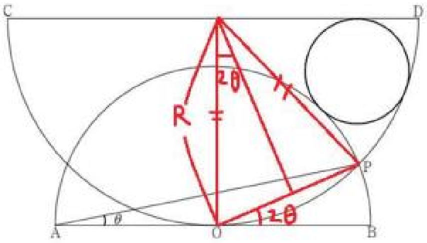
이므로, $r(\theta)=\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}\right)}$

$$=\frac{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)+1}$$

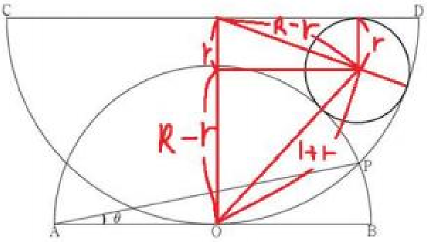
$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-}\frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}=\sqrt{2}$$

답: 3번

16. [출제의도] 피타고라스 활용



$R\sin 2\theta = \frac{1}{2}$, $R(\theta) = \frac{1}{2\sin 2\theta}$



$(R-r)^2 - r^2 = (1+r)^2 - (R-r)^2$

$2(R-r)^2 = (1+r)^2 + r^2$

$2R^2 - 4Rr = 2r + 1$

$2r(1+2R) = 2R^2 - 1$

$r(\theta) = \frac{2R^2-1}{2(1+2R)}$, $R(\theta) = \frac{1}{2\sin 2\theta}$ 를 대입하면

$$r(\theta) = \frac{2\left(\frac{1}{2\sin 2\theta}\right)^2 - 1}{2\left(1+\frac{1}{\sin 2\theta}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin 2\theta}\right) - \sin 2\theta}{2(\sin 2\theta + 1)}$$

$$\lim_{\theta \to 0+} \frac{r(\theta)}{R(\theta)} == \frac{\left(\frac{\sin 2\theta}{\sin 2\theta}\right) - 2\sin^2 2\theta}{2(\sin 2\theta + 1)} = \frac{1}{2}$$

답: 3번

17. [출제의도] 사인법칙

직각이등변 삼각형의 삼각비 $1:1:\sqrt{2}$를 적극 활용할 수 있는 문제이다.

$\overline{CD} = \overline{CH} - \overline{DH} = \sin\theta - (1-\cos\theta)$ E에서 CD에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{EH} = \overline{HD} = l$이라하면 $\overline{CD} = \overline{CH} + \overline{HD}$에서

$\overline{CD} = x\tan\theta + x$

$=> \overline{CD} = \sin\theta - (1-\cos\theta) = x\tan\theta + x$이므로 $x = \frac{\sin\theta - (1-\cos\theta)}{1+\tan\theta}$이다.정사각형 $PQRS$의 한 변 x에 대하여

$3x = (1-\cos\theta)\sqrt{2}$, $x = \frac{(1-\cos\theta)}{3}\sqrt{2}$이므로

$g(\theta) = \frac{2}{9}(1-\cos\theta)^2$이다

$f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{EH} \times \overline{CD} = \frac{(\sin\theta - (1-\cos\theta))^2}{2+2\tan\theta}$

$$=> \lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)} = \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{2}{9}(1-\cos\theta)^2}{\frac{(\sin\theta - (1-\cos\theta))^2}{2+2\tan\theta} \times \theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{2}{9}(1-\cos\theta)^2(\sin\theta + (1-\cos\theta))^2}{\frac{\{\sin^2\theta - (1-\cos\theta)^2\}^2}{2+2\tan\theta} \times \theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{2}{9}(1-\cos\theta)^2(\sin\theta + (1-\cos\theta))^2}{\frac{\{2\cos\theta(1-\cos\theta)\}^2}{2+2\tan\theta} \times \theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{2}{9}(1-\cos\theta)^2(\sin\theta + (1-\cos\theta))^2}{\frac{4\cos^2\theta \times (1-\cos\theta)^2}{2+2\tan\theta} \times \theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{2}{9}(\sin\theta + (1-\cos\theta))^2}{\frac{4\cos^2\theta}{2+2\tan\theta} \times \theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{2}{9}(2\sin\theta + 2)(1-\cos\theta)}{\frac{4\cos^2\theta}{2+2\tan\theta} \times \theta^2}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{2}{9}(2\sin\theta + 2)(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\frac{4\cos^2\theta}{2+2\tan\theta} \times \theta^2 \times (1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{2}{9}(2\sin\theta + 2)\sin^2\theta}{\frac{4\cos^2\theta}{2+2\tan\theta} \times \theta^2 \times (1+\cos\theta)}$$

$$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\frac{2}{9}(2\sin\theta + 2)}{\frac{4\cos^2\theta}{2+2\tan\theta} \times (1+\cos\theta)} \times \frac{\sin^2\theta}{\theta^2} = \frac{\left(\frac{4}{9}\right)}{4} \times 1$$

$$= \frac{1}{9}$$

[별해]

$\overline{\mathrm{OH}} = \cos\theta$ 이므로 $\overline{\mathrm{HB}} = \overline{\mathrm{DH}} = 1 - \cos\theta$ 이다.

$\overline{\mathrm{CH}} = \sin\theta$이므로 $\overline{\mathrm{CD}} = \sin\theta + \cos\theta - 1$ 이다.

그리고 $\angle\mathrm{EDC} = \frac{\pi}{4}$, $\angle\mathrm{ECD} = \frac{\pi}{2} - \theta$,

$\angle\mathrm{CED} = \frac{\pi}{4} + \theta$이다. 우리는 삼각형 CED의 세 각의 크기와 한 변의 길이를 알므로 삼각형 CED의 모든 것을 알 수 있다. 특히 이 삼각형의 넓이를 구하는 방법을 아래 [참고]에서 알아보고 해설을 진행하겠다. 다른 문제의 해설에서도 이 [참고]를 이용해 해설할 것이니 반드시 읽고 이해하기를 바란다.

[참고] 사인법칙을 이용해 삼각형의 넓이를 구하는 방법

삼각형 ABC에서 각 A의 대변의 길이가 a, 각 B의 대변의 길이가 b, 각 C의 대변의 길이가 c라고 하자. 이 삼각형의 넓이를 S라고 하면

$S = \frac{1}{2}ab\sin\angle\mathrm{C}$이다. 그런데 사인법칙에서

$\frac{c}{\sin\angle\mathrm{C}} = 2R$이므로 $\sin\angle\mathrm{C} = \frac{c}{2R}$이고, 이를 대입하여 각에 대한 항을 소거하면

$S = \frac{1}{2}ab \times \frac{c}{2R} = \frac{abc}{4R}$이다.

반대로 길이에 대한 항을 소거하자. $a = 2R\sin\angle\mathrm{A}$, $b = 2R\sin\angle\mathrm{B}$, $c = 2R\sin\angle\mathrm{C}$를 대입하면

$S = \frac{8R^3}{4R}\sin\angle\mathrm{A}\sin\angle B\sin\angle C$

$= 2R^2\sin\angle\mathrm{A}\sin\angle B\sin\angle C$

이다.

이번에는 외접원의 반지름 R에 대한 항을 소거하자.

$2R = \frac{c}{\sin\angle\mathrm{C}}$를

$S = \frac{1}{2} \times (2R)^2 \times \sin\angle\mathrm{A}\sin\angle B\sin\angle C$에 대입하면,

$S = \frac{1}{2} \times \frac{c^2}{\sin^2\angle C} \times \sin\angle\mathrm{A}\sin\angle B\sin\angle C$이므로

$S = \frac{c^2\sin\angle\mathrm{A}\sin\angle B}{2\sin\angle C}$이다.

그런데 $\angle\mathrm{A} + \angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C} = \pi$이므로,

$S = \frac{c^2\sin\angle\mathrm{A}\sin\angle B}{2\sin(\angle A + \angle B)}$라고 할 수 있다.

물론 c 대신 a, b를 이용해도 같은 결과가 나온다.

이를 정리하면 아래와 같다.

$S = \frac{abc}{4R} = 2R^2\sin\angle\mathrm{A}\sin\angle\mathrm{B}\sin\angle\mathrm{C}$

$= \frac{a^2\sin\angle\mathrm{B}\sin\angle\mathrm{C}}{2\sin\angle\mathrm{A}} = \frac{a^2\sin\angle\mathrm{B}\sin\angle\mathrm{C}}{2\sin(\angle\mathrm{B} + \angle\mathrm{C})}$

이 문제에 대한 해설을 이어 가자.

$\overline{\mathrm{CD}}=\sin\theta+\cos\theta-1$, $\angle\mathrm{EDC}=\frac{\pi}{4}$,

$\angle\mathrm{ECD}=\frac{\pi}{2}-\theta$, $\angle\mathrm{CED}=\frac{\pi}{4}+\theta$라고 하였으므로

[참고]에서 설명한 공식 $S=\dfrac{c^2\sin\angle\mathrm{A}\sin\angle B}{2\sin\angle C}$를

이용하여 삼각형 CED의 넓이를 구할 수 있다.

구하면

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times(\sin\theta+\cos\theta-1)^2\times\frac{\sin\frac{\pi}{4}\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}$$ 이다.

이제 $g(\theta)$를 구하자. 구하고자 하는 정사각형의 한 변의 길이를 $2k$라고 하고 선분 SR의 중점을 M이라고 하면, $\overline{\mathrm{MR}}=k$, $\overline{\mathrm{RQ}}=2k$이므로

$\overline{\mathrm{HR}}=\sqrt{2}k$, $\overline{\mathrm{RB}}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{\mathrm{HB}}=3\sqrt{2}k$이다.

그런데 이 값은 $1-\cos\theta$ 와 같아야 하므로

$k=\dfrac{1-\cos\theta}{3\sqrt{2}}$ 이다. 그러면 정사각형의 넓이는

$(2k)^2=4k^2$이므로,

$$g(\theta)=4\times\frac{(1-\cos\theta)^2}{18}=\frac{2}{9}\times(1-\cos\theta)^2$$ 이다.

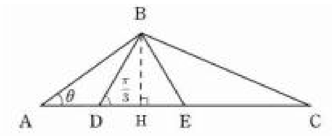
그러므로 구하려는 극한값을 계산하면

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\frac{1}{9}$$ 이다

답: 2번

18. [출제의도] 삼각형의 닮음

점 B에서 선분 DE에 내린 수선의 발 H에 대하여



$\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\angle\mathrm{A}=\theta$ 이므로 $\overline{\mathrm{BH}}=\sin\theta$, $\overline{\mathrm{AH}}=\cos\theta$

이고, $\angle\mathrm{BDH}=\frac{\pi}{3}$에 의해

$\overline{\mathrm{DH}}=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}$, $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{DH}}=\cos\theta-\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}$가

된다. $\triangle ABD$와 $\triangle BEC$는 닮은꼴

이므로 $\dfrac{\mathrm{BE}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}}{\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}}$ 이고

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S_3(\theta)}{S_1(\theta)}=\left(\frac{\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}}{\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}}\right)^2$$ 가 된다. 또한,

$S_2(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DE}}\times\overline{\mathrm{BH}}=\frac{1}{2}\times\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}\times\sin\theta=\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{3}}$ 이다.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S_3(\theta)}{S_1(\theta)}\times\frac{1}{S_2(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}}{\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{\sin^2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}}{\left(\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right)\sin\theta}\right\}^2\times\sqrt{3}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\cos\theta-\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right)}\right\}^2\times\sqrt{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

19. S_1-S_2

선분RP, 선분 RH, 선분 HB, 호 PB로 둘러싸인 부분의 넓이를 $h(\theta)$라 하자.

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)-g(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{(f(\theta)+h(\theta))-(g(\theta)+h(\theta))}{\theta}$$

반원의 중심 O에 대하여

$f(\theta)+h(\theta)=\triangle\mathrm{AOP}$의 넓이 + 부채꼴 OPB의 넓이

$=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin(\pi-2\theta)+\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta=\frac{\sin2\theta}{2}+\theta$ 이때,

$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{PQ}}$이므로 $\angle\mathrm{POB}=\angle\mathrm{POQ}=2\theta$,

$\angle\mathrm{QOB}=4\theta$이다.

$g(\theta)+h(\theta)=$ 부채꼴 OBQ의 넓이 $-\triangle OHQ$의 넓이

$=\frac{1}{2}\times1^2\times4\theta-\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{HQ}}=2\theta-\frac{1}{2}\cos4\theta\times\sin4\theta$

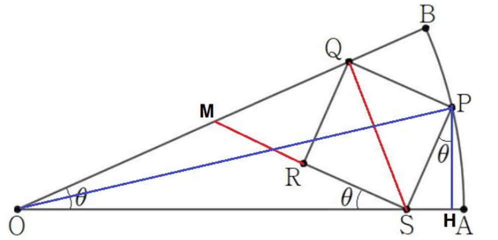
$=2\theta-\frac{1}{4}\sin8\theta$ $\therefore$ $\displaystyle\lim_{\theta\to0+}\frac{(f(\theta)+h(\theta))-(g(\theta)+h(\theta))}{\theta}$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\frac{\sin2\theta}{2}+\theta\right)-\left(2\theta-\frac{1}{4}\sin8\theta\right)}{\theta}$$

$$=\left(\frac{2}{2}+1\right)-\left(2-\frac{8}{4}\right)=2$$

답: 4번

20. [출제의도] 피타고라스, 극한값의 연산



정사각형의 한 변의 길이 x에 대하여

$\overline{\mathrm{PH}}=x\cos\theta$

$\overline{\mathrm{SH}}=x\sin\theta$

$\angle\mathrm{QMR}=2\theta$이므로

$\overline{\mathrm{MS}}=\dfrac{x}{\tan2\theta}+x$

$\overline{\mathrm{OS}}=2\cos\theta\left(\dfrac{x}{\tan2\theta}+x\right)$

삼각형 OPH에서 피타고라스를 사용하면,

$$1^2=(x\cos\theta)^2+\left\{x\sin\theta+2\cos\theta\left(\frac{x}{\tan2\theta}+x\right)\right\}^2$$

$$1^2=x^2\left\{1+4\cos^2\theta\left(\frac{1}{\tan2\theta}+1\right)^2+4\sin\theta\cos\theta\left(\frac{1}{\tan2\theta}+1\right)\right\}$$

양변에 극한을 취해주면

$\displaystyle\lim_{\theta\to0+}1$

$\displaystyle=\lim_{\theta\to0+}\frac{x^2}{\theta^2}$

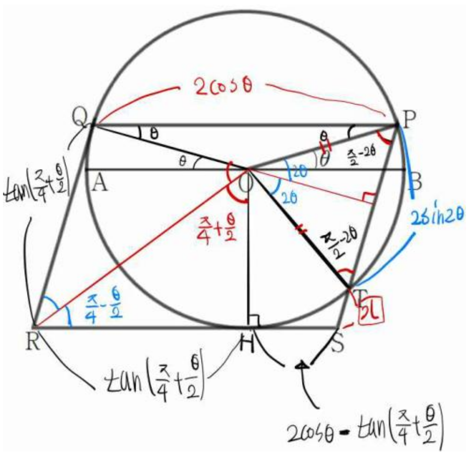
$\displaystyle\times\lim_{\theta\to}\theta^2\left\{1+4\cos^2\theta\left(\frac{1}{\tan2\theta}+1\right)^2+4\sin\theta\cos\theta\left(\frac{1}{\tan2\theta}+1\right)\right\}$

$1=$ 답 $\times1$

답: 3번

21. [출제의도] 할선정리

방법은 매우 많습니다.
대표적인 것은 2가지입니다.

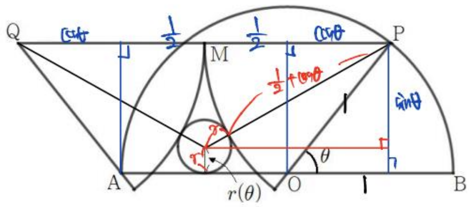


(1).
선분 RS와 원이만나는 접점의 좌표를 M라 하면,
$\overline{SM}^2 = \overline{ST} \times \overline{SP}$ (할선정리)

(2).
평행사변형의 각 관계를 이용하면
$\overline{ST} = \overline{SP} - \overline{PT}$에서 $\overline{SP} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$,
이등변 삼각형 OPR에서 $\overline{PT} = 2\sin 2\theta$를 얻는다.
기타 등등

답: 108

22. [출제의도] 피타고라스



$\left(\frac{1}{2}+\cos\theta+r\right)^2 = \left(\frac{1}{2}+\cos\theta\right)^2 + (\sin\theta - r)^2$

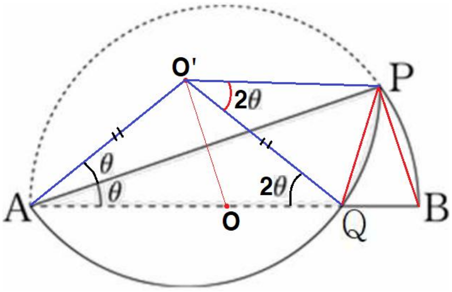
(by 피타고라스)

$\Rightarrow \quad r(1+2\cos\theta) = \sin^2\theta - 2r\sin\theta$

$r = \dfrac{\sin^2\theta}{1+2\cos\theta+2\sin\theta}$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+} \dfrac{r(\theta)}{\theta^2} = \dfrac{1}{3}$ 20

23. [출제의도] 접은 그림유형, 극한값의 연산



이등변삼각형 AO'Q에 대하여
$\overline{AQ} = 2\cos 2\theta$, $f(\theta) = 2 - 2\cos 2\theta$
이등변삼각형 O'QP에 대하여, $\overline{PQ} = g(\theta) = 2\sin\theta$

[별해]
삼각형 PQB에서 사인법칙을 활용하면,
f, g를 따로 구하지 않아도 $\left(\frac{g}{f}\right)$를 구할 수 있다.

답: 30

24. [출제의도] $S_1 - S_2$

각의 이등분선 정리를 사용하고,
$f(\theta) - g(\theta)$를
$\triangle CBE - \triangle CBD$로 해석하면
쉽게 구할 수 있다.

25. [출제의도] 삼각비

첫 번째 그림에서 정사각형 한 변의 길이를 x라 하면
$\sin\theta = x + x\tan\theta$, $x = \dfrac{\sin\theta}{1+\tan\theta}$

두 번째 그림에서 정사각형 한 변의 길이를 y라 하면
$\sin\theta = \sqrt{2}\,y + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y\tan\theta$, $y = \dfrac{\sqrt{2}\sin\theta}{2+\tan\theta}$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)g(\theta)}{\theta^n} = \left\{\lim_{\theta\to 0+}\frac{\left(\frac{\sin\theta}{1+\tan\theta}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{2+\tan\theta}\right)}{\theta^{\frac{n}{2}}}\right\}^2$$

$n=4$일 때, $k = \dfrac{1}{2}$를 얻는다.

26. [출제의도] $S_1 - S_2$

$f+g-h$를 $\triangle ABM - \triangle HMC$로 볼 수 있다.
$\dfrac{\sin\theta}{2} - \dfrac{\sin\theta}{2}\cos\theta = \dfrac{\sin\theta}{2}(1-\cos\theta)$

이므로, $a = \dfrac{1}{4}$

$80a = 20$

27. [출제의도] 특수각

부채꼴의 중심을 O라하고, P에서 선분 QB에 내린 수선의발 H이라하자. 삼각형 OPH에서
$\overline{PH} = \sin 2\theta$, $\overline{OH} = \cos 2\theta$
삼각형 PHQ에 대하여, 변의 길이 비 $1:\sqrt{3}:2$
$\overline{PQ} = \dfrac{2\sin 2\theta}{\sqrt{3}}$, $\overline{QH} = \dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{3}}$

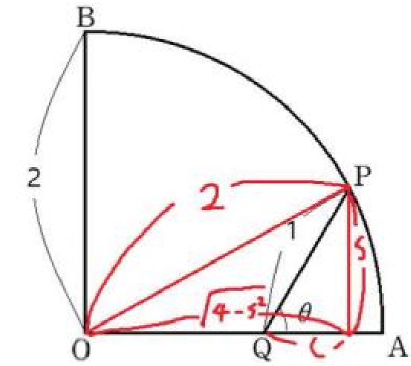
$\overline{OQ} = \overline{OH} - \overline{QH} = \cos 2\theta - \dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{3}}$.

$\overline{QB} = \overline{OB} - \overline{OQ} = 1 - \left(\cos 2\theta - \dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{3}}\right)$

$S(\theta) = \dfrac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{QB} \times \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times \dfrac{2\sin 2\theta}{\sqrt{3}} \times \left(1 - \cos 2\theta + \dfrac{\sin 2\theta}{\sqrt{3}}\right)$

$\lim_{\theta\to 0+} \dfrac{\frac{\sin 2\theta}{2}\left(1-\cos 2\theta + \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{3}}\right)}{\theta^2} = 1 \times \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

28. [출제의도] 피타고라스



$l(\theta) = \sqrt{4-\sin^2\theta} - \cos\theta$

$\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{\sqrt{4-\sin^2\theta} - \cos\theta - 1}{\theta^2}$

$= \lim_{\theta\to 0+}\dfrac{\sqrt{4-\sin^2\theta} - 2 + 1 - \cos\theta}{\theta^2}$

$\lim_{\theta\to 0+}\dfrac{\sqrt{4-\sin^2\theta} - 2}{\theta^2} + \lim_{\theta\to 0+}\dfrac{1-\cos\theta}{\theta^2}$

$= \lim_{\theta\to 0+}\dfrac{-\sin^2\theta}{\theta^2\left(\sqrt{4-\sin^2\theta}+2\right)} + \dfrac{1}{2}$

$= -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

29. [출제의도] 닮음, 코사인법칙

삼각형 ABP와 삼각형 DCP는 2:1 닮음이다.
$\overline{AP} = 2x$, $\overline{PD} = x$라 하고,
$S_1 - S_2$를 공통부분인 삼각형 BPC의 넓이를 배제하고 생각하면,
$\dfrac{1}{2} \times 5 \times x \times \dfrac{\sqrt{7}}{4} = \dfrac{15}{4}\sqrt{7}$, $\quad x = 6$

$\overline{\mathrm{BP}}=2y$, $\overline{\mathrm{PC}}=y$라 하면,
삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의해
$k^2=(y+12)^2+10^2-2\times10\times(y+12)\times\frac{3}{4}$

삼각형 DBC에서 코사인법칙에 의해
$k^2=(2y+6)^2+5^2-2\times5\times(2y+6)\times\frac{3}{4}$

두 식을 연립하면, $y=4$이고
이를 대입하면 $k^2=116$

30. [출제의도] 내접사각형의 성질, 코사인법칙

(가): $\triangle\mathrm{ACD}:\triangle\mathrm{ABC}=1:2$

(나): $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{BC}}=5:8$

(가)+(나): 삼각형 넓이 공식에 의해
$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{15}{2}$

$\overline{\mathrm{AD}}=5k$, $\overline{\mathrm{BC}}=8k$라 하자.
$\angle\mathrm{ABC}=\theta$라 하면, $\cos\theta=\frac{2}{3}k$

삼각형 ABC에서 코사인 법칙에 의해
$\overline{\mathrm{AC}}^2=\left(\frac{15}{2}\right)^2+(8k)^2-2\times\frac{15}{2}\times8k\times\frac{2}{3}k$

삼각형 ADC에서 코사인 법칙에 의해
$\overline{\mathrm{AC}}^2=(6)^2+(5k)^2-2\times6\times5k\times\left(-\frac{2}{3}k\right)$

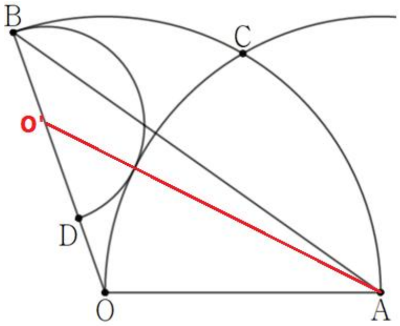
이를 연립하여, $k=\frac{1}{2}$를 얻는다.

이를 대입하면 $\overline{\mathrm{AC}}^2=\frac{209}{4}$

31. [출제의도] S_1-S_2

생략. 21

32. [출제의도]



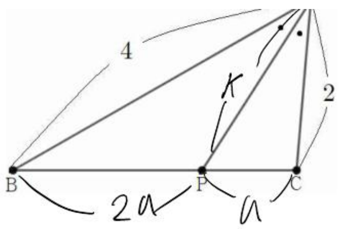
반원의 중심을 O'이라 하고 반지름을 r이라 하면,
삼각형 AOO'의 세 변의 길이는 $1+r$, $1-r$, 1이고
각 $\angle\mathrm{AOO'}=\theta$라 하면, $\cos\theta=-\frac{1}{3}$이다.

($\cos\theta=\frac{1}{3}$로 하면 오답으로 $\frac{1}{5}$이 나오는데 이는 실수가 아닌 실력이다. 이를 의도하고 제작한 문제)

코사인법칙
$(1+r)^2=1^2+(1-r)^2-2(1-r)\times\left(-\frac{1}{3}\right)$

$r=\frac{5}{14}$, $\overline{\mathrm{BD}}=\frac{5}{7}$

33. [출제의도] 각의 이등분선정리, 코사인법칙



$a^2=k^2+4-4k\cos\circ$ ⋯ ㉠

$4a^2=k^2+16-8k\cos\circ$ ⋯ ㉡

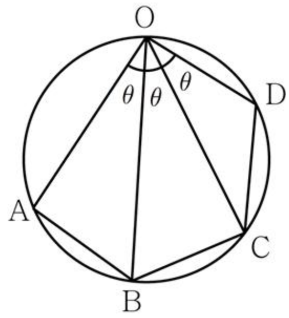
4㉠ - ㉡

$\Rightarrow 3k^2=8k\cos\circ$

$\cos\circ=\frac{3}{8}k$

$120\times\frac{3}{8}=\boxed{45}$

34. [출제의도] 사인법칙, 코사인법칙



$\overline{\mathrm{OA}}=a$, $\overline{\mathrm{OB}}=b$, $\overline{\mathrm{OC}}=c$, $\overline{\mathrm{OD}}=d$라 하자.

$S_1=\frac{1}{2}cd\sin\theta$, $S_2=\frac{1}{2}bc\sin\theta$, $S_3=\frac{1}{2}ab\sin\theta$

$S_1:S_2:S_3=2:4:3$이므로 $cd:bc:ab=2:4:3$ 따라서

$d=\frac{b}{2}$, $c=\frac{4}{3}a$

호AB,호BC,호CD에 대한 원주각이 모두 θ로 같으므로
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}=k$로 같다.

코사인 법칙에 의해 $k=a^2+b^2-2ab\cos\theta$

$=\frac{16}{9}a^2+b^2-\frac{8}{3}ab\cos\theta=\frac{16}{9}a^2+\frac{1}{4}b^2-\frac{4}{3}ab\cos\theta$

$a^2+b^2-2ab\cos\theta=\frac{16}{9}a^2+b^2-\frac{8}{3}ab\cos\theta$에서

$\frac{2}{3}ab\cos\theta=\frac{7}{9}a^2\quad\cos\theta=\frac{7a}{6b}$ ⋯⋯ ㉠

$\frac{16}{9}a^2+b^2-\frac{8}{3}ab\cos\theta=\frac{16}{9}a^2+\frac{1}{4}b^2-\frac{4}{3}ab\cos\theta$

에서 $\frac{4}{3}ab\cos\theta=\frac{3}{4}b^2\quad\cos\theta=\frac{9b}{16a}$ ⋯⋯ ㉡

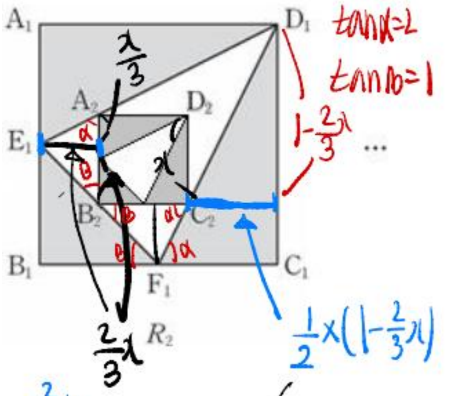
㉠, ㉡에 의하여 $\frac{7a}{6b}=\frac{9b}{16a}\quad 27b^2=56a^2$

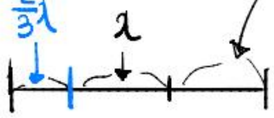
$\frac{27}{56}=\frac{a^2}{b^2}$ ⋯⋯ ㉢

㉠, ㉢에 의하여 $\cos^2\theta=\frac{49a^2}{36b^2}=\frac{49}{36}\times\frac{27}{56}=\frac{21}{32}$,

따라서 $p+q=32+21=53$

35. [출제의도] 삼각비





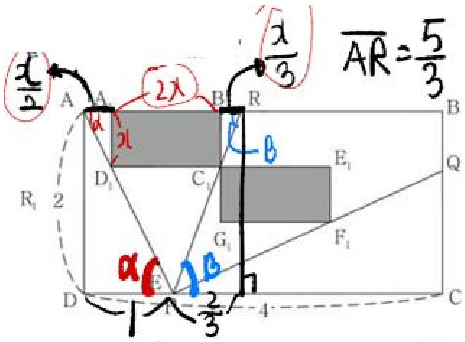
$\frac{2}{3}\lambda+\lambda+\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{3}=2$

$\frac{4}{3}\lambda=\frac{3}{2}$, $\lambda=\frac{9}{8}$

첫항 $=\frac{9}{16}$, 공비 $=\left(\frac{9}{16}\right)^2$

$$\frac{\frac{5}{2}}{1-\left(\frac{9}{16}\right)^2}=\frac{128}{35}$$

36. [출제의도] 삼각비

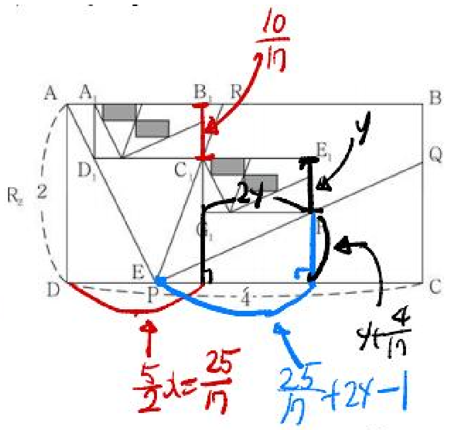


$\tan\alpha=2$, $\tan\beta=3$

$\beta=\alpha+\frac{\pi}{4}$

$\frac{\lambda}{2}+2\lambda+\frac{\lambda}{3}=\frac{5}{3}$

$\lambda=\frac{10}{17}$



$\frac{10}{17}$, y, $y+\frac{4}{17}$

$=2y+\frac{8}{17}$

$=2$, $y=\frac{10}{17}$

$S_1=\frac{400}{17^2}$, 공비 $=\left(\frac{5}{17}\right)^2\times2=\frac{50}{17^2}$

$$\frac{\frac{400}{17^2}}{1-\frac{50}{17^2}}=\frac{400}{239}$$

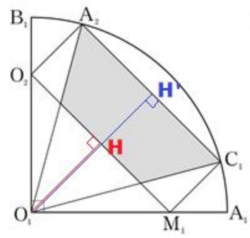
37. [출제의도] 삼각비

$O_1A_2C_1$의 넓이 $\frac{\sqrt{55}}{4}$에서

$\sin(\angle A_2O_1C_1)=\frac{\sqrt{55}}{8}$, $\cos(\angle A_2O_1C_1)=\frac{3}{8}$

삼각형 $A_2O_1C_1$에서 제 2코사인법칙을 사용하면 $\overline{A_2C_1}=\sqrt{5}$, 삼각형 $M_1O_1O_2$에서 $1:1:\sqrt{2}$의 삼각비를

이용하면, $\overline{O_1M_1}=\frac{\sqrt{10}}{2}$이다.



사다리꼴을 구성하는 2개의 이등변삼각형의 높이의 비

$\overline{O_1H}:\overline{O_1H'}=\frac{\sqrt{5}}{2}:\frac{\sqrt{11}}{2}$에 대하여 넓이 비 $5:11$이 성립하므로

$$S_1=\frac{6}{11}\times\triangle O_1A_2C_1=\frac{6}{11}\times\frac{\sqrt{55}}{4}=\frac{3\sqrt{55}}{22}$$

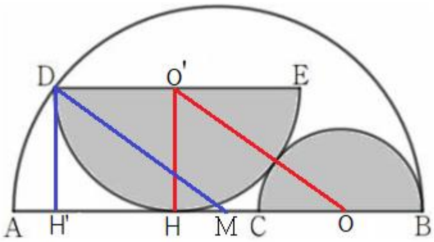
$$\overline{C_1M_1}=\overline{O_1H'}-\overline{OH}=\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{11}}{2}$$

부채꼴의 반지름이 2에서 $\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{11}}{2}$로 바뀌었다.

길이 닮음비 $\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{11}}{4}$, 넓이 비 $1-\frac{\sqrt{55}}{8}$를 얻는다.

$$\frac{\frac{3\sqrt{55}}{22}}{1-\left(1-\frac{\sqrt{55}}{8}\right)}=\frac{\frac{3\sqrt{55}}{22}}{\frac{\sqrt{55}}{8}}=\frac{12}{11}$$

38. [출제의도] 사인법칙, 코사인법칙



$\overline{OO'}=5r$, $\overline{O'H}=3r$에서 피타고라스에 의해

$\overline{HO}=4r$, $\overline{HB}=6r$, $\overline{MB}=5$이므로

$\overline{HM}=6r-5$, $\overline{H'M}=3r$이므로

$\overline{H'M}=9r-5$, $\overline{DH'}=3R$

삼각형 DMH'에서 피타고라스 정리를 사용하면,

$5^2=(9r-5)^2+(3r)^2$, $r=1$

$S_1=\frac{13}{2}\pi$

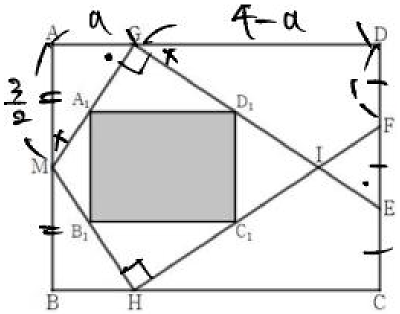
R_2를 보고 공비를 구하기보다는

반지름의 길이가 5인 반원 하나의 넓이를

$S_0=\frac{25\pi}{2}$로 보았을 때, S_0와 S_1을 비교하여 공비

$\frac{13}{25}$을 얻는다. $\frac{\frac{13}{2}\pi}{1-\frac{13}{25}}=\frac{325}{24}\pi$

39. [출제의도] 사인법칙, 코사인법칙



△AMG ∽ △DGE (AA)

$\frac{3}{2}:a=4-a:2$

$a^2-4a+3=0$

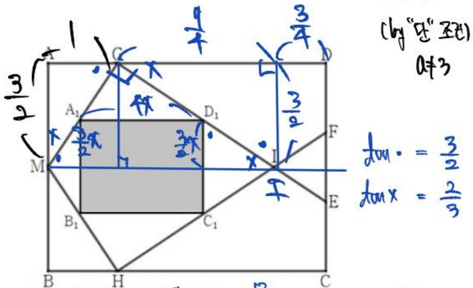
$a\quad -3$

$a\quad -1$

$a=1$

(by "단" 조건)

$a\neq 3$



$4x+x+\frac{9}{4}x=\frac{13}{4}$

$x=\frac{13}{24}$

$\begin{cases} r=\frac{4x}{4}=x \\ a=12x^2 \end{cases}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{a}{1-r^2}=\frac{12x^2}{1-x^2}=\frac{12\times 13^2}{24^2-13^2}=\frac{169}{96}$

40. [출제의도] 덧셈정리 신 유형

$\angle BOC=\alpha$, $\angle AOC=\beta$, $\angle AOB=\theta$라 하자.

$\frac{\triangle OAC}{\triangle OBC}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{OC}\times\sin\beta}{\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{OC}\times\sin\alpha}$에서

$\overline{OA}=\overline{OB}$ 이므로,

(반지름) $=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{2}{3}$ 이다.

$2\sin\alpha=3\sin\beta$에 대하여,

$\tan\alpha$를 구하기 위해 $\sin\beta$도 α에 관한 식으로 바꿔 주자.

$\alpha+\beta+\theta=2\pi$에 대하여, $\beta=2\pi-(\alpha+\theta)$이므로

$2\sin\alpha=3\sin\{2\pi-(\alpha+\theta)\}=-3\sin(\alpha+\theta)$

$\sin\theta=\frac{24}{25}$에서

$\cos\theta=\frac{-7}{25}$ $\left(\frac{\pi}{2}<\angle AOB\text{이므로}\right)$

$2\sin\alpha=-3\sin(\alpha+\theta)=-3(\sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta)$

$=-3\left\{\sin\alpha\times\left(-\frac{7}{25}\right)+\cos\alpha\times\frac{24}{25}\right\}$

$\frac{29}{25}sin\alpha=-\frac{72}{25}cos\alpha$를 얻는다.

$\therefore \tan\alpha=-\frac{72}{29}$

41. [출제의도] 덧셈정리

$\overline{AH}=x$라고 하면 $\overline{HP}=2\sqrt{2}x$, $\overline{PA}=3x$이고,

$\overline{HB}=x+4$, $\overline{PB}=3x+2$이다.

삼각형 PHB에서 피타고라스 정리를 사용.

$(3x+2)^2=(x+4)^2+(2\sqrt{2}x)^2$, $x=3$

$\angle BPH=\alpha$, $\angle APH=\beta$라 하면,

$\angle\ \tan(\alpha-\beta)=\frac{\frac{7}{6\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{1+\frac{7}{6\sqrt{2}}\times\frac{1}{2\sqrt{2}}}=\frac{8\sqrt{2}}{31}$

점 $M(0,m)$에 대하여 $\angle PAB$의 원주각에 의해

$\angle AMB=2(\alpha-\beta)$인데

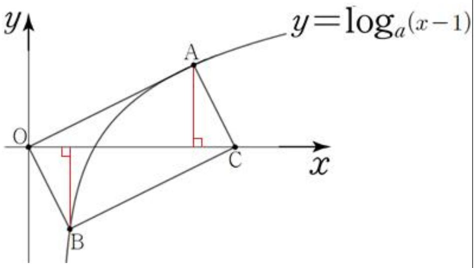
이등변삼각형의 성질에 의해

$\angle(BMO)=\alpha-\beta$

$m\times\angle\ \tan(\alpha-\beta)=\overline{OB}$

$m=\frac{31\sqrt{2}}{8}$이다.

42. [출제의도] 지수로그 방정식 작성



$\angle AOC=\theta$라 하면, $\tan\theta=\frac{1}{2}$이므로,

$A(2t,t)$이라 둘 수 있다.

직사각형의 대각선 OC에 의해 나눠진 두 직각삼각형의 합동 관계에 의해 점 B의 y좌표가 $-t$임을 알 수 있는데

$\angle BOC=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 (200915)

$B\left(\frac{t}{2},-t\right)$이라 둘 수 있다.

주어진 곡선의 함수식에 대입하면,

$\log_a(2t-1)=t,\ \log_a\left(\frac{t}{2}-1\right)=-t$

$\log_a(2t-1)\left(\frac{t}{2}-1\right)=\log_a 1$

에 의해 $t=\frac{5}{2}$를 얻는다.

$\log_a 4=\frac{5}{2}$이므로

$\log_4 a=\frac{2}{5}$, 양변에 2를 곱하면

$\log_2 a=\frac{4}{5}$를 얻는다.

43. [출제의도] 지수그래프의 2배 관계

ㄱ. 직접 그래프를 그려보면 알 수 있다.(참)

ㄴ. $b=a^2$이면 $b^{b_1}=2b_1$에서 $a^{2b_1}=2b_1$,

$b^{b_2}=2b_2$에서 $a^{2b_2}=2b_2$

$a^{a_1}=a_1, a^{a_2}=a_2$이므로 $a_1=2b_1, a_2=2b_2$

따라서 $a_1b_2=a_2b_1$(참)

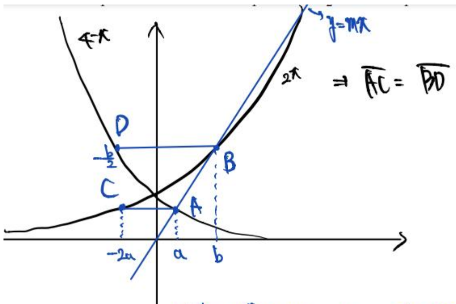
ㄷ. $b=a^2$일 때, $a_1=2b_1$이므로 $R(b_1,a_1)$

따라서 선분PR의 기울기는 0이고 $\angle OPR=\frac{\pi}{4}$

$b>a^2$일 때 점R은 $b=a^2$일 때 점R보다 오른쪽 위에 있으므로 $b=a^2$일 때보다 $\angle OPR$이 커지게 된다.

따라서 $b>a^2$일 때 $\angle OPR>\frac{\pi}{4}$(참)

44. [출제의도] 지수그래프의 2배 관계



$4^{-a}=2^x$인 $x=-2a$: C의 x좌표

$2^b=4^{-x}$인 $x=-\frac{b}{2}$: D의 x좌표

$\overline{AC}=\overline{BD} \Rightarrow 3a=\frac{3}{2}b \Rightarrow b=2a$

$4^{-a}=ma$

$2^b=mb$

$4^a=2ma$

$4^{-a+\frac{1}{2}}=4^a$

$a=\frac{1}{4}$ 　　 $\therefore m=\frac{4^{-a}}{a}=4\cdot 2^{-\frac{1}{2}}$

제작: 우주설 (로물콘 수학스탭)

문의: 로물콘, 포만한, 오르비에서 우주설 검색