해 설 지

출제 및 해설 : 띵수학 연구실 (정다움, 양민석, 김서천)

공통과목				선택과목					
				확률과 통계		미적분		기하	
문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답	문항 번호	정답
1	④	12	①	23	⑤	23	③	23	②
2	⑤	13	④	24	③	24	④	24	③
3	①	14	⑤	25	①	25	⑤	25	④
4	②	15	⑤	26	④	26	⑤	26	①
5	①	16	8	27	②	27	②	27	④
6	②	17	2	28	④	28	①	28	③
7	⑤	18	10	29	63	29	48	29	8
8	②	19	18	30	488	30	7	30	14
9	③	20	94						
10	③	21	180						
11	④	22	144						

문항의 이용을 원하시거나 모의고사 출제 관련 문의사항이 있으신 경우 math_dding@hanmail.net 로 연락주시기 바랍니다.

추후 공개 예정입니다.

공통영역 해설 강의 선택영역 해설 강의

공통영역 해설강의 : https://youtu.be/1tARYOTJrxc
선택영역 해설강의 : 추후 공개 예정입니다.

공통과목

1. 정답) ④ [수학Ⅰ 지수와 로그]

해설 : $3^2 \times 9^{-\frac{1}{2}} = 3^2 \times 3^{-1} = 3^{2-1} = 3$

2. 정답) ⑤ [수학Ⅱ 함수의 극한]

해설 : $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x-3}$

$= \lim_{x \to 3} (x+2) = 5$

3. 정답) ① [수학Ⅰ 삼각함수의 그래프]

해설 : 함수 $f(x) = 3\sin x + a$는 $-1 \leq \sin x \leq 1$에서

$-3 + a \leq 3\sin x + a \leq 3 + a$이다.

최솟값이 -2이므로 $-3 + a = -2$에서 $a = 1$이다.

4. 정답) ② [수학Ⅰ 등차수열]

해설 : $a_3 + a_5 = 8$에서 등차중항에 의해 $a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2} = 4$이고

$a_4 = a_1 + 3d$에서 $3d = a_4 - a_1 = 2$, $d = \frac{2}{3}$이다.

$a_2 = a_1 + d = \frac{8}{3}$

5. 정답) ① [수학Ⅱ 미분계수와 도함수]

해설 : 함수 $f(x) = x^4 - 7x^2 + 3$를 미분하면

$f'(x) = 4x^3 - 14x$이고

$x = 2$를 대입하면 $f'(2) = 32 - 28 = 4$이다.

6. 정답) ② [수학Ⅱ 정적분]

해설 : $\int_1^x (3t^2 - 2)dt = [t^3 - 2t]_1^x$

$= (x^3 - 2x) - (1^3 - 2 \times 1)$

$= x^3 - 2x + 1$

이고 $a = -2$, $b = 1$이다. $a^2 + b^2 = 5$

7. 정답) ⑤ [수학Ⅰ 지수와 로그]

해설 : $4^x=9$에서 $x=\log_4 9=\log_2 3$

$6^y=3$에서 $y=\log_6 3$

$\frac{x}{y}=\frac{\log_2 3}{\log_6 3}=\frac{\log_3 6}{\log_3 2}=\log_2 6$이고 $k=6$이다.

8. 정답) ② [수학Ⅱ 도함수의 활용]

해설 : 점 $(1,2)$에서 함수 $f(x)=-x^3+3x^2+a$에 그은 접선이 x축과 평행하므로 접선의 방정식은 $y=2$이다.

접선의 접점을 $(k, f(k))$라 할 때, $f(k)=2$, $f'(k)=0$이다.

$f'(k)=-3k^2+6k=0$에서 $k=0$ 또는 $k=2$이고 $f(k)=2$에서

$k=0$일 때, $f(0)=a=2$이고
$k=2$일 때, $f(2)=a+4=2$에서 $a=-2$이다.

a는 양수이므로 $a=2$이고
$f(3)=-3^3+3\times 3^2+2=2$이다.

9. 정답) ③ [수학Ⅱ 정적분의 활용]

해설 : 두 곡선 $y=x^3+x+1$, $y=x^2+2x$의 교점의 x좌표는 방정식 $x^3+x+1=x^2+2x$의 근과 같고
$x^3-x^2-x+1=(x+1)(x-1)^2=0$에서
$x=-1$, $x=1$이다.

두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\{(x^3+x+1)-(x^2+2x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(x^3-x^2-x+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1}$$
$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1\right)$$
$$=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$$

10. 정답) ③ [수학Ⅰ 수학적 귀납법]

해설 : 주어진 등식의 양변에 $n=2$을 대입하면

$a_2a_3=a_1\times a_2\times(a_3)^{2-1}$

이고, $a_1=1$이다.

주어진 등식의 양변에 $n=3$을 대입하면

$a_3a_4=a_1\times a_2\times(a_3)^{3-1}$

이고, $a_2a_3=a_4=2$이다.

주어진 등식의 양변에 $n=4$을 대입하면

$a_4a_5=a_1\times a_2\times(a_3)^{4-1}$

에서 $a_4a_5=a_4(a_3)^2$, $a_5=(a_3)^2=\sqrt[3]{16}$이고

$a_3=\sqrt[3]{4}=2^{\frac{2}{3}}$, $a_2a_3=a_4$에서 $a_2=2^{\frac{1}{3}}$이다.

$$a_na_{n+1}=a_1\times a_2\times(a_3)^{n-1}$$
$$=2^{\frac{1}{3}}\times\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{n-1}=2^{\frac{2}{3}n-\frac{1}{3}}$$

이고

$\sum_{n=1}^{20}\log_2(a_n)=\sum_{n=1}^{10}(\log_2 a_{2n-1}+\log_2 a_{2n})$에서

$$\sum_{n=1}^{20}\log_2(a_n)=\sum_{n=1}^{10}\log_2 a_{2n-1}a_{2n}$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\log_2\left(2^{\frac{4}{3}n-1}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{4}{3}n-1\right)=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{10}n-\sum_{n=1}^{10}1$$
$$=\frac{4}{3}\times\frac{10\times 11}{2}-10=\frac{190}{3}$$

이다.

박스 내의 풀이에 따라 $p=2$, $q=2^{\frac{2}{3}}$, $r=\frac{190}{3}$이고

$\frac{q^3}{p}+r=\frac{196}{3}$이다.

11. 정답) ④ [수학Ⅰ 삼각함수의 그래프]

해설 : 함수 $y=\left|4\sin\frac{\pi}{8}x\right|$ $(0\le x\le 12)$의 주기는

함수 $y=4\sin\frac{\pi}{8}x$의 주기의 절반이다.

이 때, $y=4\sin\frac{\pi}{8}x$의 주기가 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{8}}=16$이므로

$y=\left|4\sin\frac{\pi}{8}x\right|$의 주기는 8이다.

삼각함수 그래프의 대칭성에 의하여

그래프에서 두 점 A와 C의 x좌표 사이의 간격이

$y=\left|4\sin\frac{\pi}{8}x\right|$의 주기와 같으므로 $\overline{AC}=8$이다.

$\overline{AC}:\overline{BC}=3:2$에서 $\overline{BC}=\frac{16}{3}$이고 $\overline{AB}=\frac{8}{3}$이다.

점 A의 좌표가 $\left(\frac{8}{3},\,k\right)$이므로 $y=\left|4\sin\frac{\pi}{8}x\right|$에 대입하면

$k=\left|4\sin\frac{\pi}{8}\times\frac{8}{3}\right|=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$이다.

$k^2+\overline{AC}=12+8=20$이다.

12. 정답) ① [수학Ⅱ 도함수의 활용 + 부정적분]

해설 : 점 P의 시각 t에서의 속도를 $v(t)$라 할 때,

$$v(t)=\int a(t)dt=\int(3t^2-3t-6)\,dt$$
$$=t^3-\frac{3}{2}t^2-6t+C$$

이다. (C는 적분상수)

$v'(t)=a(t)=3(t-2)(t+1)$이므로

함수 $v(t)$는 $t=2$에서 극솟값 $v(2)=-10+C$을 가진다.

$v(0)=C$이므로

구간 $(0,\,\infty)$ 내에서의 최솟값은 $v(2)=-10+C$이고

점 P의 운동방향이 바뀌지 않으므로

$v(2)=-10+C\ge 0$에서 $C\ge 10$이다.

$v(4)=16+C=k\ge 26$에서 실수 k의 최솟값은 26이다.

13. 정답) ④ [수학Ⅰ 지수함수와 로그함수]

해설 : $n+3<a+\log_2(2^{n-a}+1)$에서

$n-a+3<\log_2(2^{n-a}+1)$이고

$2^{n-a+3}<2^{n-a}+1$이다.

양변에 2^a를 곱해주면

$2^{n+3}<2^n+2^a$에서

$2^n(2^3-1)<2^a$이고

$7\times2^n=2^{n+\log_2 7}<2^a$에서 $n+\log_2 7<a$이다.

$n<a-\log_2 7$에서

이를 만족시키는 자연수 n의 개수가 m이 되도록 하는

실수 a의 범위는 $m<a-\log_2 7\le m+1$에서

$m+\log_2 7<a\le m+1+\log_2 7$이고

이에 따라 $f(m)=m+1+\log_2 7=\log_2(2^{m+1}\times 7)$이다.

$$\sum_{m=1}^{5}2^{f(m)}=\sum_{m=1}^{5}2^{m+1}\times7=7\sum_{m=1}^{5}2^{m+1}$$
$$=7\times\frac{2^2(2^5-1)}{2-1}=868$$

14. 정답) ⑤ [수학Ⅱ 함수의 연속]

해설 : 모든 실수 x에 대하여 $\{f(x)-2x\}\{f(x)-x^2-1\}=0$이므로

구간에 따라 함수 $f(x)$는 $2x$ 또는 x^2+1이다.

이 때, $y=x^2+1$와 $y=2x$는 $x=1$에서 접하고,

모든 실수 x에 대하여 $2x\le x^2+1$이다.

(가)에 의해 함수 $f(x)$는

극한값과 함숫값이 $x=a$, $x=b$에서 다르므로

$x=a$일 때와, $x\to a$ 때의 함수식이 다르고

$x=b$일 때와, $x\to b$ 때의 함수식이 다르다.

(나)에서 $\lim_{x\to a}f(x)+4=f(a)$이므로

$\lim_{x\to a}f(x)\le f(a)$임을 알 수 있고, $2x\le x^2+1$이므로

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}2x=2a$, $f(a)=a^2+1$이다.

이를 $\lim_{x\to a} f(x)+4=f(a)$에 대입하면 $2a+4=a^2+1$이고,

$a^2-2a-3=0$에서 $a=-1$ 또는 $a=3$이다.

(다)에서 $\lim_{x\to b} f(x)-4=f(b)$이므로

$f(b)\le \lim_{x\to b} f(x)$임을 알 수 있고, $2x\le x^2+1$이므로

$\lim_{x\to b} f(x)=\lim_{x\to b}(x^2+1)=b^2+1$, $f(b)=2b$이다.

이를 $\lim_{x\to b} f(x)-4=f(b)$에 대입하면 $b^2+1-4=2b$이고,

$b^2-2b-3=0$에서 $b=-1$ 또는 $b=3$이다.

a, b는 서로 다른 두 실수이므로

$a=-1$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=-1$이다.

i) $a=-1$, $b=3$인 경우

(나)에 의해 $x=-1$의 근방에서 $f(x)=2x$,

$x=-1$에서 $f(x)=x^2+1=2$이고

(다)에 의해 $x=3$의 근방에서 $f(x)=x^2+1$,

$x=3$에서 $f(x)=2x=6$이다.

이 때, $x\to -1+$일 때는 $f(x)=2x$

$x\to 3-$일 때는 $f(x)=x^2+1$이고

(가) 조건에 의해

$x=a$, $x=b$가 아닌 불연속점은 없으므로

$y=x^2+1$와 $y=2x$는 $x=1$에서 접한다는 사실에서

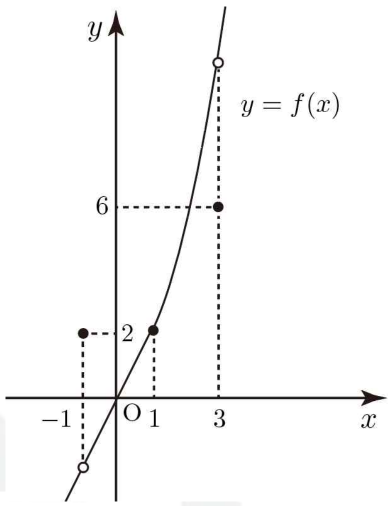
열린구간 $(-1,\ 1)$에서 $f(x)=2x$

열린구간 $(1,\ 3)$에서 $f(x)=x^2+1$임을 알 수 있다.

위 내용을 토대로 구간별로 $f(x)$를 정의해보면

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (x<-1 \text{ 또는 } -1<x<1) \\ 2 & (x=-1) \\ x^2+1 & (1\le x<3 \text{ 또는 } x>3) \\ 6 & (x=3) \end{cases}$$

이다.



이 때, 함수 $f(x)$의 최솟값은 존재하지 않는다.

ii) $a=3$, $b=-1$인 경우

(나)에 의해 $x=-1$의 근방에서 $f(x)=x^2+1$,

$x=-1$에서 $f(x)=2x=-2$이고

(다)에 의해 $x=3$의 근방에서 $f(x)=2x$,

$x=3$에서 $f(x)=x^2+1=10$이다.

이 때, $x\to -1+$일 때는 $f(x)=x^2+1$

$x\to 3-$일 때는 $f(x)=2x$이고

(가) 조건에 의해

$x=a$, $x=b$가 아닌 불연속점은 없으므로

$y=x^2+1$와 $y=2x$는 $x=1$에서 접한다는 사실에서

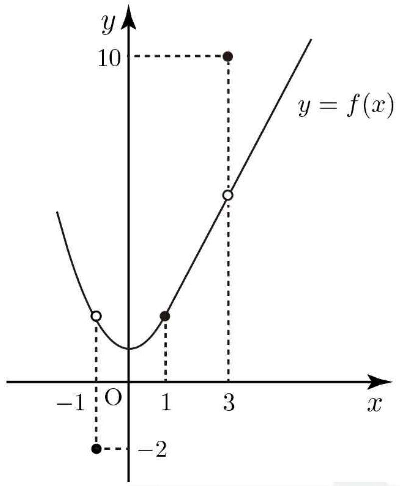
열린구간 $(-1,\ 1)$에서 $f(x)=x^2+1$

열린구간 $(1,\ 3)$에서 $f(x)=2x$임을 알 수 있다.

위 내용을 토대로 구간별로 $f(x)$를 정의해보면

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x<-1 \text{ 또는 } -1<x<1) \\ -2 & (x=-1) \\ 2x & (1\le x<3 \text{ 또는 } x>3) \\ 10 & (x=3) \end{cases}$$

이다.



함수 $f(x)$ 는 $x=-1$에서 최솟값 $c=-2$를 가진다.

i), ii)에 따라 $a=3$, $b=-1$, $c=-2$이고

$a+bc=3+2=5$이다.

15. 정답) ⑤ [수학Ⅱ 도함수의 활용 + 정적분]

해설 : 함수 $g(t)$를 구간별로 구해보면

$t<3$일 때,

$f(t)=\lim_{x\to t-}f(x)=t^2|t-3|=-t^2(t-3)$

$\lim_{x\to t+}f(x)=t^2(t-3)+a$이므로

$-t^2(t-3)=t^2(t-3)+a$에서 $g(t)=-2t^2(t-3)$이다.

$t\ge 3$일 때,

$f(t)=\lim_{x\to t-}f(x)=t^2|t-3|=t^2(t-3)$

$\lim_{x\to t+}f(x)=t^2(t-3)+a$이므로

$t^2(t-3)=t^2(t-3)+a$에서 $g(t)=0$이다.

이에 따라, 함수 $g(t)$는

$$g(t)=\begin{cases}-2t^2(t-3) & (t<3)\\ 0 & (t\ge 3)\end{cases}$$

이다.

ㄱ. $g(5)=0$이다. (참)

ㄴ. $t\ge 3$일 때,

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 미분 가능하므로

보기 ‘ㄴ’ 을 만족시키지 못한다.

$t<3$일 때,

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 미분가능한지 확인해보면

$x\to 3-$에서 $f'(x)=-3x^2+6x$이고 미분계수는 -9

$x\to 3+$에서 $f'(x)=3x^2-6x=9$이고 미분계수는 9

에서 $\lim_{x\to 3-}f'(x)\ne\lim_{x\to 3+}f'(x)$이므로

$x=3$에서 미분가능하지 않다.

$x=t$에서는 미분 가능해야 하므로

이를 만족시키는 t는

$f'(t)=0$을 만족시키는 t이고 $t=0$ 또는 $t=2$이다.

$g(0)+g(2)=0+8=8$이다. (참)

ㄷ. 구간 $[\alpha, 2\alpha]$에서 함수 $g(x)-f(x)$를 구해보면

$x<3$에서

$$\begin{aligned}g(x)-f(x)&=-2x^2(x-3)-x^2|x-3|\\&=-2x^2(x-3)+x^2(x-3)\\&=-x^2(x-3)\end{aligned}$$

이고

$x\ge 3$에서

$$\begin{aligned}g(x)-f(x)&=0-x^2|x-3|\\&=0-x^2(x-3)\\&=-x^2(x-3)\end{aligned}$$

이므로

함수 $g(x)-f(x)=-x^2(x-3)$이다.

$$\int_{\alpha}^{2\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx=\int_{\alpha}^{2\alpha}(3x^2-x^3)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_{\alpha}^{2\alpha}$$

$$=-\frac{15}{4}\alpha^4+7\alpha^3=0$$

에서 $\alpha=\frac{28}{15}$이다. (참)

16. 정답) 8 [수학Ⅱ 미분계수와 도함수]

해설 : 함수 $g(x)=(2x-1)f(x)$를 미분하면
$g'(x)=2f(x)+(2x-1)f'(x)$이다.

위 식에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면 $g'\left(\frac{1}{2}\right)=2f\left(\frac{1}{2}\right)=8$이다.

17. 정답) 2 [수학Ⅰ 삼각함수]

해설 : $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{5}{12}$에서 $\sin\theta=\frac{5}{12}\cos\theta$이고

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\frac{25}{144}\cos^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin\theta=-\frac{5}{13}$, $\cos\theta=-\frac{12}{13}$이다.

$2\sin\theta-3\cos\theta=-\frac{10}{13}+\frac{36}{13}=\frac{26}{13}=2$이다.

18. 정답) 10 [수학Ⅰ 지수함수와 로그함수]

해설 : $\log_2(x^2-x-2)\le 1+\log_2(x+4)$에서

진수의 조건에 의해
$x^2-x-2>0$에서 $x<-1$ 또는 $x>2$
$x+4>0$에서 $x>-4$
이고 합치면 $-4<x<-1$ 또는 $x>2$ 이다.

$\log_2(x^2-x-2)\le 1+\log_2(x+4)$에서
$\log_2(x^2-x-2)\le \log_2(2x+8)$이고
$x^2-x-2\le 2x+8$
$x^2-3x-10\le 0$에서 $-2\le x\le 5$이다.

$-4<x<-1$ 또는 $x>2$와
$-2\le x\le 5$의 공통범위는
$-2\le x<1$ 또는 $2<x\le 5$이다.

범위 내의 가능한 모든 정수 x는 -2, 3, 4, 5이고
합은 $-2+3+4+5=10$이다.

19. 정답) 18 [수학Ⅱ 함수의 극한 + 부정적분]

해설 : 다항함수 $f(x)$의 차수를 n이라 할 때,

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2+3}{x^2f(x)+1}=4$에서 극한이 수렴했으므로
분자와 분모의 차수가 같아야 한다.

분자의 차수는 $2n$이고 분모의 차수는 $n+2$이므로
$2n=n+2$에서 $n=2$이다.

$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2+3}{x^2f(x)+1}=4$에서 극한값이 4이므로
$f(x)=ax^2+\cdots$라 두면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2+3}{x^2f(x)+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{\{f(x)\}^2}}{\frac{x^2}{f(x)}+\frac{1}{\{f(x)\}^2}}=\frac{1}{\frac{1}{a}}=a$$에서

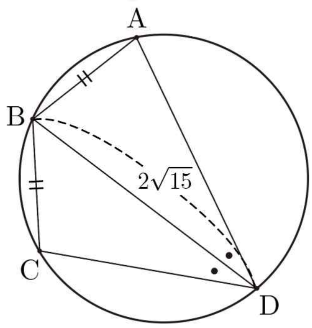
$a=4$이다.

이에 따라 $f'(x)=2ax+b=8x+b$로 둘 수 있고
$f'(1)=1$에서 $f'(x)=8x-7$이다.

$f(x)=\int f'(x)dx=4x^2-7x+C$ 이고
$f(3)-f(1)=15-(-3)=18$이다.

20. 정답) 94 [수학Ⅰ 삼각함수의 활용]

해설 :



$\cos(\angle\mathrm{BAD})=\frac{1}{4}$에서

$1-\cos^2(\angle\mathrm{BAD})=\sin^2(\angle\mathrm{BAD})$이므로

$\sin(\angle \mathrm{BAD}) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$이다.

삼각형 ABD에 대하여 사인 법칙을 적용하면

$\dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\angle \mathrm{BAD})} = \dfrac{\overline{\mathrm{BD}}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = 8$에서 $\overline{\mathrm{BD}} = 2\sqrt{15}$이다.

삼각형 ABD에 대하여 코사인 법칙을 적용하면

$\overline{\mathrm{BD}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AD}}^2 - 2\overline{\mathrm{AB}} \times \overline{\mathrm{AD}} \cos(\angle \mathrm{BAD})$

$60 = k^2 + 4k^2 - 4k^2 \times \dfrac{1}{4}$

$\quad = 4k^2$

에서 $k^2 = 15$이다.

삼각형 BCD에 대하여 사인 법칙을 적용하면

$\dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle \mathrm{BDC})} = \dfrac{k}{\sin(\angle \mathrm{BDC})} = 8$에서

$\sin^2(\angle \mathrm{BDC}) = \dfrac{k^2}{8^2} = \dfrac{15}{64}$이고

$p = 64,\ q = 15,\ k^2 + p + q = 94$이다.

+ 그림에서 원주각의 성질에 의해 $\angle \mathrm{ADB} = \angle \mathrm{BDC}$이므로
마지막 $\sin^2(\angle \mathrm{BDC})$을 구하는 과정에서
삼각형 ABD에 대하여 사인 법칙을 적용한 후
$\sin(\angle \mathrm{ADB}) = \sin(\angle \mathrm{BDC})$임을 이용해도 됩니다.

21. 정답) 180 [수학Ⅱ 도함수의 활용 + 정적분]

해설 : 함수 $f(x)$가 $y = -1$에 접하는 점의 x좌표를
$x = \alpha$라 할 때,

최고차항의 계수가 1인 이차함수의 꼭짓점이
$(\alpha, -1)$인 상황이므로
$f(x) = (x-\alpha)^2 - 1$으로 둘 수 있다.

함수 $g(x)$가 x축에 접하는 점의 x좌표를
$x = \beta$라 할 때,

$f(2) > 0$이므로 $\beta \neq 2$이고
$g(\beta) = 0,\ g'(\beta) = 0,\ g(2) = 0$에서

$g(x) = \dfrac{1}{3}(x-\beta)^2(x-2)$로 둘 수 있다.

$g'(x) = f(x) = (x-\beta)\left(x - \dfrac{4+\beta}{3}\right)$에서

함수 $g(x)$는 $x = \beta,\ x = \dfrac{4+\beta}{3}$에서 극값을 가지고

$f(x) = (x-\alpha)^2 - 1 = (x-\alpha-1)(x-\alpha+1)$에서
함수 $g(x)$는 $x = \alpha - 1,\ x = \alpha + 1$에서 극값을 가진다.

즉, $x = \alpha - 1,\ x = \alpha + 1$와 $x = \beta,\ x = \dfrac{4+\beta}{3}$은
같은 x좌표이다.

i) $\beta < \dfrac{4+\beta}{3}$인 경우

$\beta = \alpha - 1$이고 $\dfrac{4+\beta}{3} = \alpha + 1$이다.

위 두 식을 연립하면 $\alpha = 0,\ \beta = -1$이고
$f(x) = (x-1)(x+1),\ g(x) = \dfrac{1}{3}(x+1)^2(x-2)$이다.

이에 따라 $g(8) = \dfrac{1}{3} \times 9^2 \times 6 = 162$이다.

ii) $\beta > \dfrac{4+\beta}{3}$인 경우

$\beta = \alpha + 1$이고 $\dfrac{4+\beta}{3} = \alpha - 1$이다.

위 두 식을 연립하면 $\alpha = 4,\ \beta = 5$이고
$f(x) = (x-3)(x-5),\ g(x) = \dfrac{1}{3}(x-5)^2(x-2)$이다.

이에 따라 $g(8) = \dfrac{1}{3} \times 3^2 \times 6 = 18$이다.

iii) $\beta = \dfrac{4+\beta}{3}$인 경우

$\alpha - 1 \neq \alpha + 1$에서 $\beta \neq \dfrac{4+\beta}{3}$이므로 성립하지 않는다.

i), ii), iii)에 따라 가능한 $g(8)$의 값은 162, 18이고
합은 180이다.

* 별해 : 삼차함수 그래프의 특징을 이용한 풀이

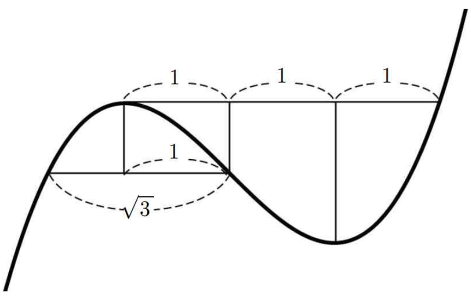
(가) 조건에서 $f(x)=(x-k)^2-1$라 두었을 때,
방정식 $f(x)=0$의 두 근의 간격의 차가 2이다.

두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ 라 두면 $\beta-\alpha=2$인 상황이다.

이 때, $\alpha,\ \beta$는 함수 $g(x)$가 극값을 가지는 x이고
$g'(2)=f(2)>0,\ g(2)=0$에서

함수 $g(x)$는 $g(x)=\frac{1}{3}(x-\alpha)^2(x-2)$

또는 $g(x)=\frac{1}{3}(x-\beta)^2(x-2)$이다.



삼차함수의 그래프가 변곡점을 기준으로 대칭이고
위 그림과 같은 거리 비율관계를 가지므로

$\alpha=2-3=-1,\ \beta=2+3=5$이고

함수 $g(x)$는 $g(x)=\frac{1}{3}(x+1)^2(x-2)$

또는 $g(x)=\frac{1}{3}(x-5)^2(x-2)$이다.

이에 따라 가능한 $g(8)$의 값은 $162,\ 18$이고
합은 $162+18=180$이다.

22. 정답) 144 [수학Ⅰ 등차수열]

해설 : 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 할 때,

(나) 식에서 (가) 식을 빼면

$$\begin{aligned}b_{2n}-b_{2n-1}&=(a_3\times a_{2n-1}+2)-(a_2\times a_{2n}+3)\\&=(a_2+d)(a_{2n}-d)-a_2\times a_{2n}-1\\&=d(a_{2n}-a_2-d)-1\\&=d(a_1+(2n-1)d-(a_1+d)-d)-1\\&=d^2(2n-3)-1\end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{20}(-1)^n b_n&=(b_2-b_1)+\cdots+(b_{20}-b_{19})\\&=\sum_{n=1}^{10}(b_{2n}-b_{2n-1})\\&=\sum_{n=1}^{10}(2d^2n-3d^2-1)\\&=2d^2\sum_{n=1}^{10}n-\sum_{n=1}^{10}(3d^2+1)\\&=2d^2\times\frac{10\times11}{2}-30d^2-10\\&=80d^2-10=10\end{aligned}$$

에서 $d^2=\frac{1}{4},\ d=\pm\frac{1}{2}$임을 알 수 있다.

이 때, $b_{2n}-b_{2n-1}=\frac{1}{2}n-\frac{7}{4}$이다.

ⅰ) $d=\frac{1}{2}$인 경우

(가) 식에 $n+1$을 대입하면 $b_{2n+1}=a_2\times a_{2n+2}+3$
$=a_2\times(a_{2n}+1)+3$
$=b_{2n-1}+a_2$

이고 어떤 자연수 m에 대하여 $b_{2m}=b_{2m+1}$이므로

$b_{2m}=b_{2m-1}+a_2$에서

$b_{2m}-b_{2m-1}=\frac{1}{2}m-\frac{7}{4}=a_2$임을 알 수 있다.

이 때, $a_m=\frac{3}{4}m+1$이므로

$a_m - a_2 = \left(\frac{3}{4}m+1\right)-\left(\frac{1}{2}m-\frac{7}{4}\right)=\frac{1}{4}m+\frac{11}{4}$이고

$a_m - a_2 = \left(a_1+\frac{1}{2}(m-1)\right)-\left(a_1+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}(m-2)$

이므로 $\frac{1}{4}m+\frac{11}{4}=\frac{1}{2}(m-2)$에서 $m=15$이다.

ii) $d=-\frac{1}{2}$인 경우

(가) 식에 $n+1$을 대입하면 $b_{2n+1}=a_2\times a_{2n+2}+3$

$=a_2\times(a_{2n}-1)+3$

$=b_{2n-1}-a_2$

이고 어떤 자연수 m에 대하여 $b_{2m}=b_{2m+1}$이므로

$b_{2m}=b_{2m-1}-a_2$에서

$b_{2m}-b_{2m-1}=\frac{1}{2}m-\frac{7}{4}=-a_2$임을 알 수 있다.

이 때, $a_m=\frac{3}{4}m+1$이므로

$a_m - a_2 = \left(\frac{3}{4}m+1\right)+\left(\frac{1}{2}m-\frac{7}{4}\right)=\frac{5}{4}m-\frac{3}{4}$이고

$a_m - a_2 = \left(a_1+\frac{1}{2}(m-1)\right)-\left(a_1+\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{1}{2}(m-2)$

이므로 $\frac{5}{4}m-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}(m-2)$에서 $m=1$이고

이 경우 조건을 만족시키는 2 이상의 자연수 m은 없다.

i), ii)에 따라 $m=15$이고 $a_n=\frac{1}{2}n+\frac{19}{4}$이다.

$$\sum_{n=1}^{m+1}a_n=\sum_{n=1}^{16}a_n=\frac{\frac{21}{4}+\frac{51}{4}}{2}\times16=144\text{이다.}$$

확률과 통계

23. 정답) ⑤ [확률과 통계 경우의 수 | 중복순열]

해설 : ${}_3\Pi_4=3^4=81$

24. 정답) ③ [확률과 통계 경우의 수 | 같은 것을 포함한 순열]

해설 : 전체 경우의 수는 $\frac{7!}{4!2!}=105$이고

b끼리 이웃하는 경우의 수는 $\frac{6!}{4!}=30$이므로

구하는 경우의 수는 $105-30=75$이다.

25. 정답) ① [확률과 통계 경우의 수 | 중복조합]

해설 : $2^a\times2^b\times2^c=2^{a+b+c}=2^6$에서

음이 아닌 정수 a, b, c에 대하여

부정방정식 $a+b+c=6$을 만족시키는

순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수를 구해보면

${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=\frac{8\times7}{2\times1}=28$이다.

26. 정답) ④ [확률과 통계 경우의 수 | 중복순열 + 중복조합]

해설 : 서로 같은 사탕 6개를 세 학생이 최소 1개 이상

나누어가지는 경우의 수는 ${}_3H_3={}_5C_3=\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$이다.

서로 다른 초콜릿 4개를 세 학생에게

나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$이고

모든 학생이 초콜릿을 받는 경우는 세 학생에게

$(2,\ 1,\ 1)$과 같이 초콜릿이 분배되었을 때이므로

초콜릿을 2개 받을 학생을 고르는 경우의 수 ${}_3C_1=3$

초콜릿 2개를 고르는 경우의 수 ${}_4C_2=6$

초콜릿을 1개 받는 두 학생에게

남은 초콜릿을 나눠주는 경우의 수 $2!=2$

에서 초콜릿을 나눠주는 총 경우의 수는

여사건을 이용하면 $81-3\times6\times2=45$이다.

위 과정에 따라 구하는 경우의 수는 $10\times45=450$이다.

27. 정답) ② [확률과 통계 경우의 수 | 원순열]

해설 : 6개 영역에 6개 색깔을 다 이용해 칠하는 경우의 수는

돌렸을 때, 3번 같은 모양이 나오므로 $\frac{6!}{3}=240$이다.

이 중 빨강과 파랑이 이웃하기 위해서는
정삼각형 내부의 2개 영역에 빨강과 파랑이 칠해지거나

정삼각형 외부와 내부의 영역에
정삼각형의 변을 기준으로 맞닿는 곳에
빨강과 파랑이 칠해져야 한다.

ⅰ) 내부 영역에만 빨강과 파랑이 칠해지는 경우

빨강과 파랑이 칠해진 두 영역을 제외한 나머지
4개 영역에 4개의 색을 칠하는 경우의 수 $4!=24$
빨강과 파랑이 자리를 바꾸는 경우의 수 $2!=2$

에서 전체 경우의 수는 $24\times2=48$이다.

ⅱ) 외부/내부의 영역에 빨강과 파랑이 칠해지는 경우

빨강과 파랑이 칠해진 두 영역을 제외한 나머지
4개 영역에 4개의 색을 칠하는 경우의 수 $4!=24$
빨강과 파랑이 자리를 바꾸는 경우의 수 $2!=2$

에서 전체 경우의 수는 역시 $24\times2=48$이다.

빨강과 파랑이 이웃하지 않는 경우의 수를
구하라고 했으므로 여사건을 이용하면

ⅰ), ⅱ)에 따라 구하는 경우의 수는
$240-48-48=144$이다.

28. 정답) ④ [확률과 통계 경우의 수 | 순열과 조합]

해설 : 전체 집합 U를 각각 서로소인 4개의 집합으로 나눠보면
$U-(A\cup B)$, $A\cap B^C$, $A^C\cap B$, $A\cap B$이다.

2는 $A\cap B^C$를 제외한 3개의 집합에 들어갈 수
있으므로 가능한 경우는 3개다.

3는 $A^C\cap B$를 제외한 3개의 집합에 들어갈 수
있으므로 가능한 경우는 3개다.

4는 $A\cap B^C$를 제외한 3개의 집합에 들어갈 수
있으므로 가능한 경우는 3개다.

5는 4개의 집합 모두에 들어갈 수
있으므로 가능한 경우는 4개다.

6는 $A\cap B^C$, $A^C\cap B$를 제외한 2개의 집합에
들어갈 수 있으므로 가능한 경우는 2개다.

구하는 순서쌍의 개수는 $3\times3\times3\times4\times2=216$이다.

29. 정답) 63 [확률과 통계 경우의 수 | 중복조합]

해설 : $a+b=A$, $c+d=B$라 두면
$a+b+c+d=8$에서 $A+B=8$이다.

(가) 조건인 $0<\frac{c+d}{a+b}<1$에서

$0<\frac{B}{A}<1$이고 $0<B<A$이다.

이에 따라 순서쌍의 개수를 구해보면

ⅰ) $A=7$, $B=1$에서
$a+b=7$, $c+d=1$가 되므로 ${}_2H_7\times{}_2H_1={}_8C_7\times{}_2C_1$
$=8\times2=16$

ⅱ) $A=6$, $B=2$에서 $a=b=3$인 경우 3가지를 제외하고
위와 같은 방식으로 $({}_2H_6-1)\times{}_2H_2=({}_7C_6-1)\times{}_3C_2$
$=6\times3=18$

ⅲ) $A=5$, $B=3$에서
위와 같은 방식으로 ${}_2H_5\times{}_2H_3={}_6C_5\times{}_4C_3$
$=6\times4=24$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 따라
$a\neq b$일 때, $16+18+24=58$가지이다.

(나) 조건에서 $a+b+c+d=2a+2c=8$이고

$a+c=4$이다.

이에 따라 $a=b$일 때,

순서쌍의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$이다.

구하는 순서쌍의 개수는 총 $58+5=63$개다.

30. **정답)** 488 **[확률과 통계 경우의 수 | 중복조합]**

해설 : 배를 먼저 바구니에 넣어보면

배는 3개의 바구니에 들어가야 하고

이 때, 배의 개수를 $(3,\ 1,\ 1,\ 0)$ 또는 $(2,\ 2,\ 1,\ 0)$으로 분배할 수 있다.

$(3,\ 1,\ 1,\ 0)$로 배를 분배한 경우에

서로 같은 바구니 4개 중 일부가 서로 다른 바구니가 되었다. 이 때, 배가 1개씩 담긴 바구니만 서로 같고 나머지는 모두 다른 바구니이다.

이 때, 사과를 배분해보면 사과는 2개의 바구니에 들어가야한다.

ⅰ) 사과를 넣은 후, 모든 바구니가 구분 되는 경우

1. 배가 3개 / 1개 담긴 바구니에 사과를 넣는 경우
2. 배가 1개 / 0개 담긴 바구니에 사과를 넣는 경우
3. 배가 1개 담긴 바구니 두 개에 사과를 넣는 경우

위 세 경우에는 사과를 넣은 후,

모든 바구니가 구분된다.

1의 경우 서로 다른 두 바구니에 같은 사과 3개를 넣는 경우이므로 사과를 분배하는 경우의 수는

$(2,\ 1)$, $(1,\ 2)$ 두 가지이다.

2의 경우 역시 서로 다른 두 바구니에 같은 사과 3개를 넣는 경우이므로 사과를 분배하는 경우의 수는

$(2,\ 1)$, $(1,\ 2)$ 두 가지이다.

3의 경우 서로 같은 두 바구니에 같은 사과 3개를 넣는 경우이므로 사과를 분배하는 경우의 수는 $(2,\ 1)$ 한 가지이다.

이에 따라 ⅰ)일 때, 사과를 분배하는 경우의 수는

$2+2+1=5$이다.

이 때, 사과까지 담고 나면 모든 바구니가 서로 다르므로 복숭아는 서로 다른 3개의 바구니에 각각 최소 1개씩 총 6개를 담아야하고

경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{H}_3=4\times{}_5\mathrm{C}_3=4\times\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=40$이다.

이에 따라 ⅰ)일 때, 총 경우의 수는 $5\times40=200$이다.

ⅱ) 사과를 넣은 후, 구분 되지 않는 바구니가 있는 경우

배가 3개 담긴 바구니와 0개 담긴 바구니에 사과를 넣는 경우에는 사과를 넣은 후, 배만 1개 들어있는 서로 같은 바구니 두 개가 존재한다.

먼저, 서로 다른 두 바구니에 같은 사과 3개를 넣는 경우이므로 분배하는 경우의 수는 $(2,\ 1)$, $(1,\ 2)$ 두 가지이다.

이후 복숭아 6개를 분배해야 하는데,

복숭아를 넣는 바구니로 케이스를 나눠보면

1. 서로 같은 바구니 2개와 서로 다른 바구니 1개

서로 다른 바구니 2개 중 1개를 뽑는 경우 ${}_2\mathrm{C}_1=2$이고

서로 같은 바구니 2개에 먼저 넣고 남은 것을 다른 바구니에 넣으면 되므로

같은 바구니에 배분을

$(1,\ 1)$, $(2,\ 1)$, $(3,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 2)$, $(4,\ 1)$로 할 수 있다.

이에 따라 경우의 수는 $2\times6=12$이다.

2. 서로 같은 바구니 1개와 서로 다른 바구니 2개

세 바구니 모두 다르므로 ${}_3\mathrm{H}_3=10$가지이다.

이에 따라 ⅱ)일 때,

총 경우의 수는 $2\times(12+10)=44$이다.

ⅰ), ⅱ)에 따라 $(3,\ 1,\ 1,\ 0)$로 배를 분배한 경우

모든 경우의 수는 $200+44=244$이다.

$(2,\ 2,\ 1,\ 0)$로 배를 분배하는 경우는

같은 바구니 2개 다른 바구니 2개라는 점이

$(3,\ 1,\ 1,\ 0)$와 동일하므로 경우의 수는 똑같이 244이고

전체 경우의 수는 $244+244=488$이다.

미적분

23. 정답) ③ [미적분 수열의 극한]

해설 : $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}{\left(\sqrt{n^2+3n}+n\right)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=\frac{3}{2}$$

24. 정답) ④ [미적분 수열의 극한]

해설 : 부등식 $2n^2-1<a_n<2n^2+3$에서

$\dfrac{2n^2-1}{3n^2+1}<\dfrac{a_n}{3n^2+1}<\dfrac{2n^2+3}{3n^2+1}$이 성립하고

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-1}{3n^2+1}=\dfrac{2}{3}$, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+3}{3n^2+1}=\dfrac{2}{3}$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의해

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3n^2+1}=\dfrac{2}{3}$이다.

25. 정답) ⑤ [미적분 수열의 극한]

해설 : 수열 $\left\{(x^2-25)\left(\dfrac{x}{3}\right)^n\right\}$이 수렴하기 위해서는

$x^2-25=0$ 또는 $-1<\dfrac{x}{3}\le 1$을 만족시켜야 한다.

범위를 정리하면 $x=5$, $x=-5$, $-3<x\le 3$이고

범위 내에서 수열이 수렴하도록 하는 모든 정수 x는

-5, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5이므로 총 8개다.

26. 정답) ⑤ [미적분 수열의 극한]

해설 : $\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=3$, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2b_n}{a_n}=4$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2b_n}{a_n}\times\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=\lim_{n\to\infty}n^2(n+1)b_n=12\text{이고}$$

$$\lim_{n\to\infty}n^2(n+1)b_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2(n+1)}=\lim_{n\to\infty}n^3b_n=12\text{이다.}$$

$$\lim_{n\to\infty}(2n^3+5)b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^3+5)}{n^3}\times n^3b_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n^3}\right)\times\lim_{n\to\infty}n^3b_n$$

$$=2\times 12=24$$

27. 정답) ② [미적분 수열의 극한]

해설 : $y=x^2+n+1$와 $y=(n+2)x$이 만나는 점을 구해보면

$x^2+n+1=(n+2)x$에서

$x^2-(n+2)x+n+1=(x-1)(x-n-1)=0$

이에 따라 교점의 x좌표는 $x=1$, $n+1$이고

교점의 좌표는 $(1,\ n+2)$, $(n+1,\ (n+2)(n+1))$이다.

$$\overline{PQ}=\sqrt{(n+1-1)^2+\{(n+2)(n+1)-(n+2)\}^2}$$

$$=\sqrt{n^2+n^2(n+2)^2}$$

$$=n\sqrt{1+(n+2)^2}=a_n$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-n^2}{n^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+(n+2)^2}-n^2}{n^p}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^p}\times\left(\sqrt{1+(n+2)^2}-n\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^p}\times\frac{\left(\sqrt{1+(n+2)^2}-n\right)\left(\sqrt{1+(n+2)^2}+n\right)}{\sqrt{1+(n+2)^2}+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^p}\times\frac{4n+5}{\sqrt{1+(n+2)^2}+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{p-1}}\times\frac{4+\frac{5}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}+1}\right)$$

$$=q$$

에서 $q\neq 0$이므로 $p=1$, $q=2$이다. $p+q=3$

28. 정답) ① [미적분 수열의 극한]

해설 : 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을 $a_n = ar^{n-1}$이라 두면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_{2n}+a_{2n+2}}}{2^n+3^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{ar^{2n-1}+ar^{2n+1}}}{2^n+3^{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a(r+r^3)}\times\left(\frac{\sqrt{r^2}}{3}\right)^{n-1}}{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+1} = k$$

이고 수렴 값이 $k \neq 0$인 실수 k가 되려면

$r = \pm 3$이어야 한다.

이 때, 모든 항이 양수이므로 $r = 3$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_{2n}+a_{2n+2}}}{2^n+3^{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a(r+r^3)}\times\left(\frac{\sqrt{r^2}}{3}\right)^{n-1}}{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{30a}\times 1^{n-1}}{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+1}$$

$$= \sqrt{30a} = k$$

이 때, $\sqrt{30a} = k$에서 $a = \frac{k^2}{30}$이고

$a_n = ar^{n-1} = \frac{k^2}{30}\times 3^{n-1}$이다.

$$\sum_{n=1}^{5} a_n = \frac{\frac{k^2}{30}\times(3^5-1)}{3-1} = \frac{121}{30}k^2 \geq 30\text{에서}$$

$k \geq \frac{30}{11}$ 또는 $k \leq -\frac{30}{11}$이다.

이 때, $\sqrt{30a} = k$이었으므로 $k > 0$이고

실수 k의 최솟값은 $\frac{30}{11}$이다.

29. 정답) 48 [미적분 수열의 극한]

해설 : $f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+x+b}{x^{2n+1}+3x^{2n}+1}$를 구간별로 정리해보면

구간 $(-3,\ -1)$에서 $f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+x+b}{x^{2n+1}+3x^{2n}+1}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{1}{x^{2n-1}}+\frac{b}{x^{2n}}}{x+3+\frac{1}{x^{2n}}}$$

$$= \frac{a}{x+3}$$

$x = -1$일 때, $f(-1) = \lim_{n\to\infty}\frac{a-1+b}{-1+3+1} = \frac{a+b-1}{3}$

구간 $(-1,\ 1)$에서, $f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+x+b}{x^{2n+1}+3x^{2n}+1}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x+b}{1} = x+b$$

$x = 1$일 때, $f(1) = \lim_{n\to\infty}\frac{a+1+b}{1+3+1} = \frac{a+b+1}{5}$

구간 $(1,\ \infty)$에서 $f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+x+b}{x^{2n+1}+3x^{2n}+1}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{1}{x^{2n-1}}+\frac{b}{x^{2n}}}{x+3+\frac{1}{x^{2n}}}$$

$$= \frac{a}{x+3}$$

함수 $f(x)$가 $x = -1$에서 연속이기 위해서는

$\lim_{x\to -1-} f(x) = f(-1) = \lim_{x\to -1+} f(x)$이고

$\frac{a}{2} = \frac{a+b-1}{3} = b-1$에서 $a = 2b-2$이다.

함수 $f(x)$가 $x = 1$에서 연속이기 위해서는

$\lim_{x\to 1-} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1+} f(x)$이고

$b+1 = \frac{a+b+1}{5} = \frac{a}{4}$에서 $a = 4b+4$이다.

두 식을 연립하면 $a = -8,\ b = -3$이다.

이에 따라 함수 $f(x)$를 구간별로 정리해보면

$$f(x)=\begin{cases} -\dfrac{8}{x+3} & (-3<x<-1 \text{ 또는 } x\geq 1) \\ x-3 & (-1\leq x<1) \end{cases}$$

$g(a)$는 $f(x)=a$를 만족시키는 x의 값이고
$f(-2)=-8$이므로 $g(a)=-2$이다.

$g(b)$는 $f(x)=b$를 만족시키는 x의 값이고
$f(0)=-3$이므로 $g(b)=0$이다.

$\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=\dfrac{2}{5}=k$이고 $300k^2=48$이다.

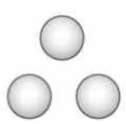
30. **정답) 7 [미적분 수열의 극한]**

해설 : 먼저, 1열부터 2^n열까지 모든 공의 개수는

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n}k=\frac{2^n(2^n+1)}{2}=\frac{4^n+2^n}{2}$개이다.

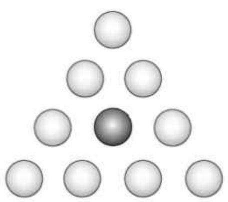
색칠을 끝마친 공은 모두 하얀색 혹은 검은색 공이므로
하얀색 공과 검은색 공의 개수의 합이
모든 공의 개수이고 $a_n+b_n=\dfrac{4^n+2^n}{2}$이다.

1열부터 2^1열까지의 색칠을 끝마친 공의 분포는



이고 $a_1=3,\ b_1=0$이다.

1열부터 2^2열까지의 색칠을 끝마친 공의 분포는



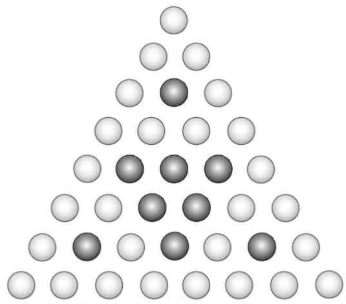
이다. 이 때, 1열부터 2^1열까지의 공의 분포가
2^1+1열부터 2^2열 사이에
두 번 더 반복해서 나타남을 관찰 할 수 있고

1열부터 2^2열 사이의 공의 분포는
$3\times$(1열부터 2^1열까지의 공의 분포) + (나머지 공)
임을 알 수 있다.

$a_2=3a_1=9$이고

$a_2+b_2=\dfrac{4^2+2^2}{2}=10$에서 $b_2=1$이다.

1열부터 2^3열까지의 색칠을 끝마친 공의 분포는



이다. 이 때, 1열부터 2^2열까지의 공의 분포가
2^2+1열부터 2^3열 사이에
두 번 더 반복해서 나타남을 관찰 할 수 있고

1열부터 2^3열 사이의 공의 분포는
$3\times$(1열부터 2^2열까지의 공의 분포) + (나머지 공)
임을 알 수 있다.

$a_3=3a_2=27$이고

$a_3+b_3=\dfrac{4^3+2^3}{2}=36$에서 $b_3=9$이다.

$\vdots$

1열부터 2^n열 사이의 공의 분포는

$3\times$(1열부터 2^{n-1}열까지의 공의 분포) + (나머지 공)
임을 알 수 있다.

$a_n=3a_{n-1}$이고 $a_1=3$이므로
이 점화식에서 $a_n=3^n$임을 알 수 있다.

$a_n+b_n=\dfrac{4^n+2^n}{2}$에서 $b_n=\dfrac{4^n+2^n-2\times3^n}{2}$이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4^n+2^n-2\times3^n}{2\times3^n}\right)^{\frac{1}{n}}$ 이고

모든 자연수 n에 대하여 부등식

$\dfrac{4^n-2\times3^n}{2\times3^n}<\dfrac{4^n+2^n-2\times3^n}{2\times3^n}<\dfrac{4^n}{2\times3^n}$에서

$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^n-1<\dfrac{4^n+2^n-2\times3^n}{2\times3^n}<\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$이다.

이 때, $\dfrac{4^n+2^n-2\times3^n}{2\times3^n}$의 양쪽에 $a\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$꼴의 수열이 있게

부등식을 만들면 수열의 극한의 대소관계에 의해

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$의 극한 값을 구할 수 있다.

이에 따라 적당한 수열 $a\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$을 만들어보면

$\dfrac{5}{64}\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^3=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^3-1$에서

3 이상의 자연수 n에 대하여 부등식

$\dfrac{5}{64}\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^n\le\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^n-1$이 성립하므로

3 이상의 자연수 n에 대하여

$\dfrac{5}{64}\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^n<\dfrac{4^n+2^n-2\times3^n}{2\times3^n}<\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$이 성립한다.

이에 따라

$\left\{\dfrac{5}{64}\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}<\left(\dfrac{4^n+2^n-2\times3^n}{2\times3^n}\right)^{\frac{1}{n}}<\left\{\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}$이고

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}=\dfrac{4}{3}\times\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}=\dfrac{4}{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{5}{64}\times\left(\dfrac{4}{3}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}=\dfrac{4}{3}\times\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5}{64}\right)^{\frac{1}{n}}=\dfrac{4}{3}$이므로

수열의 극한의 대소관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{b_n}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4^n+2^n-2\times3^n}{2\times3^n}\right)^{\frac{1}{n}}=\dfrac{4}{3}$이고

$p=3,\ q=4,\ p+q=7$이다.

기하

23. 정답) ② [기하 이차곡선 | 타원]

해설 : 타원 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{6}=1$의 두 초점을 $\mathrm{F'}(0,\ -c),\ \mathrm{F}(0,\ c)\ (c>0)$

이라 두면 $c^2=6-2=4$에서 $c=2$이다.

두 초점은 $\mathrm{F'}(0,\ -2),\ \mathrm{F}(0,\ 2)$이고

선분 $\mathrm{FF'}$의 길이는 4이다.

24. 정답) ③ [기하 이차곡선 | 쌍곡선]

해설 : 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점이 $(\sqrt{10},\ 0)$이므로

$a^2+b^2=10$이고 두 점근선이 $y=2x,\ y=-2x$이므로

$\dfrac{b}{a}=\pm2$에서 $\dfrac{b^2}{a^2}=4,\ b^2=4a^2$이다.

두 식을 연립하면

$a^2+4a^2=5a^2=10$에서 $a^2=2,\ b^2=8$이고

$b^2-a^2=6$이다.

25. 정답) ④ [기하 이차곡선 | 포물선]

해설 : 포물선 $y^2=ax+b$와 직선 $y=x+2$이 만나므로

두 점 A, B의 x좌표는

$(x+2)^2=ax+b$에서

$x^2+(4-a)x+4-b=0$의 두 근이다.

이 때, x좌표의 합이 4이므로

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해

$a-4=4$에서 $a=8$이다.

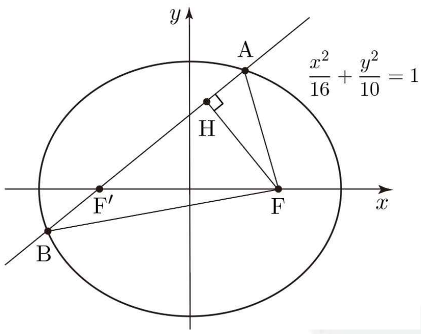
포물선 $y^2=8x+b=8\left(x+\dfrac{b}{8}\right)$의 초점은 $\left(2-\dfrac{b}{8},\ 0\right)$이고

직선 $y=x+2$ 위에 있으므로 $0=2-\dfrac{b}{8}+2,\ b=32$이다.

$a+b=8+32=40$

26. 정답) ① [기하 이차곡선 | 타원]

해설 :



점 F에서 직선 AF′에 내린 수선의 발을 점 H라 할 때,

문제 발문에 의해서 $\overline{FH}=2\sqrt{2}$이다.

이 때, $\overline{FF'}=2\sqrt{6}$이므로

피타고라스 정리에 의해 $\overline{F'H}=4$이다.

$\overline{FA}=a$라 할 때, 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{10}=1$ 위의 한 점에서

두 초점까지의 거리 합이 8이므로 타원의 정의에

의하여 $\overline{AH}=4-a$이고 삼각형 AFH에 대하여

피타고라스 정리를 쓰면 $a^2=(4-a)^2+(2\sqrt{2})^2$에서

$a=3$이다.

$\overline{F'B}=b$라 할 때, 같은 방법으로 $\overline{BH}=4+b$, $\overline{FB}=8-b$

이고 삼각형 BFH에 대하여 피타고라스 정리를 쓰면

$(8-b)^2=(4+b)^2+(2\sqrt{2})^2$이고 $b=\frac{5}{3}$이다.

$\overline{FA}+\overline{F'B}=a+b=\frac{14}{3}$이다.

27. 정답) ④ [기하 이차곡선 | 포물선]

해설 : 먼저, $\overline{AB}=\overline{AH}$에서

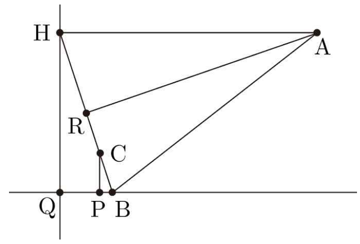
준선에서 점 A 까지의 거리와 점 B에서

점 A 까지의 거리가 같으므로

포물선의 정의에 따라 점 B는 초점임을 알 수 있다.

이에 따라 포물선의 식이 $y^2=8x$이므로

점 B의 좌표는 $(2, 0)$이다.



점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 P

점 H에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라고 할 때,

점 Q는 준선과 x축의 교점이므로 $(-2, 0)$이고

삼각형 BCP과 삼각형 BHQ은 닮음이다.

이 때, (나) 조건 $3\overline{BC}=\overline{CH}$에 의하여

두 삼각형의 닮음비가 $1:4$임을 알 수 있다.

$\overline{BQ}=4$에서 포물선의 정의에 의해 $\overline{BC}$는 $\overline{PQ}$와 같고

닮음비에 의해 $\overline{BC}=3$, $\overline{BH}=12$이다.

점 A에서 선분 BH에 내린 수선의 발을 R이라 할 때,

삼각형 BHQ과 삼각형 HAR도 닮음이고

$\overline{BQ}=4$, $\overline{HR}=6$에서 닮음비는 $2:3$이다.

이에 따라 $\overline{AH}=\overline{AB}=18$이고

삼각형 ABH의 둘레의 길이는 $12+18+18=48$이다.

28. 정답) ③ [기하 이차곡선 | 쌍곡선]

해설 : $\overline{FF'}=\overline{F'P}$에서 $\overline{FF'}=6$이므로 $\overline{F'Q}=\overline{F'R}=6$이다.

쌍곡선의 정의에 따라

$\overline{F'Q}-\overline{FQ}=2$에서 $\overline{FQ}=4$, $\overline{FR}-\overline{F'R}=2$에서 $\overline{FR}=8$이다.

$\overline{FF'}=\overline{F'Q}=\overline{F'R}=6$에서 세 점 F, Q, R이 점 F′가 중심

이고 반지름이 6인 원 위의 점임을 알 수 있다.

이 때, $\angle FRQ$와 $\angle FF'Q$를 원주각과 중심각의

관계로 보았을 때, $\angle FRQ=\frac{1}{2}\angle FF'Q$이고,

삼각형 FF′Q은 이등변삼각형이고

선분 FQ의 중점을 점 M이라 할 때,

$\angle FRQ = \frac{1}{2}\angle FF'Q = \angle FF'M$이다.

$\sin(\angle FRQ) = \sin(\angle FF'M) = \frac{\overline{FM}}{\overline{FF'}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$이다.

$\overline{FR} + \sin(\angle FRQ) = 8 + \frac{1}{3} = \frac{25}{3}$

29. 정답) 8 [기하 이차곡선 | 타원]

해설 : $\overline{AF} = k$라 할 때, $\overline{AF} = \overline{AQ} = k$, $\overline{FQ} = \overline{F'Q} = 2k$에서

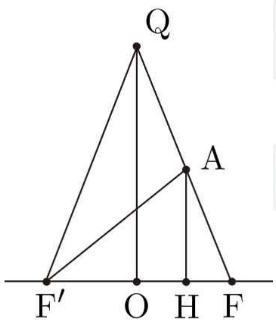
타원 C_2의 장축의 길이는 $4k$이다.

타원 C_1, C_2의 장축의 길이의 차가 4이므로

타원 C_1의 장축의 길이는 $4k-4$이고

타원의 정의에 의해 타원 C_1에서

$\overline{AF} = k$에서 $\overline{AF'} = 3k-4$이다.



점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

삼각형 AFH와 삼각형 QFO는 $1:2$의 닮음비로

닮음이다.

이에 따라, $\overline{FH} = 1$, $\overline{F'H} = 3$이고

피타고라스 정리에 의해 $\overline{AF}^2 - \overline{FH}^2 = \overline{AF'}^2 - \overline{F'H}^2$에서

$k^2 - 1^2 = (3k-4)^2 - 3^2$이고

$k^2 - 3k + 1 = 0$, $k = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$이다.

이 때, $3k - 4 > 0$이므로 $k = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$이다.

타원의 정의에 의하여 타원 C_2에서

$\overline{AF'} = 3k-4$이므로 $\overline{AP} + \overline{FP} = k+4$이고

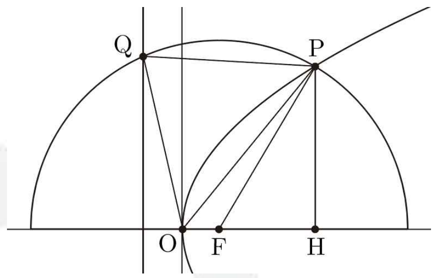
삼각형 AFP의 둘레의 길이는

$\overline{AP} + \overline{FP} + \overline{AF} = 2k + 4 = 7 + \sqrt{5}$이다.

따라서 $a = 7$, $b = 1$이고 $a + b = 8$이다.

30. 정답) 14 [기하 이차곡선 | 포물선]

해설 :



점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

직선 FP의 기울기가 $\frac{4}{3}$이므로 $\frac{\overline{HP}}{\overline{FH}} = \frac{4}{3}$이고

$\overline{FH} = 3k$, $\overline{HP} = 4k$로 둘 수 있다.

이 때, 피타고라스 정리에 의해 $\overline{FP} = 5k$이고

점 P에서 준선까지의 거리도

포물선의 정의에 의해 $5k$이다.

초점에서 준선까지의 거리가 $2p$이므로

$5k - \overline{FH} = 2p$에서 $\overline{FH} = 3k$이므로 $p = k$이다.

이에 따라, 피타고라스 정리를 이용해서

길이들을 나타내보면

점 Q에서 x축까지의 거리는 $\sqrt{21}p$이고

$\overline{OP} = 4\sqrt{2}p$, $\overline{OQ} = \sqrt{22}p$이다.

(나) 조건 $\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \frac{5}{2}$에서

$32p^2 = 22p^2 + \frac{5}{2}$, $p = \frac{1}{2}$이고

$$\overline{PQ}^2 = (5p)^2 + (\sqrt{21}p - 4p)^2$$
$$= 62p^2 - 8\sqrt{21}p^2 = \frac{31}{2} - 2\sqrt{21}$$

이므로 $q = \frac{31}{2}$, $r = -2$이고

$p + q + r = \frac{1}{2} + \frac{31}{2} - 2 = 14$이다.