제 2 교시

수학 영역

5 지 선 다 형

1. $\log_8 16$ 의 값은? [2점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

$\log_{2^3} 2^4 = \frac{4}{3}$

2. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4 = 100$일 때, a_1의 값은? [2점]

① 91 ② 93 ③ 95 ④ 97 ⑤ 99

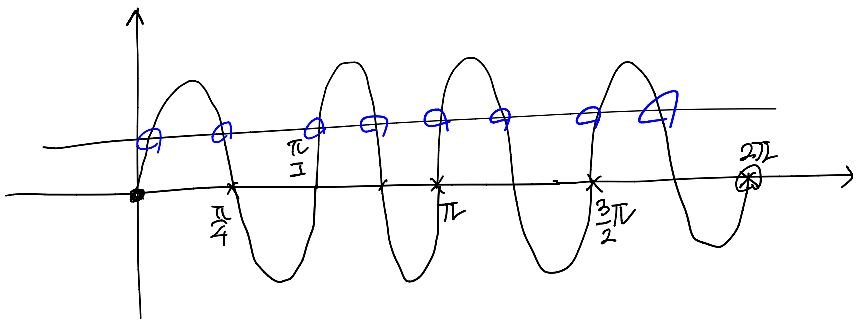
$a_n = a + 3(n-1)$

$a_4 = a + 3(4-1) = a + 9 = 100$

$\therefore a = 91$

3. $0 \le x < 2\pi$ 일 때, 방정식 $\sin 4x = \frac{1}{2}$ 의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10



★주의 $\int_{-2}^{2}$ 아님!

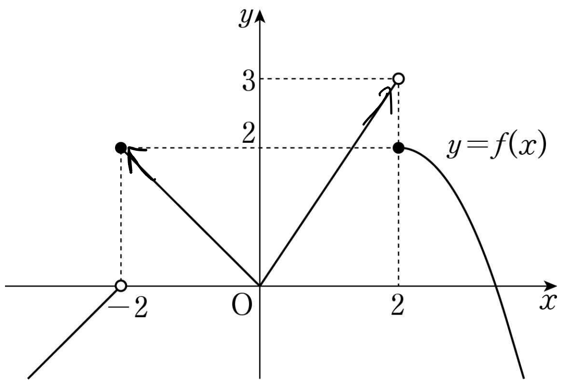
4. $\int_{2}^{-2} (x^3 + 3x^2)\,dx$ 의 값은? [3점]

① -16 ② -8 ③ 0 ④ 8 ⑤ 16

$-\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2)\,dx = -\int_{-2}^{2} 3x^2\,dx = -2\int_0^2 3x^2\,dx$

$= -2\left[x^3\right]_0^2 = -16$

5. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to -2+} f(x) + \lim_{x\to 2-} f(x)$의 값은? [3점]

2 3

① 6 ② 5 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

6. 함수

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+ax+b}{x-3} & (x<3) \\ \dfrac{2x+1}{x-2} & (x\geq 3) \end{cases}$$

이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$x=3$ 에서 연속. $\rightarrow \lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$

$\lim_{x\to 3+} \frac{2x+1}{x-2} = \frac{7}{1} = 7 = f(3)$

$\lim_{x\to 3-} \frac{x^2+ax+b}{x-3} = 7$

분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하므로 분자는 0으로 가야한다.

$\lim_{x\to 3-} (x^2+ax+b) = 0 \Rightarrow 9+3a+b=0.$

$x^2+ax+b = g(x)$라하면 $g(3)=0$ 이므로 미분계수의 정의에 의해

$\lim_{x\to 3-} \frac{g(x)-g(3)}{x-3} = g'(3) = 6+a = 7 \Rightarrow a=1$

$\Rightarrow b=-12$

$\therefore a-b = 1+12 = 13$

7. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n=\begin{cases} \dfrac{(n+1)^2}{2} & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ \dfrac{n^2}{2}+n+1 & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [3점]

① 235 ② 240 ③ 245 ④ 250 ⑤ 255

$a_1 = \frac{4}{2}$

$a_2 = \frac{4}{2}+2+1$) $4+3=7$

) 28

$a_3 = \frac{16}{2}$

$a_4 = \frac{16}{2}+4+1$) $16+5=21$

) 71

$a_5 = \frac{36}{2}$

$a_6 = \frac{36}{2}+6+1$) $36+7=43$

) 144

$a_7 = \frac{64}{2}$

$a_8 = \frac{64}{2}+8+1$) $64+9=73$

) 255

$a_9 = \frac{100}{2}$

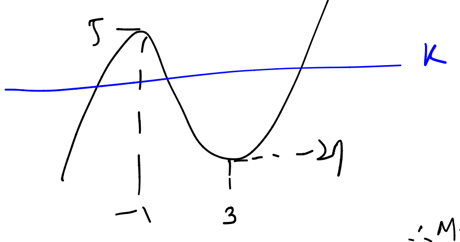
$a_{10} = \frac{100}{2}+10+1$) $100+11=111$

$f(x)$

8. 곡선 $y=x^3-3x^2-9x$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 정수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M-m$의 값은? [3점]

① 27 ② 28 ③ 29 ④ 30 ⑤ 31

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x-3)(x+1)$



$-27<k<5$

$M=4,\ m=-26$

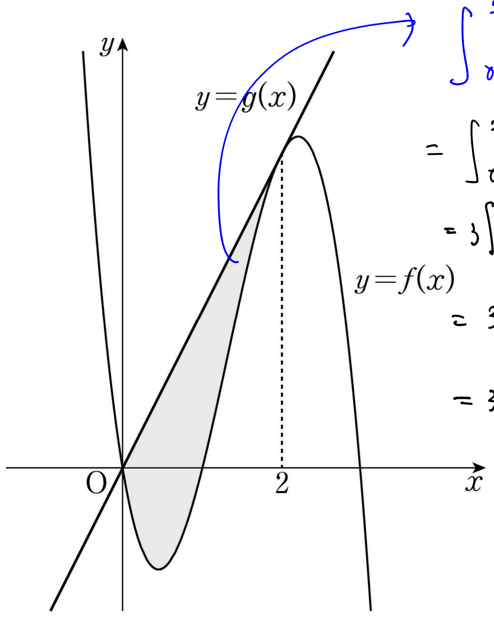
$\therefore M-m=4-(-26)=30$

9. 최고차항의 계수가 -3인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, f(2))$에서의 접선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$와 원점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는? [4점]

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4 ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

$f(x)-g(x)=-3(x-2)^2x$

$g(x)-f(x)=3(x-2)^2x.$



$\int_0^2 |g(x)-f(x)|\,dx$

$=\int_0^2 3(x-2)^2x\,dx$

$=3\int_0^2(x^3-4x^2+4x)\,dx$

$=3\left[\frac{x^4}{4}-\frac{4x^3}{3}+2x^2\right]_0^2$

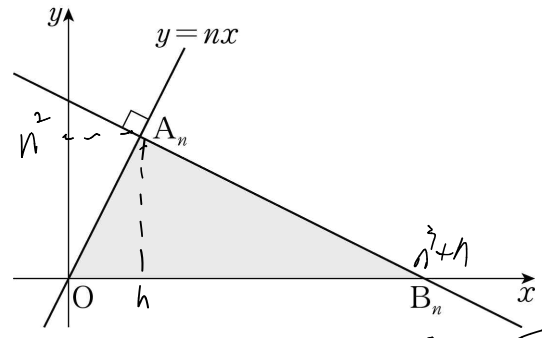
$=3\left(4-\frac{32}{3}+8\right)$

$=12-32+24$

$=36-32$

$=4$

10. 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{A}_n(n, n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B_n이라 하자.



다음은 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{n^3}$의 값을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

> 점 $\mathrm{A}_n(n, n^2)$을 지나고 직선 $y=nx$에 수직인 직선의 방정식은 $-\frac{1}{n}$
>
> $y=$ (가) $\times x+n^2+1$
>
> $0=-\frac{1}{n}x+n^2+1 \Rightarrow \frac{1}{n}x=n^2+1$, $x=n^3+n$
>
> 이므로 두 점 A_n, B_n의 좌표를 이용하여 S_n을 구하면
>
> $S_n=$ (나) $\frac{n^5+n^3}{2}$
>
> $\frac{1}{2}\times n^2\times(n^3+n)=\frac{n^5+n^3}{2}$
>
> 따라서
>
> $\sum_{n=1}^{8}\frac{S_n}{n^3}=$ (다) 106
>
> 이다. $\sum_{n=1}^{8}\frac{n^2+1}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{8}n^2+\sum_{n=1}^{8}1\right)=102+4=106$
>
> $\frac{8\times9\times17}{6}=204$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r라 할 때, $f(1)+g(2)+r$의 값은? [4점]

① 105 ② 110 ③ 115 ④ 120 ⑤ 125

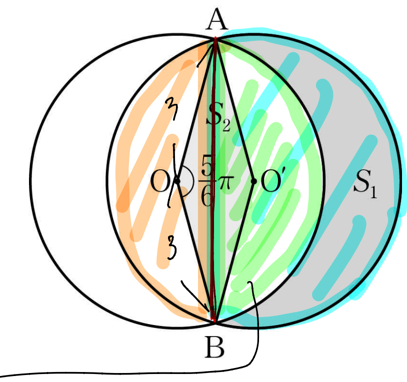
$-1+\frac{32+8}{2}+106$

$-1+20+106$

19

125

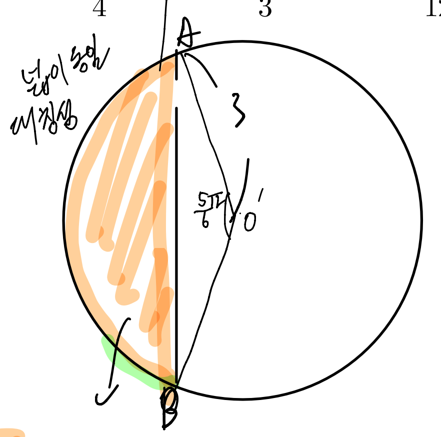
11. 그림과 같이 두 점 O, O′을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 두 원 O, O'이 한 평면 위에 있다. 두 원 O, O'이 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, $\angle \mathrm{AOB}=\frac{5}{6}\pi$이다.



원 O의 외부와 원 O'의 내부의 공통부분의 넓이를 S_1, 마름모 AOBO′의 넓이를 S_2라 할 때, S_1-S_2의 값은? [4점]

① $\frac{5}{4}\pi$ ② $\frac{4}{3}\pi$ ③ $\frac{17}{12}\pi$ ④ $\frac{3}{2}\pi$ ⑤ $\frac{19}{12}\pi$

넓이 동일
대칭성



부채꼴 O′AB − 삼각형 O′AB

$\frac{1}{2}\times 9\times \frac{5}{6}\pi - \frac{1}{2}\times 9\times \underbrace{\sin\frac{5}{6}\pi}_{\sin\frac{5}{6}\pi}$

$=\frac{15}{4}\pi-\frac{9}{4}$ 36-15

$=$ 원 넓이 $-$ $=9\pi-\left(\frac{15}{4}\pi-\frac{9}{4}\right)$

$=\frac{21}{4}\pi+\frac{9}{4}$

$S_1=$ $-$ $=$ $-$

$=\frac{21}{4}\pi+\frac{9}{4}-\left(\frac{15}{4}\pi-\frac{9}{4}\right)$

$=\frac{3}{2}\pi+\frac{9}{2}$

$S_2=\triangle AOB\times 2=\left(\frac{1}{2}\times 3^2\times\sin\frac{5}{6}\pi\right)\times 2=\frac{9}{2}$

$\therefore S_1-S_2=\frac{3}{2}\pi+\frac{9}{2}-\frac{9}{2}=\frac{3}{2}\pi$

12. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

$f(1)-g(1)=0 \Rightarrow f(1)=g(1)$

(가) $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=5$ $f'(1)-g'(1)=5$

(나) $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}=7 \Rightarrow f'(1)+g'(1)=7$ $\Rightarrow f'(1)=6,\ g'(1)=1$

$f(1)+g(1)-2f(1)=0$

두 실수 a, b에 대하여 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$일 때, ab의 값은? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

분모가 0으로 가는데 극한값이 존재하므로 분자도 0으로 가야한다.

$\lim\limits_{x\to1}(f(x)-a)=0 \Rightarrow f(1)=a$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=bg(1)=bf(1)=ab$

$f'(1)=6$

$\therefore ab=6$

13. 함수

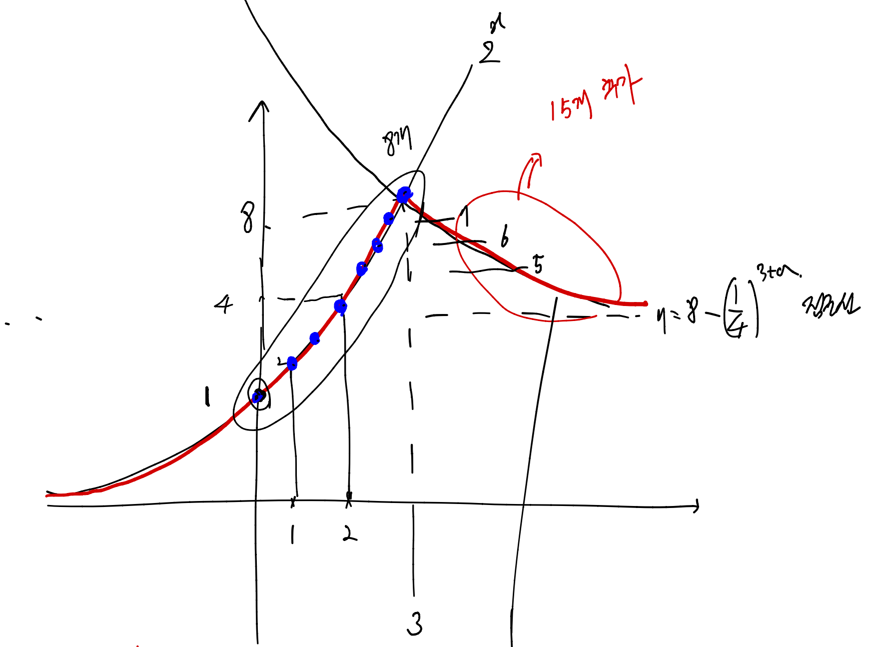
$$f(x)=\begin{cases} 2^x & (x<3) \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8 & (x\ge 3)\end{cases}$$

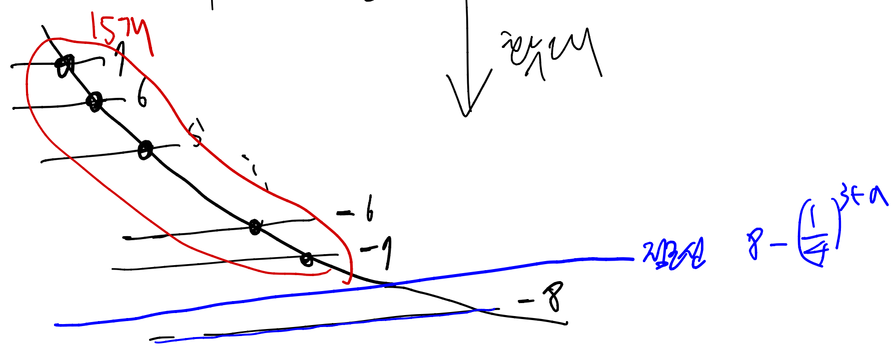
$\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}>0$

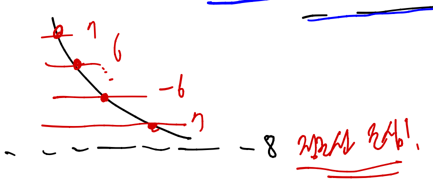
x가 ∞일 ⇒ 8

에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 정수인 점의 개수가 23일 때, 정수 a의 값은? [4점]

① -7　② -6　③ -5　④ -4　⑤ -3







∴ -8도 가능

$-8 \le 8-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} < -7$

$-16 \le -\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} < -15$

$15 < \left(\frac{1}{4}\right)^{3+a} \le 16$

$15 < 4^{-3-a} \le 16$

$-3-a=2$

∴ $a=-5$

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f'(x)|$$

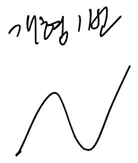
라 할 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=g(0)=0$
(나) 방정식 $f(x)=0$은 양의 실근을 갖는다.
(다) 방정식 $\lvert f(x)\rvert=4$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$g(3)$의 값은? [4점]

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

개형 1번

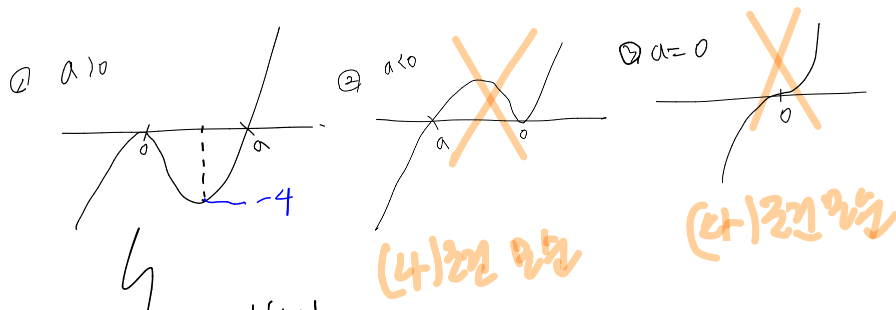


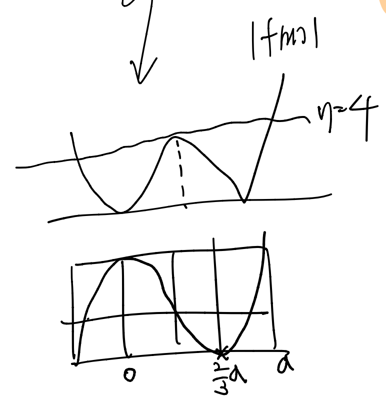
$g(x)=f(x)+|f'(x)|$

(가) $g(0)=f(0)+|f'(0)|$ ⇒ $f'(0)=0$, $f(0)=0$

$f(x)$는 x^2을 인수로 갖는다.

$f(x)=x^2(x-a)$





∴ $f\left(\frac{2}{3}a\right)=-4$

$f(x)=x^2(x-a)$

$f\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{4}{9}a^2\left(-\frac{a}{3}\right)=-4$

⇒ $a^3=27$ ⇒ $a=3$

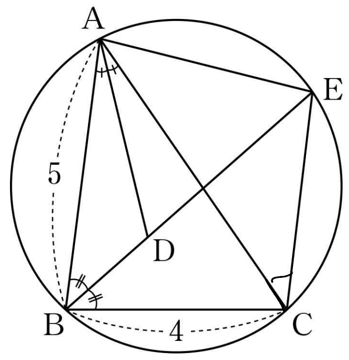
$g(x)=x^2(x-3)+|3x(x-2)|$

∴ $g(3)=|9\times 1|=9$

ㄱ.ㄴ.ㄷ이 유기적으로 연결되어있다는 생각 좋아!!

15. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=4$, $\cos(\angle ABC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. ∠ABC의 이등분선과 ∠CAB의 이등분선이 만나는 점을 D, 선분 BD의 연장선과 삼각형 ABC의 외접원이 만나는 점을 E라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

$\sin(\angle ABC)=\frac{3\sqrt{7}}{8}$



< 보 기 >

ㄱ. $\overline{AC}=6$

ㄴ. $\overline{EA}=\overline{EC}$

ㄷ. $\overline{ED}=\frac{31}{8}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 삼각형 ABC에서 코사인 법칙을 사용하면

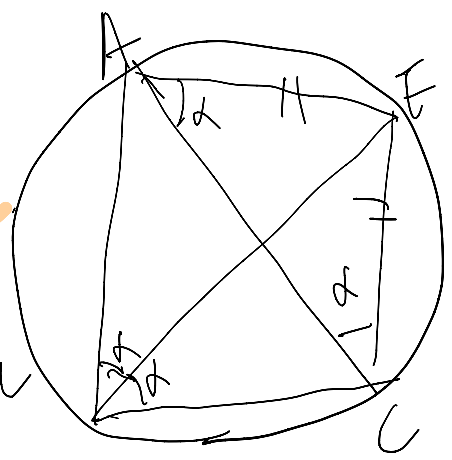
$$\cos(\angle ABC)=\frac{16+25-(\overline{AC})^2}{2\times4\times5}=\frac{41-(\overline{AC})^2}{40}=\frac{1}{8}$$

$41-(\overline{AC})^2=5$

$(\overline{AC})^2=36$

$\therefore \overline{AC}=6$

ㄴ.



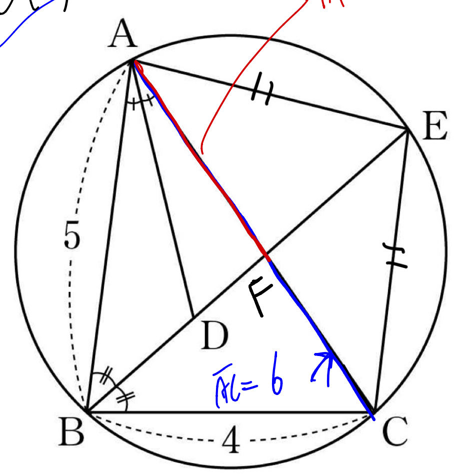
원주각 같다

AEC는 이등변

$\Rightarrow \overline{AE}=\overline{EC}$

ㄷ. 풀이1)

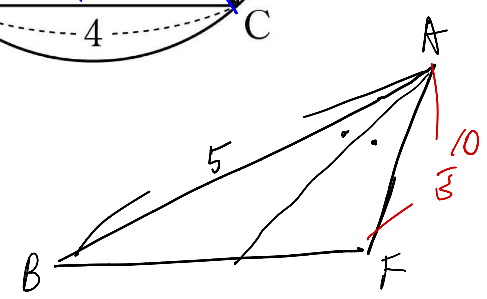
$\overline{AF}=\overline{AC}\times\frac{5}{9}=6\times\frac{5}{9}=\frac{10}{3}$

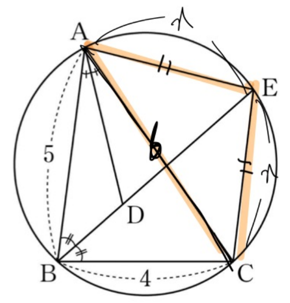


이등분선 비례성질!

$m:n=a:b$

$\overline{AC}=6$





삼각형 AEC에서 코사인법칙

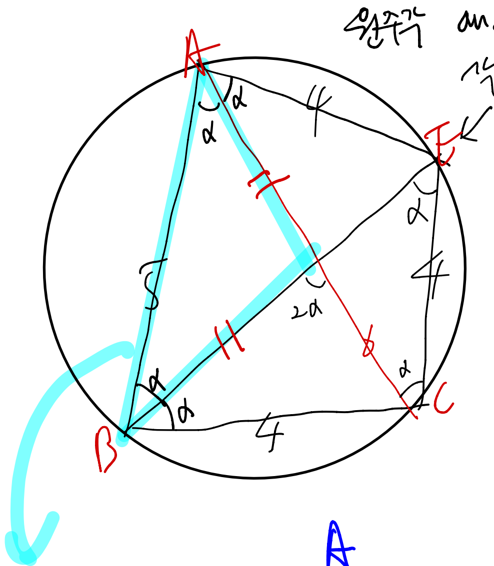
$\cos(\angle AEC)=\frac{x^2+x^2-36}{2x^2}=\frac{2x^2-36}{2x^2} \Rightarrow x=4$

$\cos(\pi-\angle ABC)$

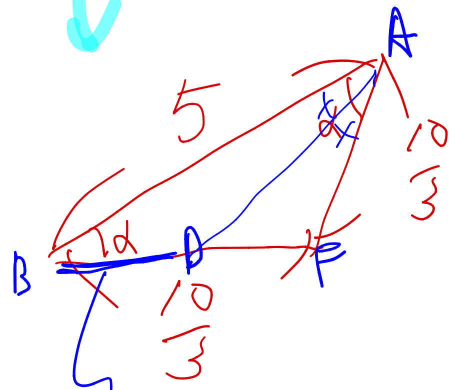
$-\cos(\angle ABC)$

$-\frac{1}{8}$

원주각 and 이등변삼각형을 이용하여 각 표시 $\angle EBC=\alpha$



△BCE와 △AEC는 서로합동이므로 $\overline{AC}=\overline{BE}=6$

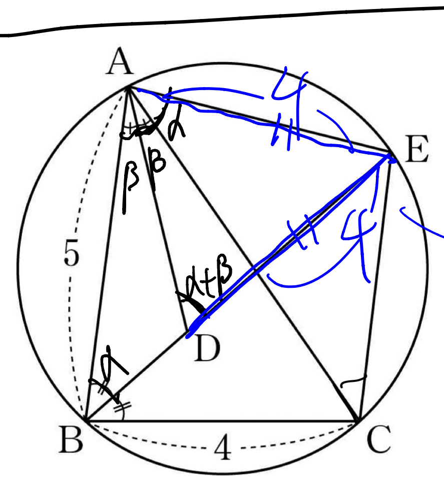


$5:\frac{10}{3}=1:\frac{2}{3}\Rightarrow 3:2$

$\frac{10}{3}\times\frac{3}{5}=2$

$\therefore \overline{ED}=\overline{BE}-\overline{BD}=6-2=4$

풀이2)



단답형

$f'(x)=4x+5$, $g'(x)=3x^2$

16. 두 함수 $f(x)=2x^2+5x+3$, $g(x)=x^3+2$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수를 구하시오. [3점]

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\underset{5}{f'(0)}\,\underset{2}{g(0)}+\underset{3}{f(0)}\,\underset{0}{g'(0)}$

10

17. 모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$$3x^2-2(\log_2 n)x+\log_2 n>0$$

이 성립하도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [3점]

판별식

$\frac{D}{4}$ $(\underset{X}{\log_2 n})^2-3(\underset{X}{\log_2 n})<0$ 치환.

$\log_2 n(\log_2 n-3)<0$

$X(X-3)<0 \Rightarrow 0<X<3$

$0<\log_2 n<3$

$\log_2 1<\log_2 n<\log_2 8$

$1<n<8 \Rightarrow n=2\ 3\cdot 4\ 5\ 6\ 7$

6

18. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $F(x)$의 도함수 $f(x)$가

$$F'(x) = f(x)=\begin{cases}-2x & (x<0)\\ k(2x-x^2) & (x\ge 0)\end{cases}$$

이다. $F(2)-F(-3)=21$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

$$F'(x)=\begin{cases}-2x & (x<0)\\ -kx^2+2kx & (x\ge 0)\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}-x^2+a & (x<0)\\ -\frac{k}{3}x^3+kx^2+b & (x\ge 0)\end{cases}$$

$x=0$에서 연속 → $a=b$

$F(2) = -\frac{8k}{3}+4k+b = \frac{4}{3}k + a$

$F(-3) = -9+a$

$F(2)-F(-3) = \frac{4}{3}k + 9 = 21$

$\therefore k=9$

19. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_1=2$, $a_2=4$이고 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}S_n = a_nS_{n+1}$$

이 성립할 때, S_5의 값을 구하시오. [3점]

$a_1=2$
$a_2=4$
$a_3=12$
$a_4=36$
$a_5=$

$n=2$ 대입 $a_3S_2 = a_2S_3$
$= a_2(S_2+a_3)$
$6a_3 = 4(6+a_3) \Rightarrow a_3=12$

$n=3$ 대입 $a_4S_3 = a_3S_4$
$= a_3(S_3+a_4)$
$18a_4 = 12(18+a_4) \Rightarrow a_4=36$

$n=4$ 대입 $a_5S_4 = a_4S_5$
$= a_4(S_4+a_5)$
$54a_5 = 36(54+a_5) \Rightarrow a_5=108$

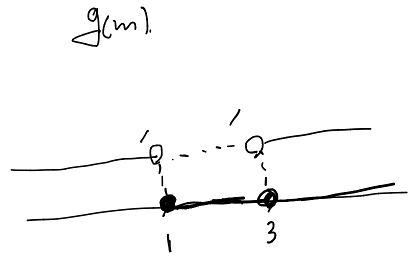
$\therefore S_5 = S_4+a_5 = 54+108 = 162$

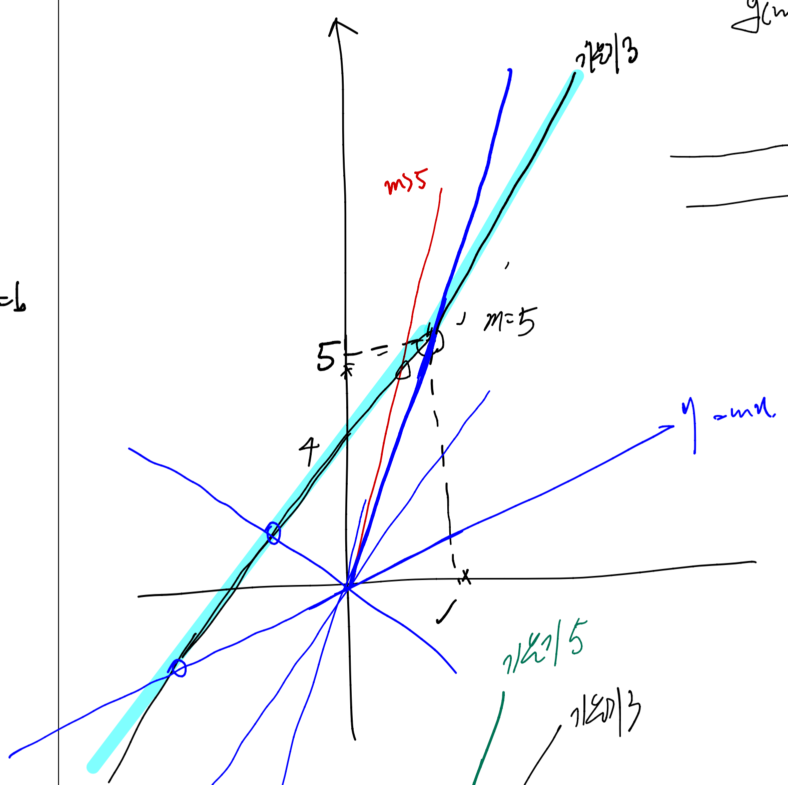
20. 실수 m에 대하여 직선 $y=mx$와 함수

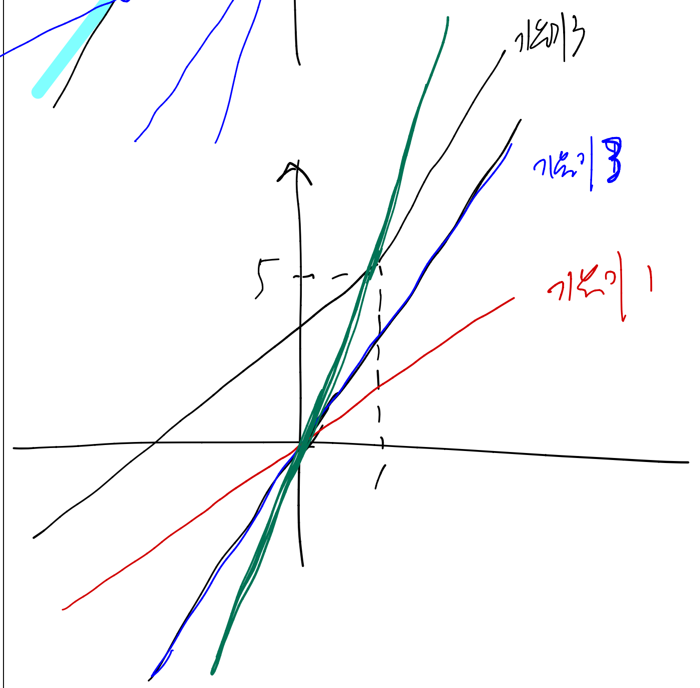
$$f(x)=2x+3+|x-1|$$

의 그래프의 교점의 개수를 $g(m)$이라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 함수 $g(x)h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $h(5)$의 값을 구하시오. [4점]

$(x\ge1)$ $3x+2$
$(x<1)$ $x+4$





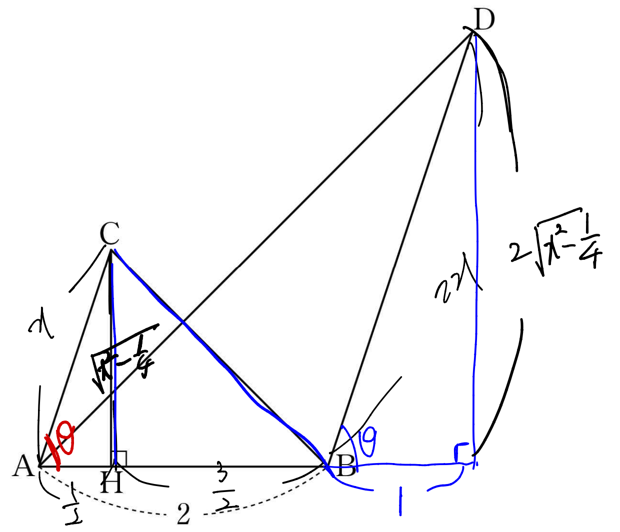


	$g(m)$	$h(m)$		
1^+	0	$h(1)$	0	⊙ ⇒ $h(1)=0$
1^-	1		$h(1)$	
1	0		0	
3^+	1	$h(3)$	$h(3)$	⊙ ⇒ $h(3)=0$
3^-	0		0	
3	0		0	

$h(x) = (x-1)(x-3)$

$\therefore h(5) = 4\times 2 = 8$

21. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AC} /\!/ \overline{BD}$, $\overline{AC}:\overline{BD}=1:2$인 두 삼각형 ABC, ABD가 있다. 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발 H는 선분 AB를 1:3으로 내분한다.



$\overline{AC}=x$

$\angle CAB=\theta$

두 삼각형 ABC, ABD의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, R라 할 때, $4(R^2-r^2)\times\sin^2(\angle CAB)=51$이다. $\overline{AC}^2$의 값을 구하시오. (단, $\angle CAB<\frac{\pi}{2}$) [4점]

$\overline{BC}=\sqrt{x^2-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}}=\sqrt{x^2+2}$

$\overline{AD}=\sqrt{4x^2-1+9}=\sqrt{4x^2+8}$

△ABC에서 사인법칙

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle CAB)}=2r \Rightarrow 2r=\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sin\theta} \Rightarrow 4r^2=\frac{x^2+2}{\sin^2\theta}$

△ABD에서 사인법칙

$\frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)}=2R \Rightarrow 2R=\frac{\sqrt{4x^2+8}}{\sin(\pi-\theta)} \Rightarrow 4R^2=\frac{4x^2+8}{\sin^2\theta}$

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$4(R^2-r^2)=\frac{4x^2+8-x^2-2}{\sin^2\theta}=\frac{3x^2+6}{\sin^2\theta}$

$\sin^2(\angle CAB)=\sin^2\theta$

$4(R^2-r^2)\sin^2(\angle CAB)=\frac{3x^2+6}{\sin^2\theta}\times\sin^2\theta=3x^2+6=51$

$3x^2=45$

$x^2=15$

∴ 15

22. 양수 a와 일차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

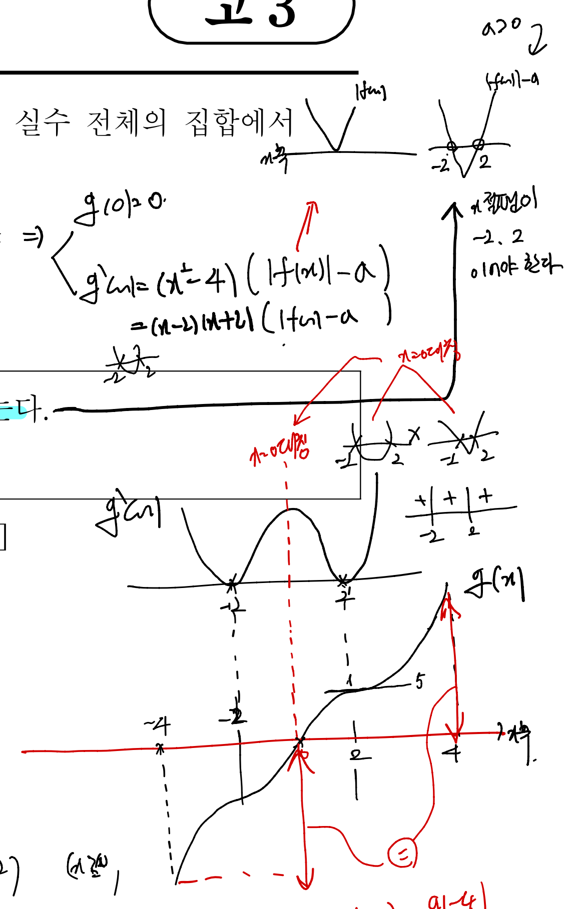
$$g(x)=\int_0^x (t^2-4)\{|f(t)|-a\}\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

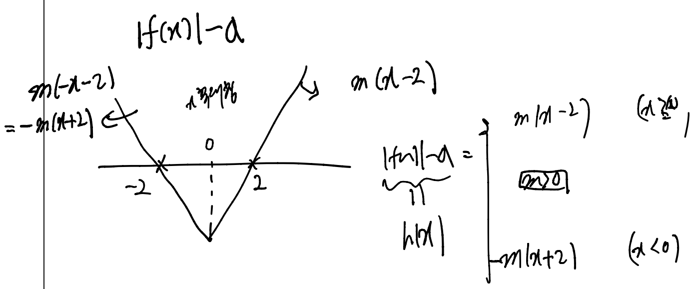
$\Rightarrow g(0)=0$, $g'(x)=(x^2-4)(|f(x)|-a)=(x-2)(x+2)(|f(x)|-a)$

(가) 함수 $g(x)$는 극값을 갖지 않는다.
(나) $g(2)=5$

$g(0)-g(-4)$의 값을 구하시오. [4점]



$g(0)-g(-4)$ = $g(4)-g(0)$ = $g(4)-0$ = $g(4)$



$|f(x)|-a=\begin{cases} m(x-2) & (x\geq 0) \\ -m(x+2) & (x<0)\end{cases}=h(x)$

$g(2)=\int_0^2 (t^2-4)h(t)\,dt$

$=\int_0^2 (t^2-4)m(t-2)\,dt=m\int_0^2(t^3-2t^2-4t+8)\,dt$

$=m\left[\frac{t^4}{4}-\frac{2t^3}{3}-2t^2+8t\right]_0^2$

$=m\left(4-\frac{16}{3}-8+16\right)$

$=m\left(12-\frac{16}{3}\right)=\frac{20}{3}m=5 \Rightarrow m=\frac{3}{4}$

$g(4)=\int_0^4 (t^2-4)h(t)\,dt=\frac{3}{4}\left[\frac{t^4}{4}-\frac{2t^3}{3}-2t^2+8t\right]_0^4$

$=\frac{3}{4}\left(64-\frac{128}{3}-32+32\right)$

$=\frac{3}{4}\left(\frac{192-128}{3}\right)=\frac{3}{4}\times\frac{64}{3}=16$

∴ 16

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

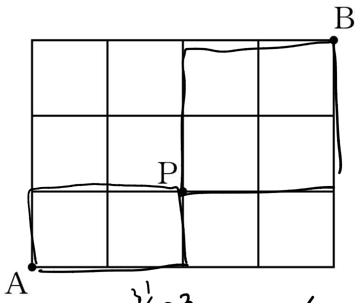
23. ${}_3\mathrm{H}_6$의 값은? [2점]

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

${}_{3+6-1}C_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2$

$\frac{8 \times 7}{2} = 28$

24. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점까지 최단거리로 가는 경우의 수는? [3점]



$\frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

$\frac{3!}{2!1!} = 3$

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$3 \times 6 = 18$

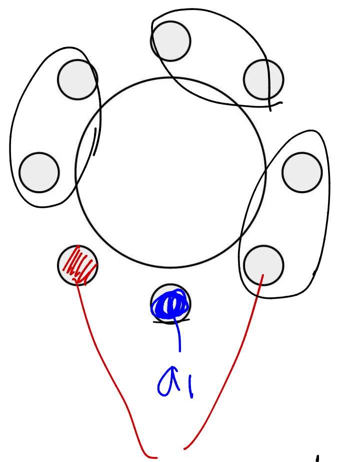
25. 어느 고등학교 3학년의 네 학급에서 대표 2명씩 모두 8명의 학생이 참석하는 회의를 한다. 이 8명의 학생이 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 모두 둘러앉을 때, 같은 학급 학생끼리 서로 이웃하게 되는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 92 ② 96 ③ 100 ④ 104 ⑤ 108

학급

a.b.c.d

a_1a_1 b_1b_2 c_1c_2 d_1d_2



a_1 고정 a_2

1가지 × 2가지 ×

b.c.d 원순열

$b_1b_2/c_1c_2/d_1d_2$ 자리바꿈

$3! \times 2^3$

$= 1\times2\times6\times8 = 96$

26. 같은 종류의 연필 6자루와 같은 종류의 지우개 5개를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주려고 한다. 각 학생이 적어도 한 자루의 연필을 받도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 지우개를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 210 ② 220 ③ 230 ④ 240 ⑤ 250

연필

$A\geq1$
$B\geq1$
$C\geq1$

$A+B+C=6$

$A'+B'+C'=3$

$X+Y+Z=5$

${}_3H_3 \times {}_3H_5 = 210$

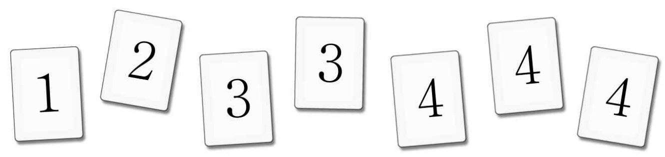
${}_{3+3-1}C_3$ ${}_{3+5-1}C_5$

${}_5C_3$ ${}_7C_2$

10 21

27. 숫자 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4가 하나씩 적힌 7장의 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 1이 적힌 카드와 2가 적힌 카드 사이에 두 장 이상의 카드가 있도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

① 180 ② 185 ③ 190 ④ 195 ⑤ 200



$\frac{7!}{2!3!} = 420$

전체 − (1 2 + 1 ○ 2)

i) 1 2 3, 3, 4, 4, 4 ⇒ $\frac{6!}{2!3!} \times 2! = 120$ (1, 2 배열)

ii) 1 ○ 2 → 3, 4

1 3 2 3 4 4 4 ⇒ $\frac{5!}{3!} \times 2! = 40$ (1, 2 배열)

1 4 2 3 3 4 4 ⇒ $\frac{5!}{2!2!} \times 2! = 60$ (1, 2 배열)

⇒ 100

420 − (120 + 100) = 200

220

28. 두 집합

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad Y = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

에 대하여 X에서 Y로의 함수 f 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수의 개수는? [4점]

(가) $f(2) < f(3) < f(4)$
(나) $f(1) > f(3) > f(5)$

① 100 ② 102 ③ 104 ④ 106 ⑤ 108

X: 1, 2, 3, 4, 5 Y: 2, 4, 6, 8, 10, 12

f(3)의 값에 따라 case 분류

f(2) f(5) f(4) f(1) 개수

$f(3) = 4$: 2 < 4 < 6, 8, 12 → $1 \times 1 \times 4 \times 4 = 16$

2, 4 < 6 < 8, 10, 12 → $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$

52

2, 4, 6 < 8 < 10, 12 ⇒ $3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$

2, 4, 6, 8 < 10 < 12 ⇒ $4 \times 4 \times 1 \times 1 = 16$

52

104

단답형

29. 5 이하의 자연수 a, b, c, d에 대하여 부등식

$$a \le b+1 \le c \le d$$

를 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점]

$b=1 \Rightarrow a \le 2 \le c \le d$ 2, 3, 4, 5
↓ 2가지 $_4H_2$ $\Rightarrow 2 \times {_4H_2} = 20$

$b=2 \Rightarrow a \le 3 \le c \le d$ 3, 4, 5
↓ 3가지 $_3H_2$ $\Rightarrow 3 \times {_3H_2} = 18$

$b=3 \Rightarrow a \le 4 \le c \le d$ 4, 5
↓ 4가지 $_2H_2$ $\Rightarrow 4 \times {_2H_2} = 12$

$b=4 \Rightarrow a \le 5 \le c \le d$ 5 $\Rightarrow 5 \times 1 = 5$
↓ 5가지   1가지

$\underbrace{20+18}_{30}+12+5 = 55$

30. 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 네 개를 선택한 후 일렬로 나열할 때, 다음 조건을 만족시키도록 나열하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

(가) 숫자 1은 한 번 이상 나온다.
(나) 이웃한 두 수의 차는 모두 2 이하이다.

숫자1의 개수로 case 분류   1, 4 이웃X

$1\,0\,0\,0$: $1000 = 18$, $0100 \Rightarrow 12$, $0010 \Rightarrow 12$, $0001 = 18$ 130, 130   60

$1\,1\,0\,0$: $= 6$, $= 4$, $\Rightarrow 4$, $\Rightarrow 4$, $= 4$, $= 6$ 10, 8, 10   28

$1\,1\,1\,0$: $= 2$, $= 2$, $= 2$, $= 2$ 8

$1\,1\,1\,1 \Rightarrow$ 1가지

$\underbrace{60+28}_{37}+\underbrace{8+1}_{9} = 97$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5 지 선 다 형

23. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\dfrac{10n^3}{2n^3}$

24. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n = \left(\frac{x^2-4x}{5}\right)^n$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

$-1 < \dfrac{x^2-4x}{5} \leq 1$

$-5 < x^2-4x \leq 5$

$x^2-4x+5>0$

-2 모든 실수에서 성립

$4-5<0$

$x^2-4x-5\leq 0$

$(x-5)(x+1)\leq 0$

$-1\leq x\leq 5$

$-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$

25. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_1a_n$$

공비 a_1인 등비수열

을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1}=12$일 때, a_1의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$a_2=a_1a_1$ $a_1=r$

$a_2=a_1^2$ $a_n=r^n$

$a_{n+3}=r^{n+3}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot r^{n+3}-5}{2r^n+1}=12$

$0<r<1 \Rightarrow -5$

$r=1 \Rightarrow \frac{-2}{3}$

$r>1 \Rightarrow \frac{3\cdot r^3}{2}=12$

$r^3=8$

$r=2$

$\therefore a_1=2$

26. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2n^2-3<a_n<2n^2+4$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

$2k^2-3<a_k<2k^2+4$

$2\cdot1^2-3<a_1<2\cdot1^2+4$

$2\cdot2^2-3<a_2<2\cdot2^2+4$

$\vdots$

$2n^2-3<a_n<2n^2+4$

$\sum_{k=1}^{n}(2k^2-3)<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}(2k^2+4)$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-3n<S_n<\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+4n$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}-3n}{n^3} \Rightarrow \frac{2}{3}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}+4n}{n^3} \Rightarrow \frac{2}{3}$

27. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(k-1)!} = \frac{3}{(n+2)!}$$

$\rightarrow \frac{a_1}{1} = \frac{3}{3!} = \frac{3}{3\times2\times1} = \frac{1}{2}$

을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\left(a_1 + n^2 a_n\right)$의 값은? [3점]

① $-\frac{7}{2}$ ② -3 ③ $-\frac{5}{2}$ ④ -2 ⑤ $-\frac{3}{2}$

$$\frac{3}{(n+2)!} - \frac{3}{(n+1)!} = \frac{a_n}{(n-1)!} \quad (n \geq 2)$$

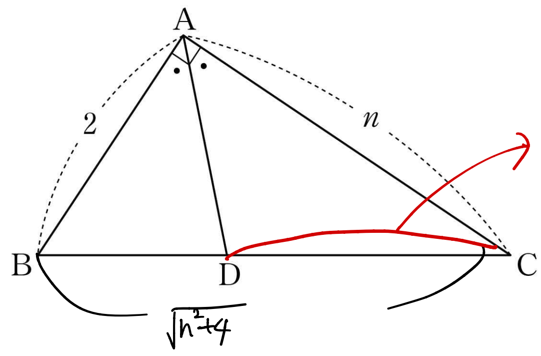
$$a_n = \frac{3}{(n+2)(n+1)n} - \frac{3}{(n+1)n} \quad (n \geq 2)$$

$$n^2 a_n = \frac{3n^2}{(n+2)(n+1)n} - \frac{3n^2}{n^2+n} \quad (n \geq 2)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{3n^2}{(n+2)(n+1)n} - \frac{3n^2}{n^2+n}\right) = \frac{1}{2} - 3 = -\frac{5}{2}$$

28. 자연수 n에 대하여 $\angle A = 90°$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{CA} = n$인 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. 선분 CD의 길이를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(n - a_n)$의 값은? [4점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4



$\frac{1}{n+2} \times \sqrt{n^2+4}$

$$\lim_{n\to\infty}(n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\left(n - \frac{n\sqrt{n^2+4}}{n+2}\right)$$

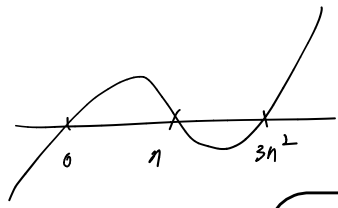
$$= \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{\sqrt{n^2+4}}{n+2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+2-\sqrt{n^2+4}}{n+2}\right)$$

$\cancel{n^2+4n+4 - n^2 - 4}$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+2)^2 - (n^2+4)}{(n+2)(n+2+\sqrt{n^2+4})}\right)$$

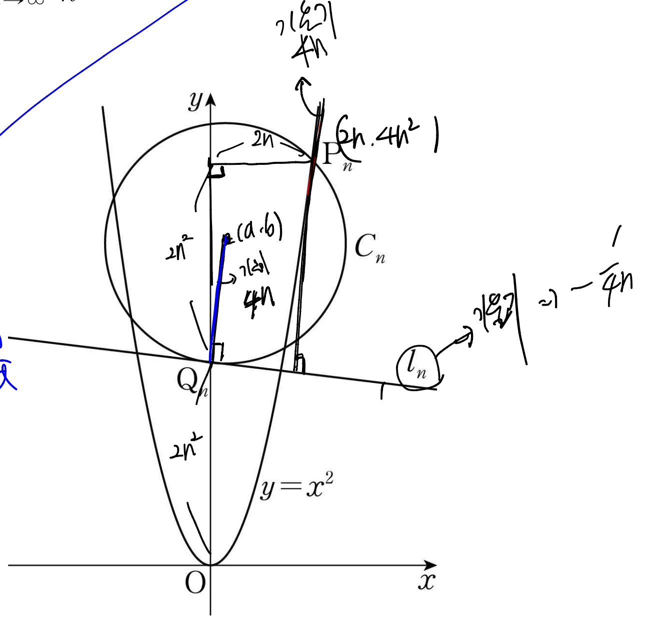
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2}{(n+2)(n+2+\sqrt{n^2+4})} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{n\times2n} = 2$$

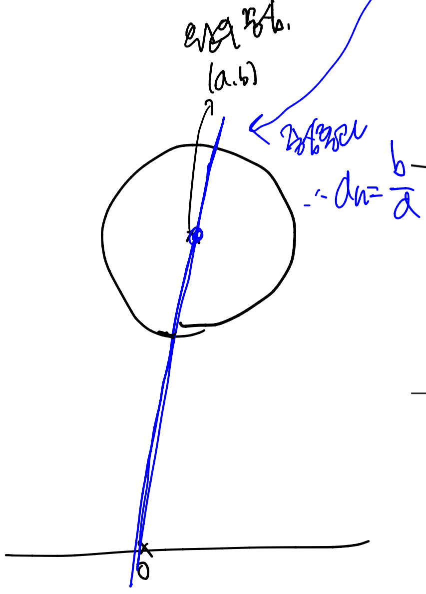


단답형

29. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $P_n(2n, 4n^2)$에서의 접선과 수직이고 점 $Q_n(0, 2n^2)$을 지나는 직선을 l_n이라 하자. 점 P_n을 지나고 점 Q_n에서 직선 l_n과 접하는 원을 C_n이라 할 때, 원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오. [4점]

2n 기울기 4n





$(0, 2n^2)$ (a, b) 기울기 4n.

$\frac{b-2n^2}{a} = 4n. \Rightarrow b-2n^2 = 4an$

$b = 2n^2+4an$

$(a, b)\ (0, 2n^2)$ 거리 $= (a, b)\ (2n, 4n^2)$ 거리

$a^2+(b-2n^2)^2 = (a-2n)^2+(b-4n^2)^2$

$\cancel{a^2}+\cancel{b^2}-4bn^2+4n^4 = \cancel{a^2}-4an+4n^2+\cancel{b^2}-8bn^2+16n^4$

$4an-4n^2+4bn^2 = 12n^4$

$a-n+bn = 3n^3$

$a-n+2n^3+4an^2 = 3n^3$

$a(4n^2+1) = n^3+n$

$a = \frac{n^3+n}{4n^2+1}$

$b = 2n^2+4an$

$a_n = \frac{b}{a} = \frac{2n^2+4an}{a} = \frac{2n^2}{a}+4n = \frac{8n^4+2n^2}{n^3+n}+4n$

$= \frac{8n^3+2n}{n^2+1}+4n$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n^2+2}{n^2+1}+4\right)$

$8+4 = 12$

30. 자연수 n에 대하여 삼차함수 $f(x)=x(x-n)(x-3n^2)$이 극대가 되는 x를 a_n이라 하자. x에 대한 방정식 $f(x)=f(a_n)$의 근 중에서 a_n이 아닌 근을 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

식 $(x^2-xn)(x-3n^2)$

$x^3-x^2n-3n^2x^2+3xn^3$

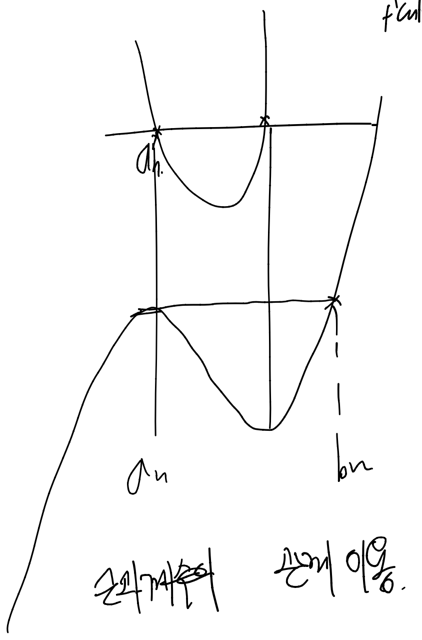
$f(x) = x^3-(3n^2+n)x^2+3n^3x$

$f'(x) = 3x^2-2(3n^2+n)x+3n^3$

$x = \frac{3n^2+n \pm\sqrt{(3n^2+n)^2-9n^3}}{3}$

$a_n = \frac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3} = \frac{3n^2+n-n\sqrt{9n^2-3n+1}}{3}$

$= \frac{n\left(3n+1-\sqrt{9n^2-3n+1}\right)}{3}$



근와 계수 관계 이용.

$f(x) = x^3-(3n^2+n)x^2+3n^3x$

$f(x)=f(a_n) \Rightarrow f(x)-f(a_n)=0$

의 세 근의 합.

$a_n \cdot a_n \cdot b_n$

$2a_n+b_n = 3n^2+n \Rightarrow b_n = 3n^2+n-2a_n$

$a_nb_n = (3n^2+n)a_n-2(a_n)^2$

$\frac{a_nb_n}{n^3} = \frac{3n^3+n^2}{n^3}\left(\frac{3n+1-\sqrt{9n^2-3n+1}}{3}\right) - \frac{2n^2}{n^3}\left(\frac{3n+1-\sqrt{9n^2-3n+1}}{3}\right)^2$

3 $\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$ 0

$\left(\frac{9n^2+6n+1-9n^2+3n-1}{3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1}}\right)\times\frac{1}{3}$

$\left(\frac{9n}{3n+3n}\right)\frac{1}{3} = \frac{3n}{6n} = \frac{1}{2}$

$= 3\times\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

5

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

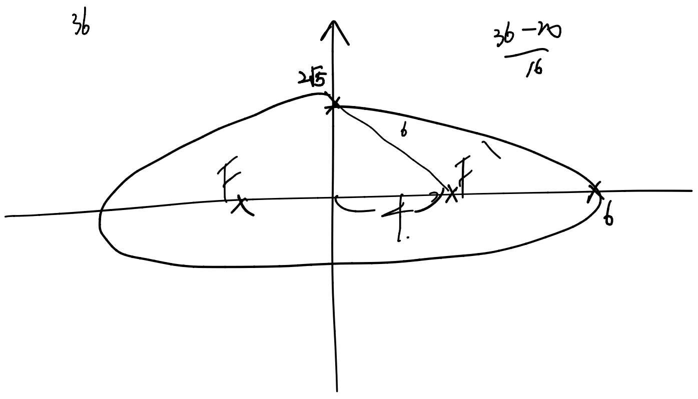
제 2 교시

수학 영역(기하)

5 지 선 다 형

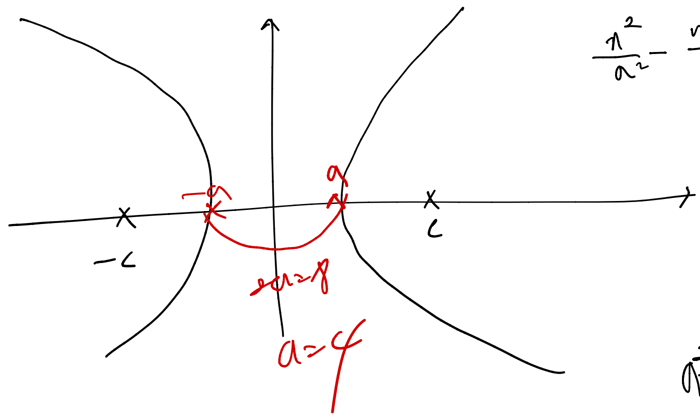
23. 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ 의 두 초점을 F, F′ 이라 할 때, 선분 FF′ 의 길이는? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10



24. 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\,0)$, $\mathrm{F}'(-c,\,0)$ 이고 주축의 길이가 8인 쌍곡선의 한 점근선이 직선 $y=\frac{3}{4}x$ 일 때, 양수 c 의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9



$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$

$a=4k,\ b=3k$

$a^2+b^2=c^2$ $k=1$

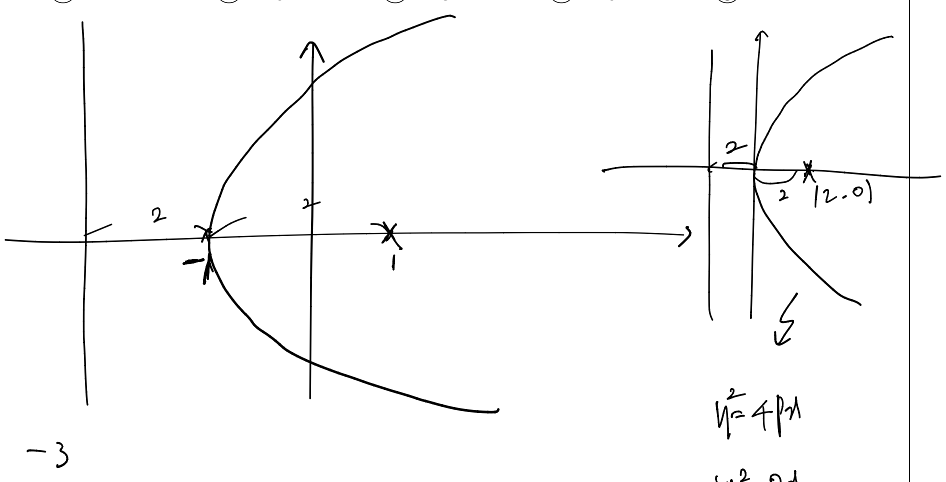
$16k^2+9k^2=25k^2=c^2$

25

⑤

25. 꼭짓점이 점 $(-1, 0)$이고 준선이 직선 $x=-3$인 포물선의 방정식이 $y^2=ax+b$일 때, 두 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은? [3점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22



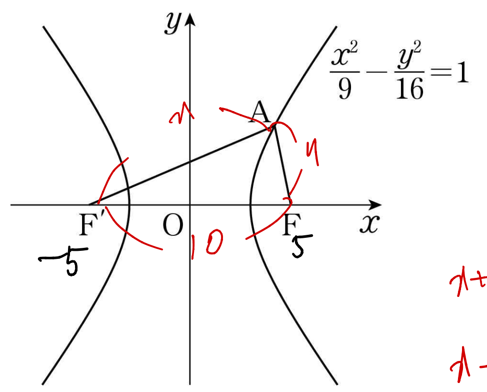
$y^2=4px$

$y^2=8x$

$y^2=8(x+1)$

$y^2=8x+8$

26. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점 F, F′과 쌍곡선 위의 점 A에 대하여 삼각형 AF′F의 둘레의 길이가 24일 때, 삼각형 AF′F의 넓이는? (단, 점 A는 제1사분면의 점이다.) [3점]

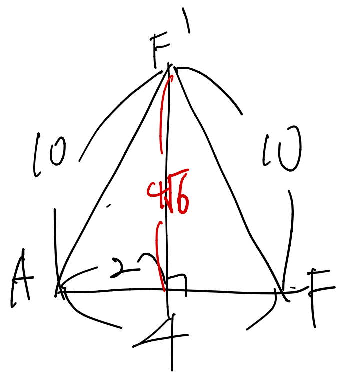


$9+16=25$

$x+y+10=24 \Rightarrow x+y=14$

$x-y=2\times3=6$

① $4\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{6}$ ③ $8\sqrt{3}$ ④ $8\sqrt{6}$ ⑤ $16\sqrt{3}$



$x+y=14$

$+\ x-y=6$

$2x=20$

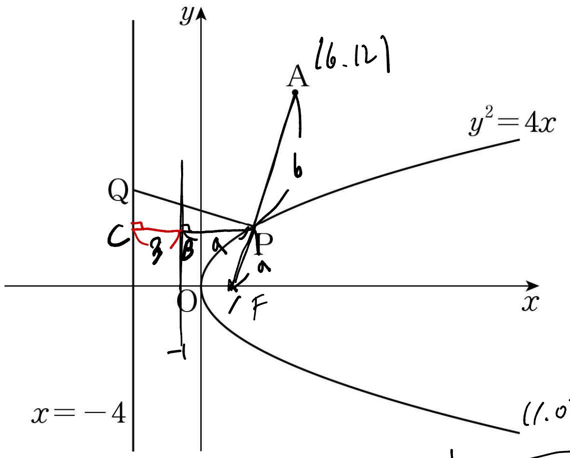
$x=10$

$y=4$

$\frac{1}{2}\times 4\times 4\sqrt{6}=8\sqrt{6}$

27. 점 A(6, 12)와 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 P, 직선 $x=-4$ 위의 점 Q에 대하여 $\overline{AP}+\overline{PQ}$의 최솟값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20



$\overline{AP}+\overline{PQ} \geq \overline{AP}+\overline{PC}$
$=\overline{AP}+\overline{PB}+3$
$=\overline{AP}+\overline{PF}+3$
$\geq \overline{AF}+3$
$=a+b+3$

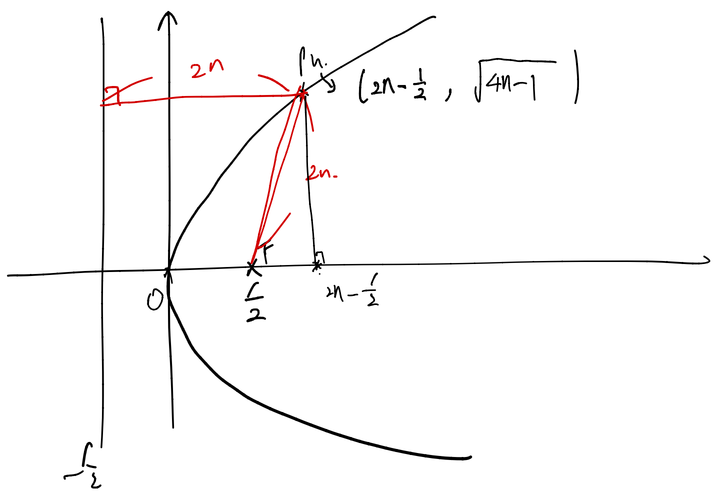
(1.0) (6.12)

$a+b=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}$
$=13$

$\overline{AP}+\overline{PQ}$ 최소 $=a+b+3$
$=13+3=16$

28. 자연수 n에 대하여 초점이 F인 포물선 $y^2=2x$ 위의 점 P_n이 $\overline{FP_n}=2n$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{8}\overline{OP_n}^2$의 값은? (단, O는 원점이고, 점 P_n은 제1사분면에 있다.) [4점]

① 874 ② 876 ③ 878 ④ 880 ⑤ 882



$(\overline{OP_n})^2 = 4n^2-2n+\frac{1}{4}+4n-1$
$=4n^2+2n-\frac{3}{4}$

$\sum_{n=1}^{8}\left(4n^2+2n-\frac{3}{4}\right)$

$4\sum_{n=1}^{8}n^2+2\sum_{n=1}^{8}n-\frac{3}{4}\times 8$

$=4\times\frac{8\times9\times17}{6}+8\times9-6$

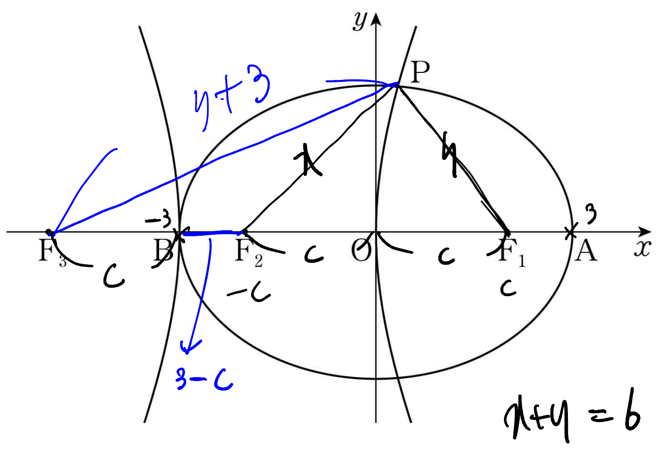
48×17: 336, 48, 816

$816+72-6$

882

단답형

29. 두 초점이 $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ $(c>0)$인 타원이 x축과 두 점 $A(3, 0)$, $B(-3, 0)$에서 만난다. 선분 BO가 주축이고 점 F_1이 한 초점인 쌍곡선의 초점 중 F_1이 아닌 점을 F_3이라 하자. 쌍곡선이 타원과 제1사분면에서 만나는 점을 P라 할 때, 삼각형 PF_3F_2의 둘레의 길이를 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



$x+y=6$

△PF_3F_2 둘레 길이

$\underbrace{y+3}_{\overline{PF_3}} + \underbrace{x}_{\overline{PF_2}} + \underbrace{3-c+c}_{\overline{F_2F_3}}$

6

$6+6=12$

30. 그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ $(c>0)$이고 장축의 길이가 12인 타원이 있다. 점 F가 초점이고 직선 $x=-k$ $(k>0)$이 준선인 포물선이 타원과 제2사분면의 점 P에서 만난다. 점 P에서 직선 $x=-k$에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

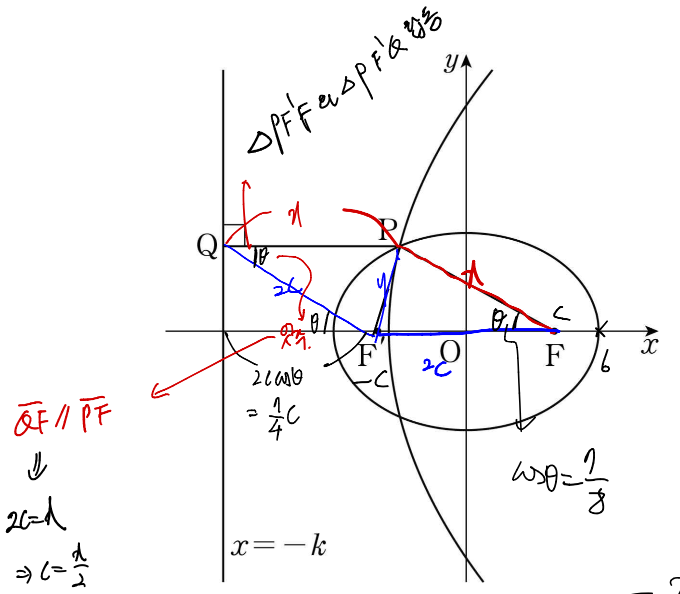
(가) $\cos(\angle F'FP)=\frac{7}{8}$
(나) $\overline{FP}-\overline{F'Q}=\overline{PQ}-\overline{FF'}$ ⇒ $x-\overline{F'Q}=x-\overline{FF'}$

$c+k$의 값을 구하시오. [4점]

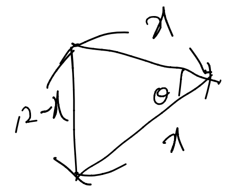
⇒ $\overline{F'Q}=\overline{FF'}$
$=2c$

$x+y=12$

$y=12-x$



$\therefore k=\frac{1}{4}c+c=\frac{11}{4}c$



$\cos\theta=\frac{x^2+x^2-(12-x)^2}{2x^2}=\frac{7}{8}$

$2x^2-(x^2-24x+144)$

$\frac{x^2+24x-144}{\cancel{2x^2}}=\frac{7}{\cancel{8}_4}\times\cancel{2x^2}$

$4x^2+96x-144\times4=7x^2$

$3x^2-96x+144\times4=0$

-48

$\frac{48\pm\sqrt{48^2-144\times4\times3}}{3}$

$\frac{48\pm24}{3}=\frac{24}{3}=8$

$x=8$

$\therefore c+k=c+\frac{11}{4}c=\frac{15}{4}c$

$\frac{15}{4}\times\frac{x}{2}=\frac{15x}{8}=15$

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.