1 2 3 4 5
F T F T F

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\left(2^{\sqrt{3}} \times 4\right)^{\sqrt{3}-2}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$\left(2^{2+\sqrt{3}}\right)^{(\sqrt{3}-2)}$

$= 2^{3-4}$

2. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 3x^2+6x+1$

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2=6, \quad a_4+a_6=36$$

일 때, a_{10} 의 값은? [3점]

$a_{10} = 2+9\cdot4$

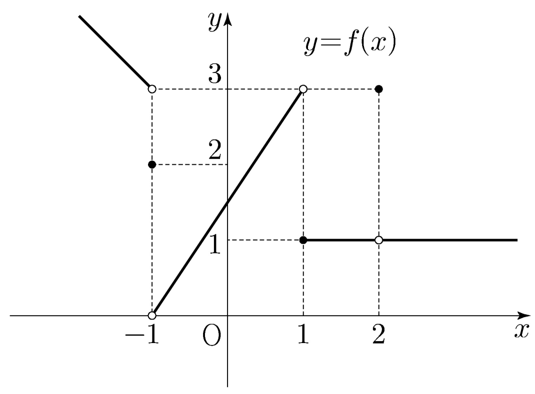
① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$a+4d=18$
$a+d=6$

$a+3d$
$a+5d$ $= 2a+8d=36$

$3d=12$
$\therefore d=4$
$a=2$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim\limits_{x \to -1-} f(x) + \lim\limits_{x \to 2} f(x)$ 의 값은? [3점]

3 1

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n<7) \\ a_n-7 & (a_n\geq 7) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$a_1=1$
$a_2=2$
$a_3=4$
$a_4=8$
$a_5=1$
$a_6=2$
$a_7=4$
$a_8=8$

$2+3-12$ -16 12 24 36

6. 방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? [3점]

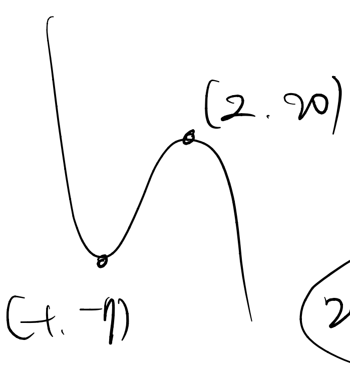
① 20 ② 23 ③ 26 ④ 29 ⑤ 32

$k=-2x^3+3x^2+12x$.

$-6x^2+6x+12$.

$=-6(x^2-x-2)$

$=-6(x+1)(x-2)$



$20-(-7)-1$

7. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$-\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{4}{\sqrt{10}}$

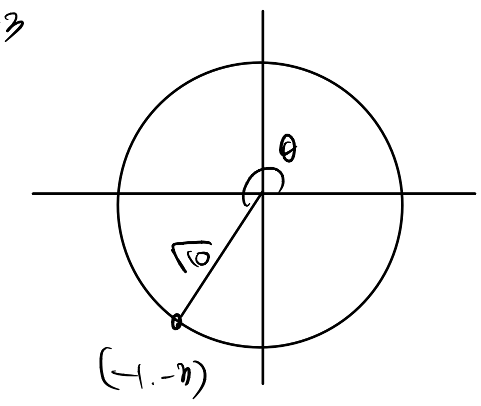
$=-\frac{2}{5}\sqrt{10}$

$\tan^2\theta-6=\tan\theta$

$\therefore \tan^2\theta-\tan\theta-6=0$

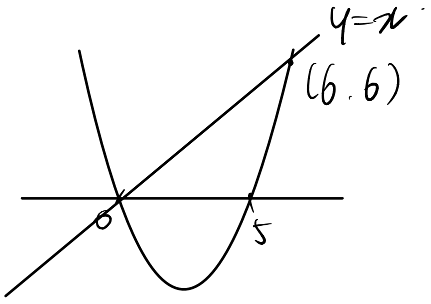
$\tan+2$
$\tan-3$

$\therefore \tan\theta=3.$



8. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 3　② $\frac{13}{4}$　③ $\frac{7}{2}$　④ $\frac{15}{4}$　⑤ 4



$x^2-6x=0$

9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

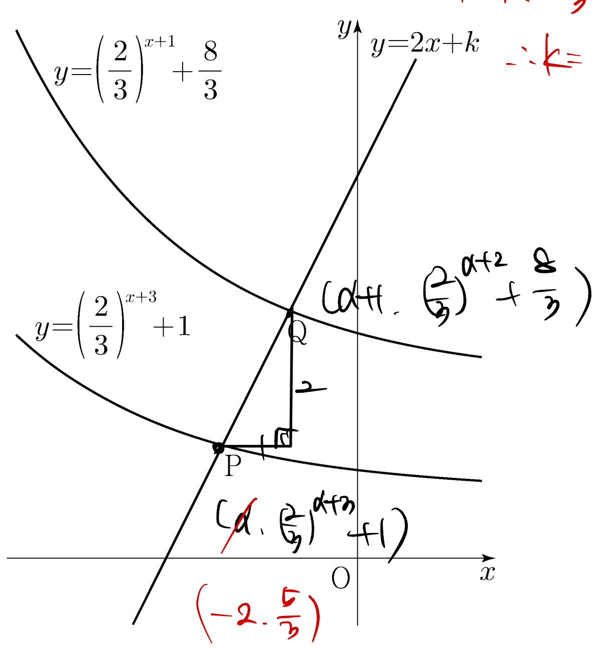
$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{PQ}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{31}{6}$　② $\frac{16}{3}$　③ $\frac{11}{2}$　④ $\frac{17}{3}$　⑤ $\frac{35}{6}$

$-4+k=\frac{5}{3}$

$\therefore k=\frac{17}{3}$



$\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}+1=\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}+\frac{8}{3}$

$\therefore \frac{5}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}$

$1=\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}\left(1-\frac{2}{3}\right)$

$\therefore \alpha=-2$

10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]　$y'=f(x)+xf'(x)$.

① -18　② -17　③ -16　④ -15　⑤ -14

i) $f'(0)x=y$, $f(0)=0$

ii) $f(1)=2$, $(f(1)+f'(1))(x-1)=y-2$.

$\Rightarrow (2+f'(1))x-(2+f'(1))+2=y$

① $f'(0)=2+f'(1)$

② $-2-f'(1)+2=0$.

$\therefore f'(1)=0$.

$\boxed{f(0)=0\quad f(1)=2,\ f'(1)=0,\ f'(0)=2\ \text{이용}}$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$

$f'(x)=3ax^2+2bx+2$

$=-6x^2+4x+2$

$-24+8+2$

$=-14$

$a+b+2=2$

$3a+2b+2=0$

$3a+2b=-2$

$2a+2b=0$

$a=-2$

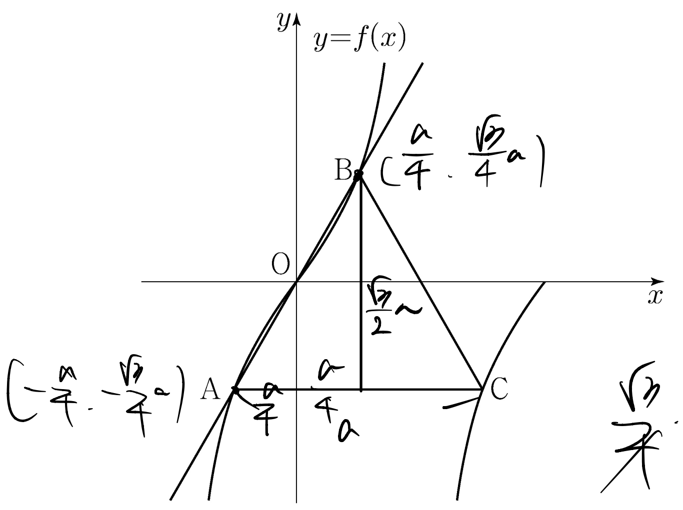
$b=2$

11. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2} < x \le a,\ x \ne \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$$

$\frac{\frac{\pi}{1}}{\frac{\pi}{a}} = \boxed{a}$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{16}{3}$

① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

$\tan\left(\frac{\pi}{a}\times\frac{a}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}a$

1

$\therefore a = \frac{4}{\sqrt{3}}$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

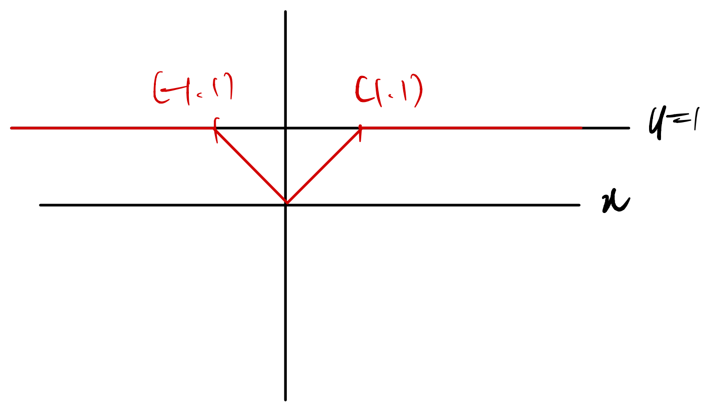
1 0 $\frac{1}{2}$

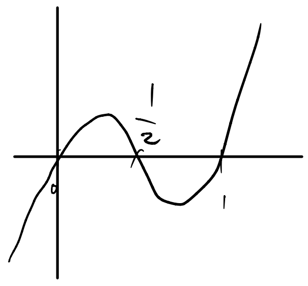
① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$f(x)^2(f(x)-1) - x^2(f(x)-1) = 0$

$\therefore (f(x)^2 - x^2)(f(x)-1) = 0$

$f(x) = x,\ -x,\ 1$ 중 하나.





13. 두 상수 a, $b\,(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

$f(1)=a^b+b^a=40$ / $f(2)=a^{2b}+b^{2a}$

$(20)^2+(20)^2$

$\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)=y-\log_2 a$

$\Rightarrow$ y절편 ; $-a\cdot\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}+\log_2 a$

$\frac{\log_4 b-\log_4 a}{b-a}(x-a)=y-\log_4 a$

$\Rightarrow$ y절편 ; $-a\cdot\frac{\log_4 b-\log_4 a}{b-a}+\log_4 a$

$-a\cdot\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}+\cancel{\log_2 a}=-a\cdot\frac{\log_4 b-\log_4 a}{b-a}+\cancel{\log_4 a}$

$\Rightarrow \log_2 a-\cancel{\log_4 a}$ $\quad \log_4\frac{1}{a}$

$(b-a)\log_4 a = a\left(\log_2 b-\log_2 a+\log_4 a-\log_4 b\right)$

$(\log_4 b-\log_4 a)$

$b\log_4 a-\cancel{a\log_4 a}=a\log_4 b-\cancel{a\log_4 a}$

$\log_4 a^b=\log_4 b^a$ $\quad \therefore a^b=b^a=20$

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\quad(a\neq0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1|v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

$v(t)=(t-1)(at+b)+t(at+b)+at(t-1)$

$at^2-at+bt-b$
$=at^2+bt$
at^2-at
$=3at^2-2(a-b)t-b$

움직인거리

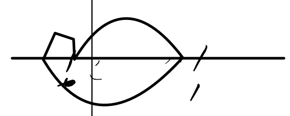
$\int_0^{\frac{1}{2}}$

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$ 유비

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\le t\le1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.



방향 최대 2번바뀜

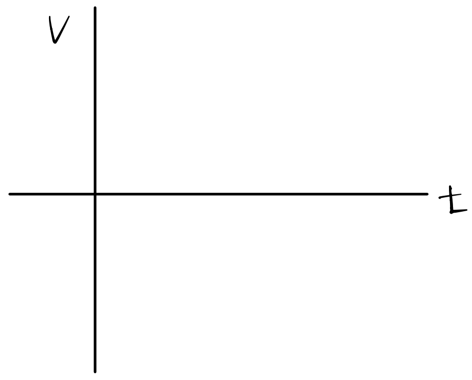
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$\int_0^1|3at^2-2(a-b)t-b|\,dt=2$

$\int_0^1 3at^2-2(a-b)t-b\,dt=0$

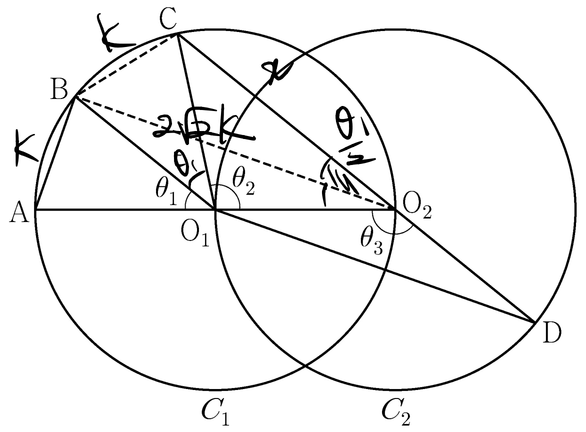
$\left[at^3-(a-b)t^2-bt\right]_0^1=a-(a-b)-b=0$

당연히 0이네...



1 2 3 4 5

15. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다.
이때 $\angle BO_1A = \theta_1$, $\angle O_2O_1C = \theta_2$, $\angle O_1O_2D = \theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB} : \overline{O_1D} = 1 : 2\sqrt{2}$이고 $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1 + \angle O_1O_2D = \pi$이므로 $\theta_3 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$에서 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로 $\angle CO_1B = \theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB} = k$라 할 때
> $\overline{BO_2} = \overline{O_1D} = 2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2} = \boxed{(가)}$이고, 3k
> $\angle BO_2A = \frac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\frac{\theta_1}{2} = \boxed{(나)}$이다. $\frac{2\sqrt{2}k}{3k} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC} = k$, $\overline{BO_2} = 2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B = \frac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C} = \boxed{(다)}$이다. $\frac{2}{3}k$
> $\overline{CD} = \overline{O_2D} + \overline{O_2C} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB} : \overline{CD} = k : \left(\frac{\boxed{(가)}}{2} + \boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p) \times g(p)$의 값은? [4점] $\frac{56}{9}$

$2\sqrt{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$

① $\frac{169}{27}$ ② $\frac{56}{9}$ ③ $\frac{167}{27}$ ④ $\frac{166}{27}$ ⑤ $\frac{55}{9}$

$(2\sqrt{2}k)^2 + x^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2}k \cdot x \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = k^2$

$8k^2 + x^2 - \frac{16}{3}kx = k^2$

$x^2 - \frac{16}{3}kx + 7k^2 = 0$

$3x^2 - 16kx + 21k^2 = 0$

3 -7
1 -3

$x = 3k,\ \frac{7}{3}k$

단답형

16. $\log_2 120 - \frac{1}{\log_{15} 2}$의 값을 구하시오. [3점] ③

$\log_2 120 - \log_2 15 = \log_2 \frac{120}{15}$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 3x^2 + 2x$이고 $f(0) = 2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점] 4

$f(x) = x^3 + x^2 + 2$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 56, \quad \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$$

일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점] 12

$\cancel{\frac{1}{2}}(a_1 + \cdots + a_7) + 2(a_8 + a_9 + a_{10}) = \cancel{56}$ 112

$a_1 + \cdots + a_8 + 2a_9 + 2a_{10} = 100$

$a_8 = 12$

19. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오. [3점] 6

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - (a^2 - 8a) \geq 0$.

$2 \cdot a$

$D/4 = a^2 + 3(a^2 - 8a) \leq 0$

$4a^2 - 24a \leq 0$

$4a(a-6) \leq 0$.

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x) = x$이다.
>
> (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서
> $f(x+1) - xf(x) = ax + \cancel{b}$ 1 이다.

$60 \times \int_1^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점] 110

$\frac{11}{6}$

(나) $f(1) = b = 1$

(나)에서 $(0 \leq x \leq 1)$일때

$f(x+1) - x^2 = ax + 1$

$f(x+1) = x^2 + ax + 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$

$\therefore f(x) = (x-1)^2 + a(x-1) + 1 \quad (1 \leq x \leq 2)$.

$f'(x) = 2(x-1) + a$.

$f'(1) = a = 1$

$\therefore f(x) = x^2 - 2x + 1 + x - 1 + 1 = x^2 - x + 1$.

$\int_1^2 x^2 - x + 1\, dx =$

$\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \cancel{2+2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1\right)$

$= \frac{8}{3} - \frac{5}{6}$

$= \frac{16-5}{6} = \boxed{\frac{11}{6}}$

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|a_1|=2$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}|=2|a_n|$이다.
>
> (다) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n=-14$

512 128 32 8 40 2 640 38

$-2 \quad 2^3 \quad 2^5 \quad 2^7 \quad 2^9$

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구하시오. [4점]

678

$|a_2|=2|a_1|$

$|a_3|=2|a_2|$

$a_1=-2$

$a_2=-4$

$a_3=+8$

$2+\cdots+2^9=\dfrac{2(2^9-1)}{2-1}$

$=2^{10}-2$

$=1022$

$a_9=2^9$

$a_{10}=-2^{10}$

$a_{10}=-1024$

1016

-1020

$-1020+(2^3+\cdots+2^9)$

$\dfrac{2^3(2^7-1)}{2-1}$

$2^{10}-2^3=1016$

1024 8

22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

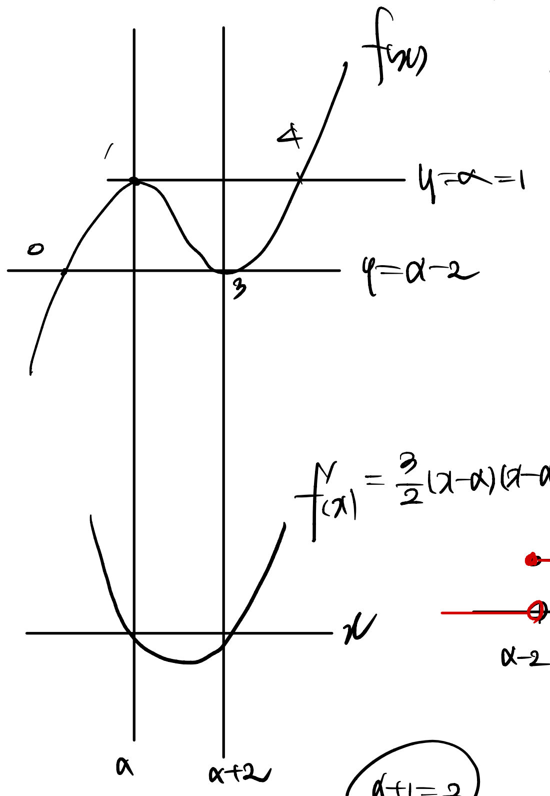
> (가) 모든 실수 a에 대하여 $\displaystyle\lim_{t\to a+} g(t)+\lim_{t\to a-} g(t)\le 2$이다.
>
> (나) $g(f(1))=g(f(4))=2$, $g(f(0))=1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

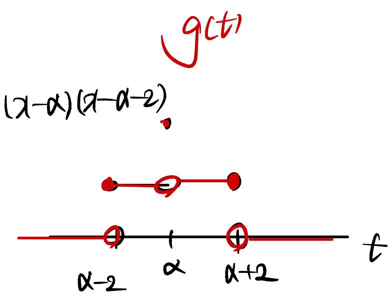
$f(x)-\alpha=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)$

$f(5)=\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot 1+1$

$=9$



$f'(x)=\frac{3}{2}(x-\alpha)(x-\alpha-2)$



$\alpha+1=2$ $\therefore \alpha=1$

(나)에서 $f(1)=f(4)=\alpha$.

$f(0)$은 $\alpha-2\le f(0)\le\alpha+2$.

> ∗ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 다항식 $(x+2)^7$의 전개식에서 x^5의 계수는? [2점]

① 42 ② 56 ③ 70 ④ 84 ⑤ 98

24. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $\mathrm{V}(2X)=40$일 때, n의 값은? [3점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

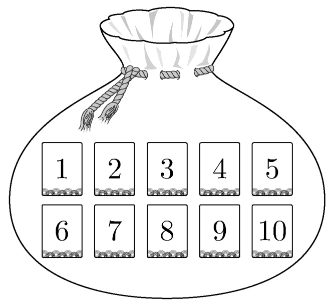
25. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는? [3점]

(가) $a+b+c+d+e=12$
(나) $\left\|a^2-b^2\right\|=5$

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

26. 1부터 10까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 카드 3장을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4 이하이거나 7 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{13}{15}$ ④ $\frac{9}{10}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



27. 어느 자동차 회사에서 생산하는 전기 자동차의 1회 충전 주행 거리는 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 100대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 400대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다.
$\overline{x_1} - \overline{x_2} = 1.34$이고 $a = c$일 때, $b-a$의 값은? (단, 주행 거리의 단위는 km이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 5.88 ② 7.84 ③ 9.80 ④ 11.76 ⑤ 13.72

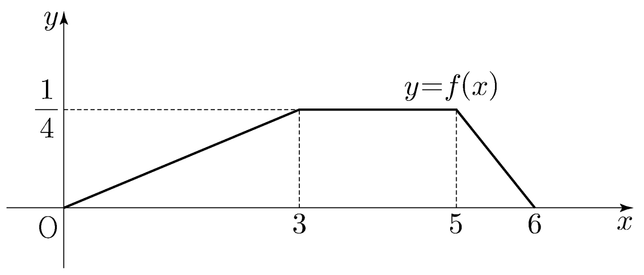
28. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는? [4점]

(가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \ge \sqrt{x}$이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 138 ③ 148 ④ 158 ⑤ 168

단답형

29. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 6$, $0 \le Y \le 6$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0 \le x \le 6$인 모든 x에 대하여

$$f(x)+g(x)=k \ \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킬 때, $\mathrm{P}(6k \le Y \le 15k)=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 5 이상이면
> 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고,
> 나온 눈의 수가 4 이하이면
> 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 5번 반복할 때, $n(1 \le n \le 5)$번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a_n, b_n이라 하자. $a_5+b_5 \ge 7$일 때, $a_k=b_k$인 자연수 $k(1 \le k \le 5)$가 존재할 확률은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{5}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^3}}$ 의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$\dfrac{5n^2+3n}{n^2-2}$

24. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^3+x)=e^x$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은? [3점]

① e　② $\dfrac{e}{2}$　③ $\dfrac{e}{3}$　④ $\dfrac{e}{4}$　⑤ $\dfrac{e}{5}$

$f'(x^3+x)\times(3x^2+1)=e^x$

$f'(2)\times 4=e$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} a_n^2 = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3, \quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\,2}=6 \Rightarrow \frac{a^2}{1-r^2}=6$$

$a_1^2+a_2^2+\cdots$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점] $a \quad ar^2$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$a-ar$
ar^2-ar^3
$\vdots$

$\Rightarrow \frac{a}{1-r^2}-\frac{ar}{1-r^2}=3$

$\therefore \frac{a(\cancel{1-r})}{(\cancel{1-r})(1+r)}=3$

$a=3(1+r)$

$\frac{9(1+r)^2}{(1-r)(\cancel{1+r})}=6$

$9+9r=6-6r$

$15r=-3$

$\boxed{\therefore r=-\frac{1}{5}}$ $a=\frac{12}{5}$

$\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{6}{5}}$

26. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$의 값은? [3점]

n^2

① $\ln 5$ ② $\frac{\ln 5}{2}$ ③ $\frac{\ln 5}{3}$ ④ $\frac{\ln 5}{4}$ ⑤ $\frac{\ln 5}{5}$

$\frac{\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot 2\cdot\left(\frac{k}{n}\right)}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+3\cdot\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}$ $\frac{k}{n}=x$

$\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{\cancel{3(x^2+2x)}\,\cancel{dx}}{x^3+3x^2+1} = \frac{1}{3}\int_1^5 \frac{1}{t}\,dt$ dt

$[\ln t]_1^5$

$x^3+3x^2+1=t$ $\frac{\ln 5}{3}$

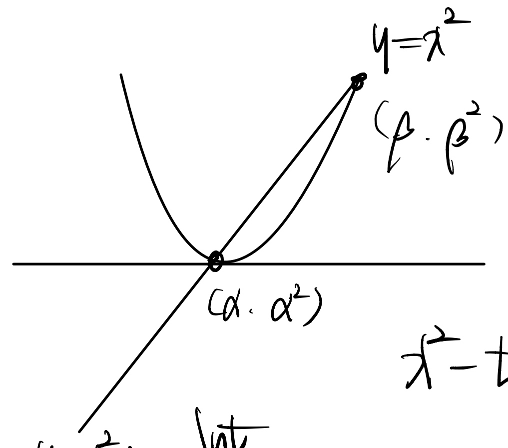
$3x^2+6x=\frac{dt}{dx}$

$3(x^2+2x)$

$f'(x)=12\pi(x-1)$

27. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$ ② $\frac{e^4}{2}-\frac{5}{16}$ ③ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{8}$



$y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$

$x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}=0$

$\alpha+\beta=t^2$

$\alpha\beta=\frac{\ln t}{8}$

$\left(\frac{t^2}{2}\right)'=t$

$\frac{t^2}{2}$ $\frac{1}{2}(t^4-\ln t)$

$M\left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$

↓

$\frac{1}{2}\left((\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right)$

$\frac{1}{2}\left(t^4-\frac{\ln t}{4}\right)$

$2\cdot\frac{1}{4}t^2\left(\frac{1}{4t}\right)$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(4t^3-\frac{1}{4t}\right)^2$

$\frac{1}{4}\left(16t^6-2t^2+\frac{1}{16t^2}\right)$

$\int_1^e \sqrt{t^2+\quad}$

$4t^6+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{64t^2}$

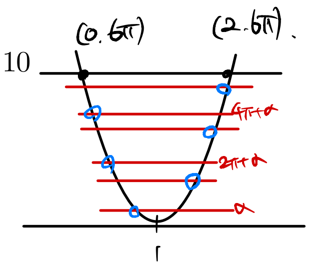
$\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)^2$

28. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10



$g'(x)=3f'(x)+4\cdot -\sin f(x)\cdot f'(x)$

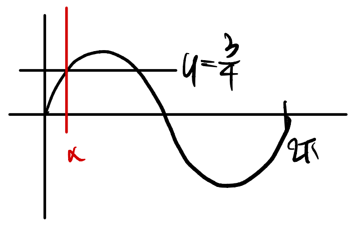
$=f'(x)\left(3-4\sin f(x)\right)$

$x<1$ ⊖
$x=1$ 0
$x>1$ ⊕

$\sin f(x)=\frac{3}{4}$ ⇒

범위

$0\le \quad <6\pi$



① $f(x)=\alpha,\ 2\pi+\alpha,\ 4\pi+\alpha$

⊕ → ⊖

$x<1$, (⊖ → ⊕) × ⊖

⊖ ⇒ ⊕

② $f(x)=2\pi-\alpha,\ 4\pi-\alpha,\ 6\pi-\alpha$

⊖ → ⊕

$\int_1^e 2t^3+\frac{1}{8t}\,dt$

$\left[\frac{t^4}{2}+\frac{1}{8}\cdot\ln t\right]_1^e=\frac{e^4}{2}+\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{2}\right)$

$\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$

$\frac{dx}{dt} = g'(t)$

$x \to g(t)$

$\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$

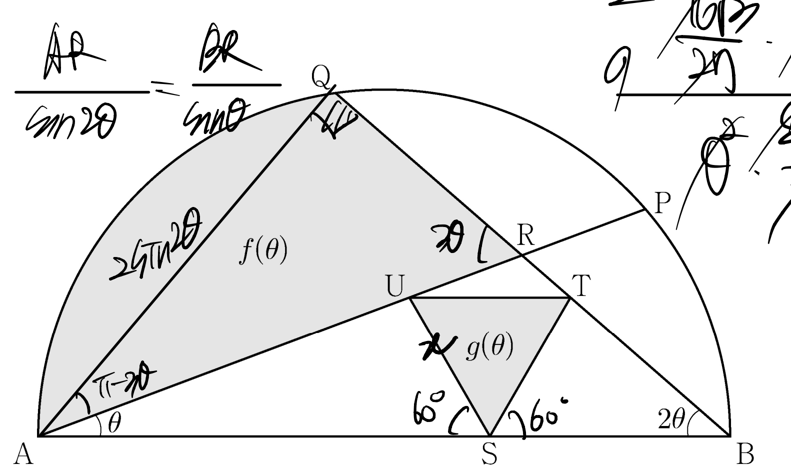
$\int_1^? t \cdot g'(t)\,dt = \frac{5}{4}$

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB = \theta$, $\angle QBA = 2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자.
선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,
$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} = \frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\frac{2}{9}\sqrt{3}$

11



$\frac{2}{\sin(\pi - 3\theta)} = \frac{AR}{\sin 2\theta} = \frac{BR}{\sin\theta}$

$\therefore AR = \frac{4}{3}$

$\frac{2}{9} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{27} \cdot \frac{\theta^2}{\theta} \cdot \frac{\theta}{8}$

$f(\theta) =$ ◯AQO $+ \triangle$QOB $- \triangle$ARB

$\frac{1}{2}\cdot 4\theta + \frac{1}{2}\cdot\sin(\pi - 4\theta) - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{4}{3}\sin\theta$

$= 2\theta + 2\theta - \frac{4}{3}\theta = \frac{8}{3}\theta$

$\frac{x}{\sin\theta} = \frac{AS}{\sin(\frac{2}{3}\pi - \theta)}$ $\quad \frac{x}{\sin 2\theta} = \frac{BS}{\sin(\frac{2}{3}\pi - \theta)}$

$\left(\frac{\sin(\frac{2}{3}\pi - \theta)}{\sin\theta} + \frac{\sin(\frac{2}{3}\pi - \theta)}{\sin 2\theta}\right) x = 2$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{x}{2\theta} + \frac{1}{2\theta}\right)$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2\theta} \cdot x = 2$

$\therefore x = \frac{2 \cdot 4\theta}{3\sqrt{3}}$

$g(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{16 \cdot 4\theta^2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{16\sqrt{3}}{27}\theta^2$

30. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1) = 1$, $\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$
(나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x) = 2f(x)$이다.

$\int_1^8 x f'(x)\,dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$G(8) = 4F(4)$
$G(4) = 4F(2)$
$G(4) = 4F(2)$
$G(2) = 4F(1)$
$G(2x) = 4F(x)$

143

$g(2) = 2f(1)$
$\therefore f(2) = 2$
$g(4) = 2f(2) = 4$
$\therefore f(4) = 4$
$g(8) = 2 \cdot f(4) = 8$
$\therefore f(8) = 8$

$[x \cdot f(x)]_1^8 - \int_1^8 f(x)\,dx$

$8f(8) - f(1) - \int_1^8 f(x)\,dx$

$63 - \int_1^8 f(x)\,dx = 63 - \frac{113}{4}$

$F(8) - F(1)$

$\frac{252 - 113}{4} = \frac{139}{4}$

$64 - 16 = 48$

$G(4) - G(2) = 4(F(2) - F(1))$

$G(8) - G(4) = 4(F(4) - F(2))$

$\frac{5}{4} + 7 + 20 = 27 + \frac{5}{4} = \frac{113}{4}$

※ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

홀수형

5지선다형

23. 좌표공간의 점 A$(2,\ 1,\ 3)$을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하고, 점 A를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는? [2점]

① $5\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $3\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{14}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

24. 한 초점의 좌표가 $(3\sqrt{2},\ 0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{6}=1$의 주축의 길이는? (단, a는 양수이다.) [3점]

① $3\sqrt{3}$ ② $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

25. 좌표평면에서 두 직선

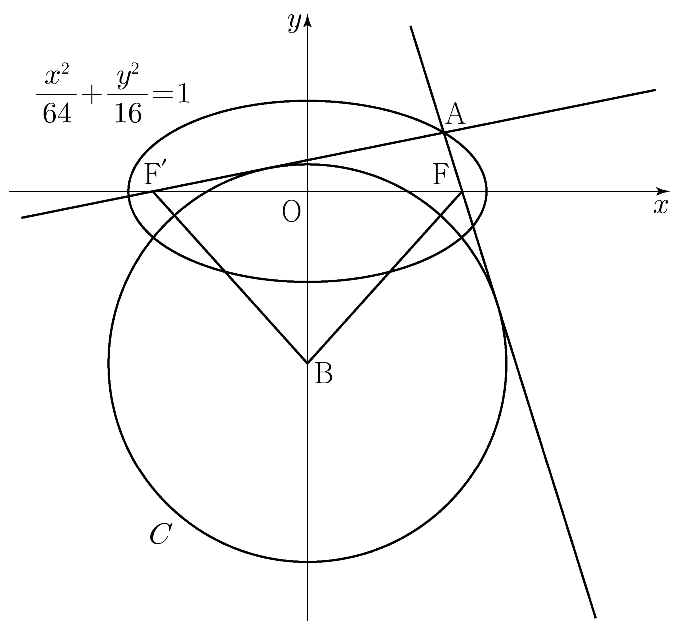
$$\frac{x+1}{2}=y-3,\quad x-2=\frac{y-5}{3}$$

가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

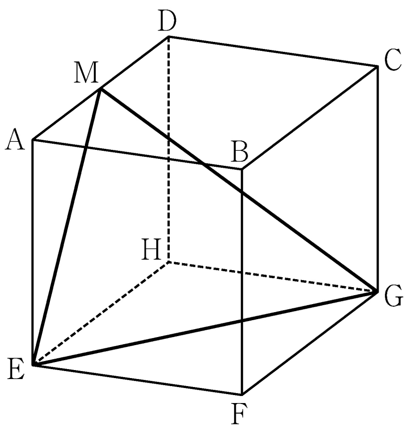
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

26. 두 초점이 F, F$'$인 타원 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A가 있다. 두 직선 AF, AF$'$에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 중 중심의 y좌표가 음수인 것을 C라 하자. 원 C의 중심을 B라 할 때 사각형 AFBF$'$의 넓이가 72이다. 원 C의 반지름의 길이는? [3점]

① $\frac{17}{2}$ ② 9 ③ $\frac{19}{2}$ ④ 10 ⑤ $\frac{21}{2}$



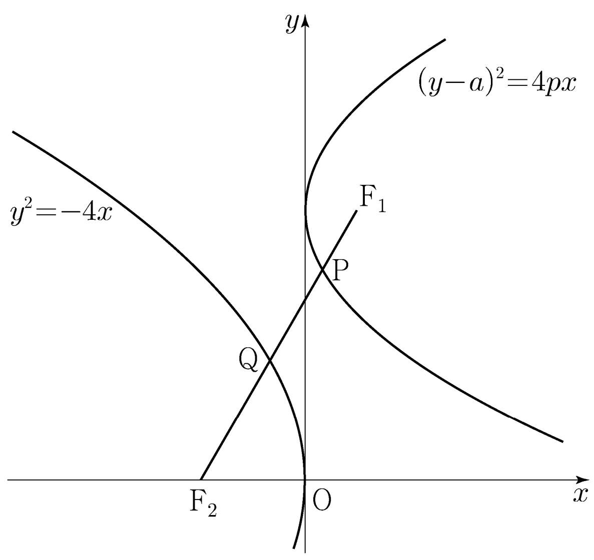
27. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 ABCD-EFGH가 있다. 선분 AD의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 MEG의 넓이는? [3점]



① $\frac{21}{2}$　　② 11　　③ $\frac{23}{2}$　　④ 12　　⑤ $\frac{25}{2}$

28. 두 양수 a, p에 대하여 포물선 $(y-a)^2=4px$의 초점을 F_1이라 하고, 포물선 $y^2=-4x$의 초점을 F_2라 하자. 선분 $\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2$가 두 포물선과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{\mathrm{F}_1\mathrm{F}_2}=3$, $\overline{\mathrm{PQ}}=1$이다. a^2+p^2의 값은? [4점]

① 6　　② $\frac{25}{4}$　　③ $\frac{13}{2}$　　④ $\frac{27}{4}$　　⑤ 7



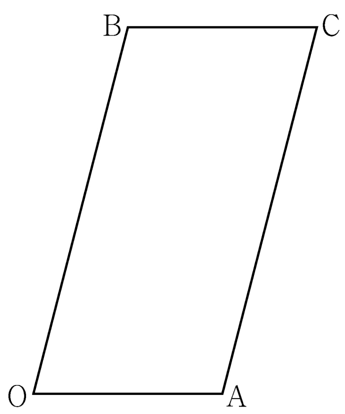
단답형

29. 좌표평면에서 $\overline{OA} = \sqrt{2}$, $\overline{OB} = 2\sqrt{2}$ 이고 $\cos(\angle AOB) = \frac{1}{4}$ 인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ $(0 \le s \le 1,\ 0 \le t \le 1)$

(나) $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BC} = 2$

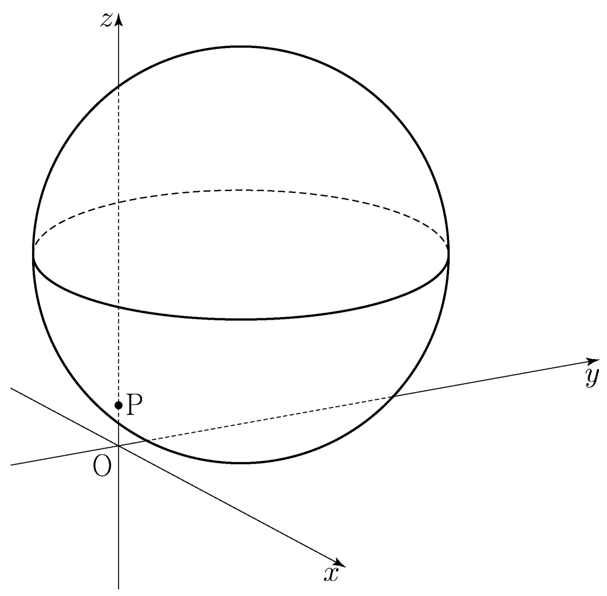
점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|3\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OX}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M \times m = a\sqrt{6} + b$일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 유리수이다.) [4점]



30. 좌표공간에 중심이 $C(2, \sqrt{5}, 5)$이고 점 $P(0, 0, 1)$을 지나는 구

$$S : (x-2)^2 + (y-\sqrt{5})^2 + (z-5)^2 = 25$$

가 있다. 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q, 구 S 위를 움직이는 점 R에 대하여 두 점 Q, R의 xy평면 위로의 정사영을 각각 Q_1, R_1이라 하자.
삼각형 OQ_1R_1의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 Q, R에 대하여 삼각형 OQ_1R_1의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고 세 점 O, Q_1, R_1은 한 직선 위에 있지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역

짝수형

5지선다형

1. $\left(2^{\sqrt{3}} \times 4\right)^{\sqrt{3}-2}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

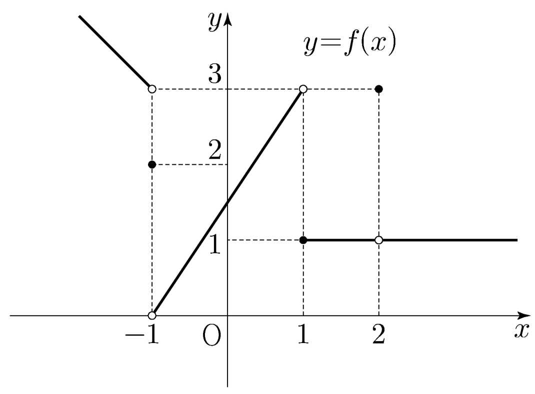
3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2=6, \quad a_4+a_6=36$$

일 때, a_{10} 의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 2} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n<7) \\ a_n-7 & (a_n\geq 7) \end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

6. 방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? [3점]

① 20 ② 23 ③ 26 ④ 29 ⑤ 32

7. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

8. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은? [3점]

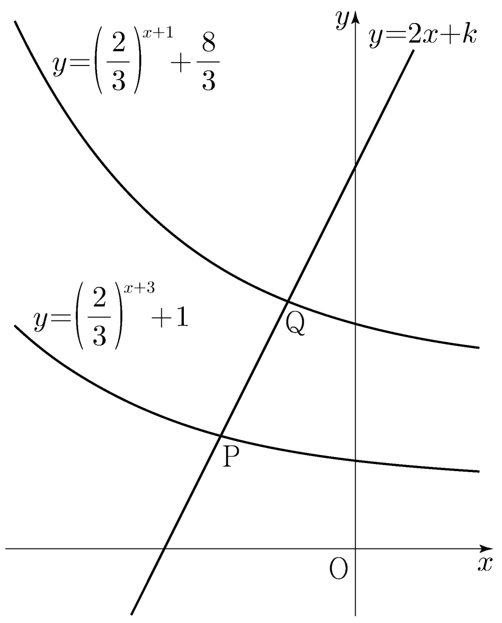
① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{35}{6}$ ② $\frac{17}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{31}{6}$



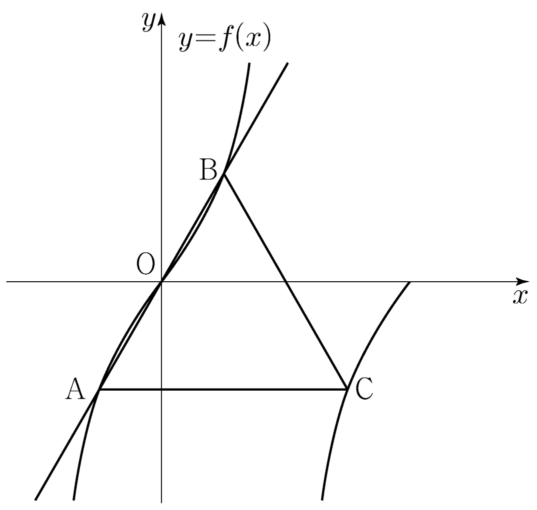
10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\,0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,\,2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① -18 ② -17 ③ -16 ④ -15 ⑤ -14

11. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2} < x \le a,\ x \ne \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$　③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$　⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{5}{2}$

13. 두 상수 a, $b\,(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다. 함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\ \ (a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

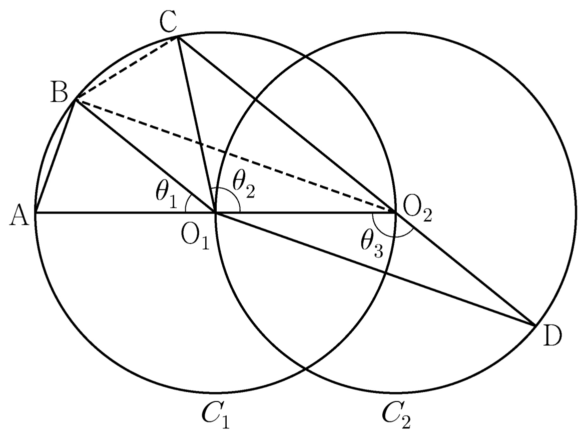
ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다.
이때 $\angle BO_1A = \theta_1$, $\angle O_2O_1C = \theta_2$, $\angle O_1O_2D = \theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB} : \overline{O_1D} = 1 : 2\sqrt{2}$이고 $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1 + \angle O_1O_2D = \pi$이므로 $\theta_3 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$에서 $2\theta_1 + \theta_2 = \pi$이므로 $\angle CO_1B = \theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B = \theta_1 + \theta_2 = \theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB} = k$라 할 때
> $\overline{BO_2} = \overline{O_1D} = 2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2} = \boxed{(가)}$이고,
> $\angle BO_2A = \dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2} = \boxed{(나)}$이다.
> 삼각형 O_2BC에서
> $\overline{BC} = k$, $\overline{BO_2} = 2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B = \dfrac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C} = \boxed{(다)}$이다.
> $\overline{CD} = \overline{O_2D} + \overline{O_2C} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2C}$이므로
> $\overline{AB} : \overline{CD} = k : \left(\dfrac{\boxed{(가)}}{2} + \boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p) \times g(p)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{55}{9}$ ② $\dfrac{166}{27}$ ③ $\dfrac{167}{27}$ ④ $\dfrac{56}{9}$ ⑤ $\dfrac{169}{27}$

단답형

16. $\log_2 120 - \dfrac{1}{\log_{15} 2}$의 값을 구하시오. [3점]

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 3x^2 + 2x$이고 $f(0) = 2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점]

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 56, \quad \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$$

일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점]

19. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오. [3점]

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x) = x$이다.
>
> (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서
> $f(x+1) - xf(x) = ax + b$이다.

$60 \times \int_{1}^{2} f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_1| = 2$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}| = 2|a_n|$이다.

(다) $\sum_{n=1}^{10} a_n = -14$

$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9$의 값을 구하시오. [4점]

22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x) = 0$이 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t \to a+} g(t) + \lim_{t \to a-} g(t) \leq 2$이다.

(나) $g(f(1)) = g(f(4)) = 2$, $g(f(0)) = 1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

짝수형

5지선다형

23. 다항식 $(x+2)^7$의 전개식에서 x^5의 계수는? [2점]

① 42 ② 56 ③ 70 ④ 84 ⑤ 98

24. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $\mathrm{V}(2X)=40$일 때, n의 값은? [3점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

25. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는? [3점]

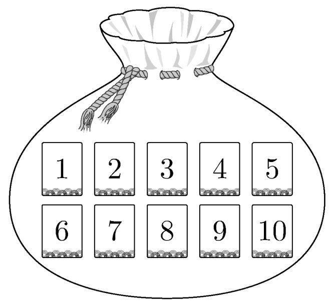
(가) $a+b+c+d+e=12$

(나) $|a^2-b^2|=5$

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

26. 1부터 10까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 카드 3장을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4 이하이거나 7 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{13}{15}$ ④ $\frac{9}{10}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



27. 어느 자동차 회사에서 생산하는 전기 자동차의 1회 충전 주행 거리는 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 100대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 400대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다.
$\overline{x_1} - \overline{x_2} = 1.34$이고 $a = c$일 때, $b - a$의 값은? (단, 주행 거리의 단위는 km이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 5.88　② 7.84　③ 9.80　④ 11.76　⑤ 13.72

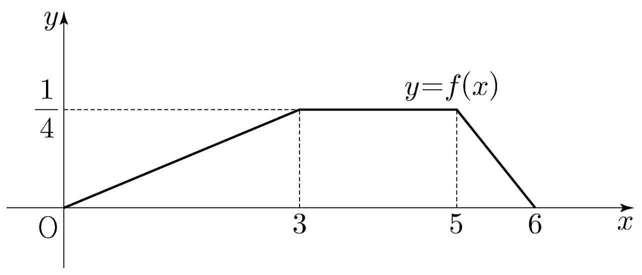
28. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는? [4점]

(가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \ge \sqrt{x}$이다.
(나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128　② 138　③ 148　④ 158　⑤ 168

단답형

29. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 6$, $0 \le Y \le 6$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0 \le x \le 6$인 모든 x에 대하여

$$f(x)+g(x)=k \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킬 때, $\mathrm{P}(6k \le Y \le 15k)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

30. 흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 5 이상이면
> 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고,
> 나온 눈의 수가 4 이하이면
> 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다.

위의 시행을 5번 반복할 때, $n(1 \le n \le 5)$번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a_n, b_n이라 하자. $a_5+b_5 \ge 7$일 때, $a_k=b_k$인 자연수 $k(1 \le k \le 5)$가 존재할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

짝수형

5지선다형

23. $\lim_{n \to \infty} \dfrac{\dfrac{5}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^3+x)=e^x$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은? [3점]

① e ② $\dfrac{e}{2}$ ③ $\dfrac{e}{3}$ ④ $\dfrac{e}{4}$ ⑤ $\dfrac{e}{5}$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3,\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\ 2}=6$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

26. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$의 값은? [3점]

① $\ln 5$ ② $\frac{\ln 5}{2}$ ③ $\frac{\ln 5}{3}$ ④ $\frac{\ln 5}{4}$ ⑤ $\frac{\ln 5}{5}$

27. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$　② $\frac{e^4}{2}-\frac{5}{16}$　③ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{4}$
④ $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{16}$　⑤ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{8}$

28. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

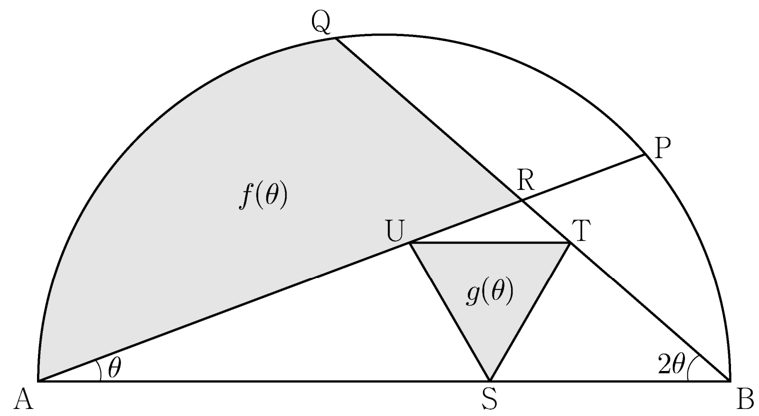
$$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$$

라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는? [4점]

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle \mathrm{PAB}=\theta$, $\angle \mathrm{QBA}=2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자.
선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,
$\displaystyle\lim_{\theta\to 0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times f(\theta)}=\frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(1)=1$, $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$
>
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=2f(x)$이다.

$\displaystyle\int_1^8 xf'(x)\,dx=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

＊ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

짝수형

5지선다형

23. 좌표공간의 점 A$(2,\ 1,\ 3)$을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 P라 하고, 점 A를 yz평면에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 할 때, 선분 PQ의 길이는? [2점]

① $5\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{13}$ ③ $3\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{14}$ ⑤ $2\sqrt{15}$

24. 한 초점의 좌표가 $(3\sqrt{2},\ 0)$인 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{6}=1$의 주축의 길이는? (단, a는 양수이다.) [3점]

① $3\sqrt{3}$ ② $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$ ③ $4\sqrt{3}$ ④ $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

25. 좌표평면에서 두 직선

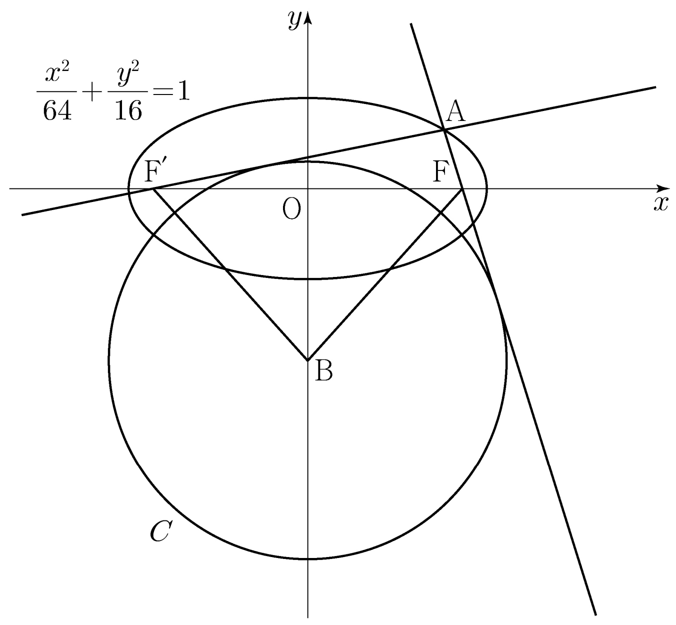
$$\frac{x+1}{2}=y-3,\quad x-2=\frac{y-5}{3}$$

가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

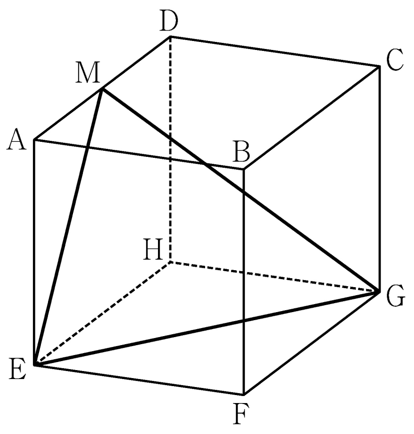
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

26. 두 초점이 F, F$'$인 타원 $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 A가 있다. 두 직선 AF, AF$'$에 동시에 접하고 중심이 y축 위에 있는 원 중 중심의 y좌표가 음수인 것을 C라 하자. 원 C의 중심을 B라 할 때 사각형 AFBF$'$의 넓이가 72이다. 원 C의 반지름의 길이는? [3점]

① $\frac{17}{2}$ ② 9 ③ $\frac{19}{2}$ ④ 10 ⑤ $\frac{21}{2}$



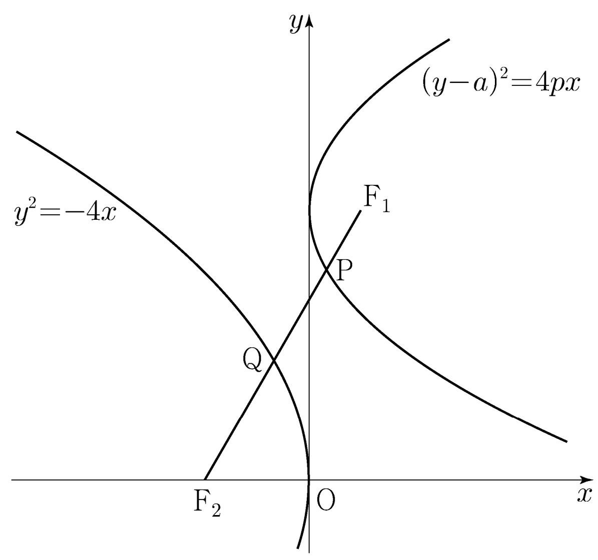
27. 그림과 같이 한 모서리의 길이가 4인 정육면체 ABCD-EFGH가 있다. 선분 AD의 중점을 M이라 할 때, 삼각형 MEG의 넓이는? [3점]



① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

28. 두 양수 a, p에 대하여 포물선 $(y-a)^2=4px$의 초점을 $\mathrm{F_1}$이라 하고, 포물선 $y^2=-4x$의 초점을 $\mathrm{F_2}$라 하자. 선분 $\mathrm{F_1F_2}$가 두 포물선과 만나는 점을 각각 P, Q라 할 때, $\overline{\mathrm{F_1F_2}}=3$, $\overline{\mathrm{PQ}}=1$이다. a^2+p^2의 값은? [4점]

① 6 ② $\frac{25}{4}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{27}{4}$ ⑤ 7

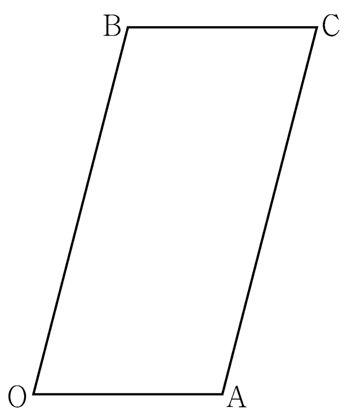


단답형

29. 좌표평면에서 $\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OB}}=2\sqrt{2}$ 이고 $\cos(\angle\mathrm{AOB})=\frac{1}{4}$ 인 평행사변형 OACB에 대하여 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ $(0\le s\le 1,\ 0\le t\le 1)$
>
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=2$

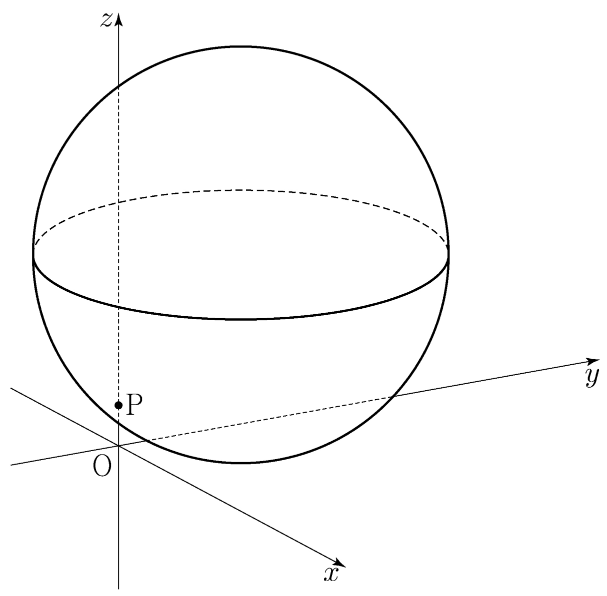
점 O를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|3\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OX}}|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 하자. $M\times m=a\sqrt{6}+b$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 유리수이다.) [4점]



30. 좌표공간에 중심이 $\mathrm{C}(2,\ \sqrt{5},\ 5)$이고 점 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 1)$을 지나는 구

$$S:(x-2)^2+(y-\sqrt{5})^2+(z-5)^2=25$$

가 있다. 구 S가 평면 OPC와 만나서 생기는 원 위를 움직이는 점 Q, 구 S 위를 움직이는 점 R에 대하여 두 점 Q, R의 xy평면 위로의 정사영을 각각 Q_1, R_1이라 하자.
삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 넓이가 최대가 되도록 하는 두 점 Q, R에 대하여 삼각형 $\mathrm{OQ_1R_1}$의 평면 PQR 위로의 정사영의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{6}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고 세 점 O, Q_1, R_1은 한 직선 위에 있지 않으며, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



＊ 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.