

1.

출제의도 : 로그의 계산을 할 수 있는가?

해설]

$$\begin{aligned}
 \log_2 3 + \log_2 \frac{4}{3} &= \log_2 \left(3 \times \frac{4}{3} \right) \\
 &= \log_2 4 \\
 &= \log_2 2^2 \\
 &= 2\log_2 2 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

<답> ②

2.

출제의도 : 행렬에 대한 덧셈과 실수배를 할 수 있는가?

해설]

$$\begin{aligned}
 A+2B &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

따라서 $A+2B$ 의 모든 성분의 합은

$$7 + (-2) + 1 + 3 = 9$$

이다.

<답> ④

3.

출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

해설]

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2x + 3) = 0 + 0 + 3 = 3$$

<답> ③

4.

출제의도 : 그래프의 연결 관계를 행렬로 나타낼 수 있는가?

해설]

주어진 그래프를 행렬로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬의 성분 중 0의 개수는 20이다.

<답> ②

[다른 풀이]

주어진 그래프는 꼭짓점의 개수는 6이고, 변의 개수는 8이다.

따라서 이 그래프의 연결 관계를 행렬로 나타내면 6×6 행렬이고 행렬의 성분 중 1의 개수는

$$2 \times 8 = 16$$

이므로 행렬의 성분 중 0의 개수는

$$36 - 16 = 20$$

5.

출제의도 : 함수의 극한의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

해설]

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax}{x-1} = b \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax) = 1 + a = 0 \text{ 이어야 한다.}$$

$$\therefore a = -1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} x = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore b = 1$$

$$\therefore a + b = (-1) + 1 = 0$$

<답> ③

6.

출제의도 : 함수의 그래프를 통해 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

해설]

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2 + 1 = 3$$

<답> ⑤

7.

출제의도 : 로그의 성질을 활용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는가?

해설]

$$\log P_1 = 8.11 - \frac{1750}{15 + 235} = 8.11 - \frac{1750}{250}$$

$$\log P_2 = 8.11 - \frac{1750}{45 + 235} = 8.11 - \frac{1750}{280}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log \frac{P_2}{P_1} &= \log P_2 - \log P_1 \\ &= \left(8.11 - \frac{1750}{280}\right) - \left(8.11 - \frac{1750}{250}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1750}{250} - \frac{1750}{280}$$

$$= 175 \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{28} \right)$$

$$= 175 \times \frac{3}{25 \times 28}$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{P_2}{P_1} = 10^{\frac{3}{4}}$$

<답> ③

8.

출제의도 : 등비수열의 일반항을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는가?

해설]

일반항 $a_n = 2^{n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} b_n &= (a_{n+1})^2 - (a_n)^2 = (2^n)^2 - (2^{n-1})^2 \\ &= 2^{2n} - 2^{2n-2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{b_6}{b_3} = \frac{2^{12} - 2^{10}}{2^6 - 2^4} = \frac{2^6(2^6 - 2^4)}{2^6 - 2^4} = 2^6 = 64$$

<답> ⑤

9.

출제의도 : 치환을 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

해설]

$x - 2 = t$ 로 놓으면 $x = t + 2$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x^2-2x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(t)}{t} \cdot \frac{1}{t+2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \\ &= 4 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= 8\end{aligned}$$

<답> ④

10.

출제의도 : 미분법의 활용에서 수직선 위의 점이 움직이는 방향을 알 수 있는가?

해설]

두 점 P, Q의 시각 t 에서의 속도는 각각

$$f'(t) = 4t - 2, \quad g'(t) = 2t - 8$$

이다.

이때, 점 P, Q가 서로 반대방향으로 움직이려면 $f'(t)g'(t) < 0$ 이어야 하므로

$$(4t-2)(2t-8) = 4(2t-1)(t-4) < 0$$

$$\therefore \frac{1}{2} < t < 4$$

<답> ①

11.

출제의도 : 수열의 일반항과 합 사이의 관계를 이용하여 분수꼴의 수열의 합을 구할 수 있는가?

해설]

$a_1 = S_1 = 2$, $a_{k+1} = S_{k+1} - S_k$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1}}{S_k S_{k+1}}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^{10} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k S_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{S_k} - \frac{1}{S_{k+1}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} \right) + \left(\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{S_{10}} - \frac{1}{S_{11}} \right) \\ &= \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_{11}} \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{S_{11}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{S_{11}} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{S_{11}} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\ \therefore S_{11} &= 6\end{aligned}$$

<답> ①

12.

출제의도 : 무한등비급수의 규칙성을 찾고 그 극한값을 구할 수 있는가?

해설]

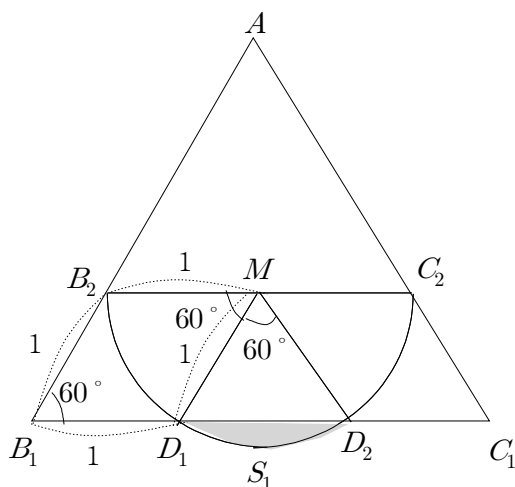
삼각형 $AB_n C_n$ 과 삼각형 $AB_{n+1} C_{n+1}$ 의 닮음비는 3:2 이므로 넓이의 비는 9:4 이다.

따라서, 각 단계에서 얻은 부분의 넓이는 공비가 $\frac{4}{9}$ 인 등비수열을 이룬다.

또한,

$$\overline{B_2 C_2} = 3 \times \frac{2}{3} = 2$$

이므로 그림과 같이 선분 $B_2 C_2$ 의 중점을 M , 선분 $B_1 C_1$ 과 호 $B_2 C_2$ 가 만나는 점을 D_1, D_2 라 하면 사각형 $B_1 B_2 M D_1$ 은 한 변의 길이가 1인 평행사변형이므로 삼각형 $M D_1 D_2$ 는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.



$$\therefore S_1 = \pi \times \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \frac{\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{4}{9}} \\ &= \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{36 - 16} \\ &= \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{20} \end{aligned}$$

<답> ②

13.

출제의도 : 도함수를 활용하여 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

해설]

함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ 에서

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$ 이므로

$f'(x) = 0$ 에서 $x = 0$ 또는 $x = 2$

$1 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	2	...	4
$f'(x)$	-	-	0	+	+
$f(x)$	$a-2$	\searrow	$a-4$	\nearrow	$a+16$

따라서 닫힌 구간 $[1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값 M , 최솟값 m 은

$$M = a + 16, \quad m = a - 4$$

이다.

이 때, $M + m = 20$ 이므로

$$2a + 12 = 20, \quad 2a = 8$$

$$\therefore a = 4$$

<답> ④

14.

출제의도 : 행렬의 성질을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판정할 수 있는가?

해설]

$$\neg. \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{이므로}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in S(\text{참})$$

$$\neg. A \in S \text{ 이므로 } A^2 = A$$

A^{-1} 이 존재하므로

$A^2 = A$ 의 양변의 오른쪽에 A^{-1} 을 곱하면

$$A^2 A^{-1} = A A^{-1} \quad \therefore A = E(\text{참})$$

$$\neg. A + E \in S \text{ 이므로 } (A + E)^2 = A + E$$

$$A^2 + 2A + E = A + E$$

$$\therefore A^2 = -A$$

$$A^4 = (A^2)^2 = (-A)^2 = A^2 = -A$$

$$(A^4)^2 = (-A)^2 = A^2 = -A$$

$$\text{이므로 } (A^4)^2 = A^4 \quad \therefore A^4 \in S(\text{참})$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

15.

출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구할 수 있는가?

해설]

$$a_n = a_{n-2} + 1 \text{에서}$$

(i) $n = 2k - 1$ 일 때,

$$a_{2k-1} = a_{2k-3} + 1 (k \geq 2)$$

수열 $\{a_{2k-1}\}$ 은 첫째항이 $a_1 = 2$ 이고

공차가 1인 등차수열이므로

$$a_{2k-1} = 2 + (k-1) \cdot 1 = k+1 (k \geq 1)$$

(ii) $n = 2k$ 일 때,

$$a_{2k} = a_{2k-2} + 1 (k \geq 2)$$

수열 $\{a_{2k}\}$ 은 첫째항이 $a_2 = 1$ 이고

공차가 1인 등차수열이므로

$$a_{2k} = 1 + (k-1) \cdot 1 = k (k \geq 1)$$

이다. $S_n = a_n a_{n+1}$ 이므로

$$S_n = \begin{cases} a_{2k-1} a_{2k} = (k+1) \times k & (n = 2k-1) \\ a_{2k} a_{2k+1} = k(k+2) & (n = 2k) \end{cases}$$

따라서 $f(k) = k$, $g(k) = k(k+2)$

$$\therefore f(6) + g(7) = 6 + 63 = 69$$

<답> ③

16.

출제의도 : 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

해설]

이차방정식 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 에서

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} (k-\alpha)(k-\beta)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \{k^2 - (\alpha + \beta)k + \alpha\beta\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k^2 - (\alpha + \beta) \sum_{k=1}^{10} k + \alpha\beta \sum_{k=1}^{10} 1$$

$$= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + (-1) \cdot 10$$

$$= 385 - 110 - 10$$

$$= 265$$

<답> ②

17.

출제의도 : 곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

해설]

$$f(x) = x^3 - 5x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 5$$

이므로 점 $A(1, -4)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = 3 - 5 = -2$$

따라서 접선의 방정식은

$$y - (-4) = -2(x - 1)$$

$$\therefore y = -2x - 2$$

이 때, 접선과 곡선 $y = f(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표는

$$x^3 - 5x = -2x - 2$$

$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)^2(x+2) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=-2$$

따라서 B(-2, 2)이므로

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{(-2-1)^2 + (2+4)^2} \\ &= \sqrt{9+36} \\ &= 3\sqrt{5}\end{aligned}$$

<답> ④

18.

출제의도 : 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가?

해설]

$(-3)^{n-1}$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수가 a_n 이므로 방정식 $x^n = (-3)^{n-1}$ 에서

(i) $n = 2k+1$ (k 는 자연수)인 경우

$$x^n = (-3)^{2k} = 3^{2k} > 0$$

n 이 홀수이므로 실근의 개수는 1이다.

$$\therefore a_{2k+1} = 1 \text{ (k 는 자연수)}$$

(ii) $n = 2k$ (k 는 자연수)인 경우

$$x^n = (-3)^{2k-1} = -3^{2k-1} < 0$$

n 이 짝수이므로 실근의 개수는 0이다.

$$\therefore a_{2k} = 0 \text{ (k 는 자연수)}$$

(i), (ii)에 의하여

$$a_n = \begin{cases} a_{2k+1} = 1 & (n=2k+1) \text{ (단, } k \text{는 자연수)} \\ a_{2k} = 0 & (n=2k) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} &= \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_4}{2^4} + \frac{a_5}{2^5} + \frac{a_6}{2^6} + \dots \\ &= \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \dots \\ &= \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \dots \\ &= \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

<답> ①

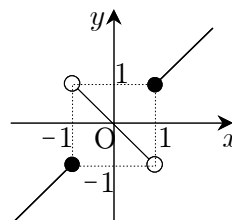
19.

출제의도 : 함수의 연속성에 대한 성질을 이해할 수 있는가?

해설]

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$, $x=1$ 에서 불연속이므로 불연속인 점은 2개다. (참)



ㄴ. $g(x) = (x-1)f(x)$ 라 하면

$$g(1) = (1-1) \cdot f(1) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow 1-0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x-1)(-x) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)x = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$ 이므로 함수 $g(x)$ 는

$x=1$ 에서 연속이다. (참)

ㄷ. $h(x) = \{f(x)\}^2$ 라 하면

$$(i) h(-1) = \{f(-1)\}^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow -1-0} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1-0} x^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} h(x) = \lim_{x \rightarrow -1+0} (-x)^2 = 1^2 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} h(x) = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(-1)$ 이므로 함수 $h(x)$ 는

$x=-1$ 에서 연속이다.

$$(ii) h(1) = \{f(1)\}^2 = 1^2 = 1$$

$$\text{또, } \lim_{x \rightarrow 1-0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (-x)^2 = (-1)^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} x^2 = 1^2 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1)$ 이므로 함수 $h(x)$ 는

$x=1$ 에서 연속이다.

즉, (i), (ii)로부터 함수 $h(x)$ 는 $x=-1$, $x=1$ 에서 연속이므로 실수전체의 집합에서 연속이다.(참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

20.

출제의도 : 수열의 극한과 함수의 그래프와 방정식의 관계를 이해하고 있는가?

해설]

(i) $nf(a) - 1 \geq 0$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|nf(a) - 1| - nf(a)}{2n + 3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nf(a) - 1 - nf(a)}{2n + 3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{2n + 3} = 0$$

이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|nf(a) - 1| - nf(a)}{2n + 3} = 1 \text{에 모순}$$

(ii) $nf(a) - 1 < 0$ 일 때,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|nf(a) - 1| - nf(a)}{2n + 3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-nf(a) + 1 - nf(a)}{2n + 3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2nf(a) + 1}{2n + 3}$$

$$= -f(a) = 1$$

$$\therefore f(a) = -1$$

따라서 주어진 그래프에서 $f(a) = -1$ 인 상수 a 의 개수는 2개이다.

<답> ②

21.

출제의도 : 상용로그의 가수의 성질을 알 수 있는가?

해설]

(i) $1 \leq x < 5$ 일 때, $2 \leq 2x < 10$ 이므로

$$f(x) = \log x, f(2x) = \log 2x = \log 2 + \log x$$

따라서 $f(2x) > f(x)$ 이므로 주어진 부등식을 만족하는 x 는 존재하지 않는다.

(ii) $5 \leq x < 10$ 일 때, $10 \leq 2x < 20$ 이므로

$$f(x) = \log x$$

$$f(2x) = -1 + \log 2x = -1 + \log 2 + \log x$$

이때, 부등식 $f(2x) \leq f(x)$ 에서

$$-1 + \log 2 + \log x \leq \log x$$

$$\therefore \log 2 < 1$$

따라서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

(iii) $10 \leq x < 50$ 일 때, $20 \leq 2x < 100$ 이므로

$$f(x) = -1 + \log x,$$

$$f(2x) = -1 + \log 2x = -1 + \log 2 + \log x$$

따라서 $f(2x) > f(x)$ 이므로 주어진 부등식을 만족하는 x 는 존재하지 않는다.

(iv) $50 \leq x < 100$ 일 때, $100 \leq 2x < 200$ 이므로

$$f(x) = -1 + \log x$$

$$f(2x) = -2 + \log 2x = -2 + \log 2 + \log x$$

이때, 부등식 $f(2x) \leq f(x)$ 에서

$$-2 + \log 2 + \log x \leq -1 + \log x$$

$$\therefore \log 2 < 1$$

따라서 주어진 부등식은 항상 성립한다.

위의 (i)~(iv)에서 $f(2x) \leq f(x)$ 를 만족하는 자연수는

5, 6, 7, 8, 9와 50, 51, 52, ..., 99로 모두 55개다.

<답> ①

22.

출제의도 : 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

해설]

$$f(x) = x^2 + 7x \text{ 에서}$$

$$f'(x) = 2x + 7$$

$$\therefore f'(3) = 2 \times 3 + 7 = 13$$

<답> 13

23.

출제의도 : 함수의 극한의 성질을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가?

해설]

$a \neq 0$ 일 때, 주어진 식의 극한은 ∞ 또는 $-\infty$ 로 발산한다.

따라서 $a = 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn+7}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b+\frac{7}{n}}{3+\frac{1}{n}} = 4 \text{ 에서 } \frac{b}{3} = 4$$

$$\therefore b = 12$$

$$\therefore a+b = 0+12 = 12$$

<답> 12

24.

출제의도 : 등차수열의 첫째항과 공차를 구할 수 있는가?

해설]

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$\begin{aligned} a_{10} + a_6 &= (a+9d) + (a+5d) \\ &= 2a + 14d = 6 \quad \text{--- ㉠} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{10} - a_6 &= (a+9d) - (a+5d) \\ &= 4d = -12 \quad \text{--- ㉡} \end{aligned}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } a = 24, d = -3$$

$$\therefore a_2 = a + d = 21$$

<답> 21

25.

출제의도 : 로그부등식을 풀 수 있는가?

해설]

(i) 진수 조건에서

$$7-x > 0, 7+x > 0$$

$$\therefore -7 < x < 7 \quad \text{--- ㉠}$$

(ii) 주어진 부등식을 풀면

$$\log_2(7-x) + \log_2(7+x) > 4$$

$$\log_2(7-x)(7+x) > \log_2 16$$

밑이 1보다 큰 2이므로

$$(7-x)(7+x) > 16$$

$$x^2 - 33 = (x - \sqrt{33})(x + \sqrt{33}) < 0$$

$$\therefore -\sqrt{33} < x < \sqrt{33} \quad \text{--- ㉡}$$

이때, $5 < \sqrt{33} < 6$ 이므로 ㉠과 ㉡에서 정수 x 는 $-5, -4, -3, \dots, 3, 4, 5$ 의 11개다.

<답> 11

26.

출제의도 : 역행렬과 연립일차방정식의 관계를 이해하고 있는가?

해설]

$$\begin{cases} ax+by=1 \\ cx+dy=2 \end{cases} \text{에서}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ 즉, } A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

주어진 연립일차방정식의 해가

$$x=5, y=4 \text{ 이므로}$$

$$A \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

$$\therefore p=5, q=4$$

$$\therefore p+q=9$$

<답> 9

27.

출제의도 : 미분계수의 뜻을 이해하고 있는가?

해설]

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-5}{x-1} = 9 \text{에서} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-5\} = 0 \text{이어야 한다.}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$$

다항함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 연속

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이다.

$$\therefore f(1) = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-5}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= f'(1) = 9 \end{aligned}$$

$$\therefore g'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{xf(x)-f(x)\} + \{f(x)-f(1)\}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x)}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + f'(1)$$

$$= f(1) + f'(1)$$

$$= 5 + 9$$

$$= 14$$

<답> 14

28.

출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 수열의 점화식을 구하여 일반항을 구할 수 있는가?

해설]

$\frac{1}{n+2} < \frac{a_n}{k} < \frac{1}{n}$ 이므로 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0$ 이다.

따라서 주어진 부등식의 각 변의 역수를 취하면

$$n < \frac{k}{a_n} < n+2$$

$$\therefore na_n < k < (n+2)a_n$$

이때, na_n , $(n+2)a_n$ 은 모두 자연수이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 k 의 개수는

$$(n+2)a_n - na_n - 1 = 2a_n - 1$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n - 1$$

이때, $a_{n+1} - 1 = 2(a_n - 1)$ 이므로 수열 $\{a_n - 1\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 1 = 1$, 공비가 2인 등비수열이다.

$$\therefore a_n - 1 = 1 \times 2^{n-1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\therefore a_n = 2^{n-1} + 1$$

$$\therefore a_{10} = 2^9 + 1 = 513$$

<답> 513

29.

출제의도 : 지수방정식이 실근을 갖기 위한 조건을 구할 수 있는가?

해설]

$$4^x + 4^{-x} + a(2^x - 2^{-x}) + 7 = 0$$

$$(2^x - 2^{-x})^2 + a(2^x - 2^{-x}) + 9 = 0$$

$$2^x - 2^{-x} = X \text{로 놓으면}$$

$$X^2 + aX + 9 = 0$$

이 방정식이 실근을 가지려면 판별식 D 는

$$D = a^2 - 36 \geq 0$$

$$(a+6)(a-6) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -6 \text{ 또는 } a \geq 6$$

따라서 양수 a 의 최솟값 m 은

$$m = 6$$

$$\therefore m^2 = 36$$

<답> 36

30.

출제의도 : 그래프를 이해하여 로그부등식을 풀고 주어진 조건을 만족하는 값을 구할 수 있는가?

해설]

(가)에서 $a \geq 3$ 이고

(나)에서

$$\frac{\log_n a}{a-2} \leq \frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

이어야 한다.

(i) $\textcircled{1}$ 에 $a=3$ 을 대입하면

$$\frac{\log_n 3}{3-2} \leq \frac{1}{2}, \log_n 3 \leq \frac{1}{2}$$

$$\log_n 3 \leq \log_n \sqrt{n}$$

따라서 $\sqrt{n} \geq 3$ ($\because n > 1$)이므로

$$n \geq 9$$

(ii) $\textcircled{1}$ 에 $a=4$ 를 대입하면

$$\frac{\log_n 4}{4-2} \leq \frac{1}{2}, \log_n 4 \leq 1$$

$$\log_n 4 \leq \log_n n$$

$$\therefore n \geq 4 \quad (\because n > 1)$$

(iii) $\textcircled{1}$ 에 $a=5$ 를 대입하면

$$\frac{\log_n 5}{5-2} \leq \frac{1}{2}$$

따라서 $n^3 \geq 25$ 이므로

$$n \geq 3 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} 4 & (4 \leq n \leq 8) \\ 3 & (n \geq 9) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=4}^{30} f(n) &= \sum_{n=4}^8 f(n) + \sum_{n=9}^{30} f(n) \\ &= \sum_{n=4}^8 4 + \sum_{n=9}^{30} 3 = 4 \times 5 + 3 \times 22 = 86\end{aligned}$$

<답> 86