21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고
> $g'(x) \le \frac{1}{3}$이다.
> (나) $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)} = \frac{8}{9}$

$f(1)$의 값은? [4점]

① -11 ② -9 ③ -7 ④ -5 ⑤ -3

$sol)$

$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \le \frac{1}{3} \Rightarrow f'(x) \ge 3$ ($g(x)$는 모든 실수를 나타내므로)

(나) 조건에서 $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)-g(x)}{x-3} \times \frac{1}{g(x)}$이 수렴하므로

$\lim_{x \to 3} f(x) - g(x) = 0$이다. 따라서 $f(3) = g(3) = 3$

($f(x)$는 증가함수이므로 역함수와의 교점은 $y = x$위에 존재한다.)

이제 주어진 식을 다시 보면

$$\lim_{x \to 3} \frac{\{f(x)-3\}-\{g(x)-3\}}{x-3} \times \frac{1}{g(x)} = \{f'(3)-g'(3)\} \times \frac{1}{g(3)} = \frac{1}{3}\left(f'(3) - \frac{1}{f'(3)}\right) = \frac{8}{9}$$

$\Leftrightarrow 3\{f'(3)\}^2 - 8f'(3) + 3 = 0 \Leftrightarrow \{3f'(3)-1\}\{f'(3)-3\} = 0 \Leftrightarrow f'(3) = 3 \text{ or } \frac{1}{3}$인데

$f'(x) \ge 3$이므로 $f'(3) = 3$이다.

$f'(x) \ge 3, f'(3) = 3$이므로 3은 $f'(x)$의 최솟값이다. 또 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

$\therefore f'(x) = 3(x-3)^2 + 3$

양 변을 적분하면 $f(x) = (x-3)^3 + 3x + C$이고 $f(3) = 3$이므로 $C = -6$,

$\therefore f(x) = (x-3)^3 + 3x - 6,\ f(1) = -11$

※$f(1) = f(3) + \int_3^1 f'(x)dx = 3 + \left[(x-3)^3 + 3x\right]_3^1 = 3 - 8 + 3 - 0 - 9 = -11$

※조건 (나)를 아래와 같이 해석할 수도 있다.

$$\lim_{x \to 3} \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - 1}{x-3} = \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}\Big|_{x=3} = \frac{f'(3)g(3) - f(3)g'(3)}{\{g(3)\}^2} = \frac{f'(3) - \frac{1}{f'(3)}}{3}$$

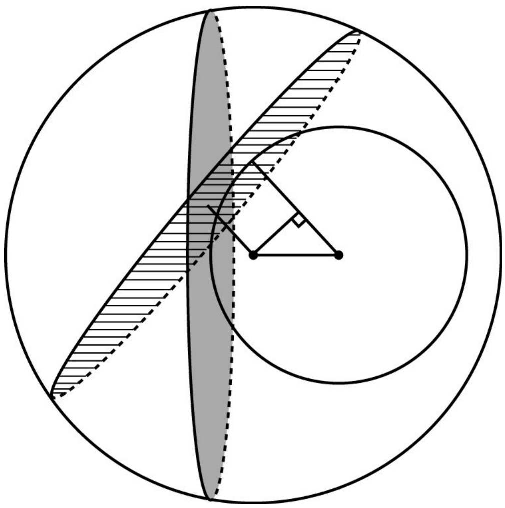
27. 좌표공간에서 구

$$S: (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=4$$

위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P에서 구 S에 접하는 평면이 구 $x^2+y^2+z^2=16$과 만나서 생기는 도형의 넓이의 최댓값은 $(a+b\sqrt{3})\pi$이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 자연수이다.) [4점]

$sol1)$

먼저 두 구의 위치관계를 보자.
두 구의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{3}$이고 $2+\sqrt{3}<4$이므로 아래 그림과 같이 구 S가 $x^2+y^2+z^2=16$ 내부에 포함되어 있는 상태이다.



구 S의 한 접평면과 $(0,0,0), (1,1,1)$사이의 거리를 각각 d_1, d_2라고 하면, d_2는 2로 일정하고, 그림에서
$|d_2-d_1|=|2-d_1|\le\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}\le d_1-2\le\sqrt{3}$
$\Leftrightarrow 2-\sqrt{3}\le d_1\le 2+\sqrt{3}$
구하는 넓이는 $(16-d_1^2)\pi$이므로 d_1이 최솟값인 $2-\sqrt{3}$을 가질 때 최댓값 $(16-(2-\sqrt{3})^2)\pi$
$(9+4\sqrt{3})\pi$를 갖는다.
(그림에서 회색으로 색칠된 평면일 때)

$sol2)$

주어진 두 구를 $(-1,-1,-1)$만큼 평행이동해서 생각하자. S가 평행이동에 의해 옮겨진 구를 S'라고 한다.

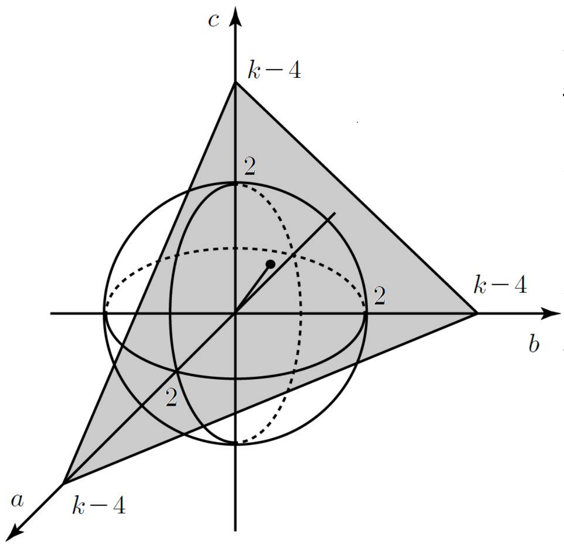
구 S' 위의 점 (a,b,c)에서의 접평면 $ax+by+cz=4$과 $(-1,-1,-1)$사이의 거리를 d라고 하면 넓이는 $(16-d^2)\pi$, 따라서 d가 최소일 때 넓이는 최댓값을 갖는다.

점 (a,b,c)가 $S' : x^2+y^2+z^2=4$ 위의 점이므로 $a^2+b^2+c^2=4$이고
점과 평면 사이의 거리공식에 의해 $d=\dfrac{|a+b+c+4|}{2}$이다.
코시$-$슈바르츠 부등식에 의해 $(a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2)\geq(a+b+c)^2$
$-\sqrt{12}\leq a+b+c\leq\sqrt{12}$, $-\sqrt{12}+4\leq a+b+c+4\leq\sqrt{12}+4$
d의 최솟값은 $\dfrac{-\sqrt{12}+4}{2}=-\sqrt{3}+2$이고 그 때의 넓이는
$(16-(2-\sqrt{3})^2)\pi=(16-7+4\sqrt{3})\pi=(9+4\sqrt{3})\pi$

$\therefore a=9, b=4, a+b=13$

$sol3)$

$sol2)$의 중간부터
$a^2+b^2+c^2=4,\ d=\dfrac{|a+b+c+4|}{2}$에서
구하는 것은 d의 최솟값이므로 d의 값을 결정하는 $a+b+c+4$를 k라 두고 생각하자.
$a+b+c=4-k$와 $a^2+b^2+c^2=4$를 좌표평면에 나타내면
중심이 원점이고 반지름이 2인 구와 세 절편의 좌표가 모두 $4-k$인 평면이다.



그림에서 절편인 $k-4$는 평면이
$x<0, y<0, z<0$인 부분에서 구와 접할 때
최솟값을 가짐을 알 수 있다.
구에 접하면 원점과 평면 사이의 거리인
$\dfrac{|4-k|}{\sqrt{3}}$가 2가 된다. 따라서 $k=4\pm2\sqrt{3}$이다.
구하는 것은 $|k|$의 최솟값이고 $k>0$이므로
k의 최솟값인 $4-2\sqrt{3}$이 $|k|$의 최솟값이 된다.

29. 좌표공간에서 네 점 $\mathrm{A_0}$, $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{A_3}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}| = |\overrightarrow{\mathrm{A_1A_3}}| = 2$
>
> (나) $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{A_0A}_k} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}\right) = \cos\dfrac{3-k}{3}\pi$ $(k=1,\ 2,\ 3)$

$|\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}|$의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점]

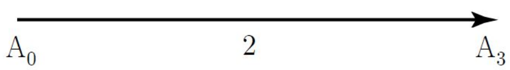
sol)

$\overrightarrow{a_{nm}} = \overrightarrow{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_m}$ 이라고 하자. $(m, n = 0, 1, 2, 3)$

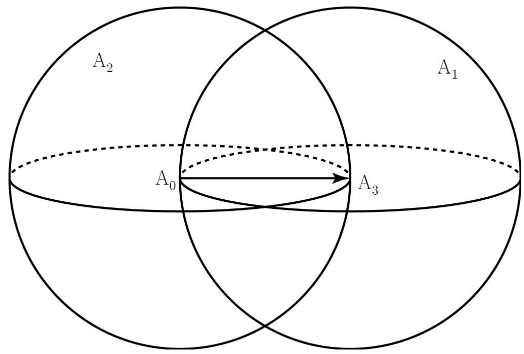
조건 (가)에서 $|\overrightarrow{a_{02}}| = |\overrightarrow{a_{13}}| = 2$이고

조건 (나)에서

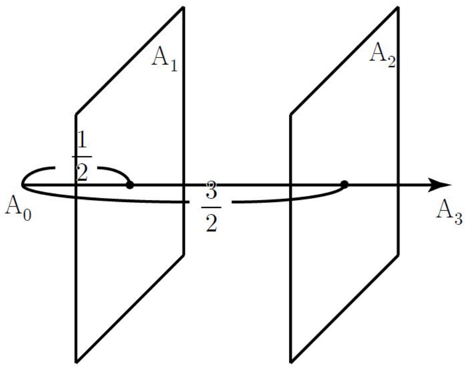
$|\overrightarrow{a_{03}}| = 2$, $\overrightarrow{a_{03}} \cdot \overrightarrow{a_{01}} = 1$, $\overrightarrow{a_{03}} \cdot \overrightarrow{a_{02}} = 3$이다.



[그림1]



[그림2]

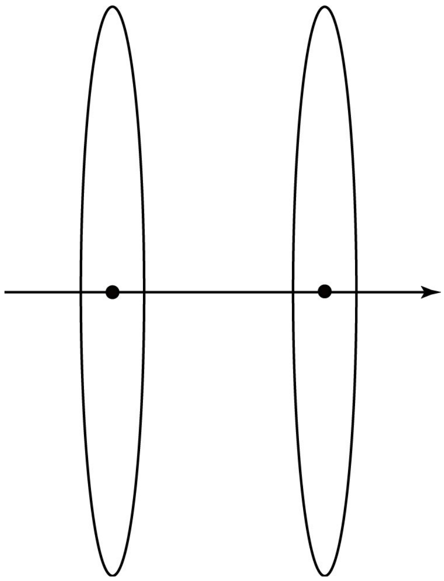


[그림3]

우선 조건 (나)에서 얻어지는 모든 식에서 나타나는 $\overrightarrow{a_{03}}$을 그리고 시작하자.([그림1])

(가)에서 두 점 $\mathrm{A_1}$과 $\mathrm{A_2}$는 [그림2]와 같은 ($\mathrm{A_0}$, $\mathrm{A_3}$을 각각 중심으로 하고 반지름이 2인)

두 구 위의 점임을 알 수 있고,
(나)로부터 $\mathrm{A_1}$과 $\mathrm{A_2}$는 각각 $\mathrm{A_0}$으로부터의 거리가 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{2}$인 $\overrightarrow{a_{03}}$에 수직인 평면위의 점임을 알 수 있다.([그림3])



[그림4]

두 자취의 교집합을 찾아보면, 두 점 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{A_2}$는 [그림4]와 같이 $\mathrm{A_0}$에서 각각 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{2}$만큼 떨어진 $\overrightarrow{a_{03}}$과 수직인 평면상의 원주 위의 점이다. 두 평면 사이의 거리는 1이며 피타고라스의 정리로 두 원의 반지름은 $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

이다. $\mathrm{A_1}$에서 $\mathrm{A_2}$를 포함한 평면에 내린 수선의 발 $\mathrm{A'}$에 대하여 $\overline{\mathrm{A_2A'}}$가 $\mathrm{A_2}$의 자취인 원의 지름이 될 때 $|\overrightarrow{a_{12}}|$가 최댓값인 $\sqrt{1^2 + \left(2 \times \dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)} = \sqrt{8} = M$을 갖는다. $\therefore\ M^2 = 8$