제 2 교시

일간 우주설 프로젝트 5일차

수학 영역

홀수형

성명		수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

라이프니츠 미분법

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

○ 공통과목 ······ 1~8 쪽

○ 선택과목

확률과 통계 ······ 9~12 쪽

미적분 ······ 13~16 쪽

기하 ······ 17~20 쪽

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

우주설

라이프니츠 미분법

제 2 교시

수학 영역 (미적분)

시작 전 사고정리

시작하기 전 각 문항을 풀어본 뒤 자신의 풀이를 정리하자.
1번 문항은 개념을 점검하기 위한 문항이다.

1. 양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오.

(2020학년도 수능 가30 제한시간 8분)

2. 실수 t에 대하여 곡선 $y=e^{x-a}$ 위의 점 $(t,\ e^{t-a})$에서의 접선의 방정식을 $y=f(x)$라 하고, 양의 실수 k에 대하여 직선 $y=f(x)$와 곡선 $y=k\ln(x-k)$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. $g(t)$가 불연속인 t의 개수가 1개가 되도록 하는 a의 값을 $h(k)$라 할 때, $\left\{h'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

(우주설 자작문항 제한시간 7분)

3. 직선 $y=x$와 $y=e^{tx}$의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때 선분 AB의 길이를 함수 $f(t)$라 하자. 각각 다음 조건을 만족시킨다. (단, O는 원점이다.)

(가) 점 A의 x좌표보다 점 B의 x좌표가 크다.
(나) $t=\alpha$일 때, $2\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$이다.

$f'(\alpha)=\left(\dfrac{a}{1-2\ln 2}+\dfrac{b}{1-\ln 2}\right)\sqrt{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 정수이다.)

(2020년 제작 우주설 자작문항, 제한시간 8분)

일반적 사고과정

양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자.$_{(1)}$ $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오.

(2020학년도 수능 가30 제한시간 8분)

(1): 두 곡선이 한 점에서 만난다는 것은 접한다는 뜻일 텐데...
접점의 좌표를 알 수가 없다.

그런데 생각해보니 변수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$의 모양은 달라지는데 곡선 $y=2e^{x-a}$와 어떻게 계속 접하지?
아! t값에 따라 곡선 $y=2e^{x-a}$도 평행이동 정도가 달라지네.
그래서 $a=f(t)$라 하였구나.

그러면 t에 값에 따라 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$의 모양이 달라지고
곡선 $y=2e^{x-f(t)}$도 좌우로 접하도록 적절히 움직이는 상황...
접점의 좌표가 t값에 따라 계속 달라질 테니
접점의 x좌표를 $g(t)$라 해버리자.

$x=g(t)$에서 함숫값이 같아야 하므로 $t^3\ln\{g(t)-t\}=2e^{g(t)-f(t)}$

$x=g(t)$에서 미분계수가 같아야 하므로 $\dfrac{t^3}{g(t)-t}=2e^{g(t)-f(t)}$

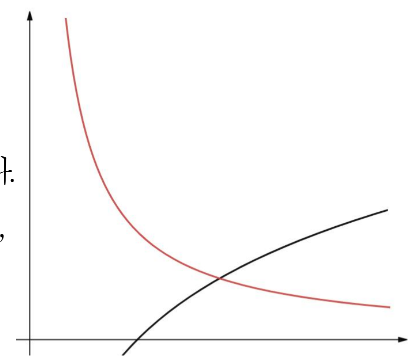
연립을 하여 조금이라도 미지수를 줄이고 싶다..!

$\ln\{g(t)-t\}=\dfrac{1}{g(t)-t}$을 얻는다.

그런데 꼴을 보아하니 뭔가 특별해 보인다.

방정식 $\ln x=\dfrac{1}{x}$의 실근에 주목해보자.

곡선 $y=\ln x$와 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$의 교점을 조사하면 1과 2사이에서 유일한 교점을 갖는 것을 알 수 있다. 이 점의 x좌표를 k라 하자. 이때, k는 1과 2사이의 상수임에 주목하자.



$\ln\{g(t)-t\}=\dfrac{1}{g(t)-t}$를 만족시키는 $g(t)=t+k$임을 알 수 있다.

그렇다면, $\dfrac{t^3}{g(t)-t}=2e^{g(t)-f(t)} \Rightarrow \dfrac{t^3}{k}=2e^{t+k-f(t)}$

양변에 자연로그를 취하면 $\Rightarrow 3\ln t-\ln k=\ln 2+t+k-f(t)$

$\Rightarrow f(t)=t-3\ln t+k+\ln 2+\ln k$

t에 대하여 미분하면, $f'(t)=1-\dfrac{3}{t}$을 얻는다.

답: 64

일반적 사고과정

실수 t에 대하여 곡선 $y=e^{x-a}$ 위의 점 $(t,\ e^{t-a})$에서의 접선의 방정식을 $y=f(x)$라 하고,(1) 양의 실수 k에 대하여 직선 $y=f(x)$와 곡선 $y=k\ln(x-k)$가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자.(2) $g(t)$가 불연속인 t의 개수가 1개가 되도록 하는 a의 값을 $h(k)$라 할 때,(3) $\left\{h'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오. [4점]

(우주설 자작문항 제한시간 7분)

(1): 접선의 방정식을 세우는 것 자체는 일이아니다.
무엇을 물어보는지 파악한 뒤 움직이도록 하자.

(2: 직선과 연속곡선이 만나는 점의 개수는 직선이 연속곡선에 접할 때와 점근선을 지날 때 변하는데, $f(x)$가 x축에 수직일 수 는 없으니 접하는 상황에서 변할 것이다.

(3): 접선을 1개밖에 못 긋는다는 건데... 그래프를 대략 그려서 관찰해보면...!
곡선 $y=e^{x-a}$와 $y=k\ln(x-k)$가 서로 접해야 하구나.
$a=h(k)$에 대하여, 접점의 x좌표는 $I(k)$라 하자.

이전 문제와 마찬가지로.

$e^{i(k)-h(k)}=k\ln\{i(k)-k\}$, $e^{i(k)-h(k)}=\dfrac{k}{i(k)-k}$를 얻는다.

연립하면, $\ln\{i(k)-k\}=\dfrac{1}{i(k)-k}$

이하 과정은 동일

답: 4

일반적 사고과정

직선 $y=x$와 $y=e^{tx}$의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때$_{(1)}$ 선분 AB의 길이를 함수 $f(t)$라 하자. 각각 다음 조건을 만족시킨다. (단, O는 원점이다.)

(가) 점 A의 x좌표보다 점 B의 x좌표가 크다.
(나) $t=\alpha$일 때, $2\overline{OA}=\overline{OB}$이다.$_{(2)}$

$f'(\alpha)=\left(\dfrac{a}{1-2\ln2}+\dfrac{b}{1-\ln2}\right)\sqrt{2}$일 때$_{(3)}$, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 정수이다.)

(2020년 제작 우주설 자작문항, 제한시간 8분)

(1): $x=e^{tx} \Rightarrow \ln x=tx \Rightarrow \dfrac{\ln x}{x}=t$로 상황을 등치하여 볼까...

$g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$라 하고, $\dfrac{\ln x}{x}=t$의 서로 다른 두 실근을 각각 $h_1(t)$, $h_2(t)$라 하자. (단, $h_1(t)<h_2(t)$)

실제로 직선 $y=x$와 $y=e^{tx}$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 상황에서의 점 A, B의 좌표 또한 $\mathrm{A}(h_1(t), h_1(t))$, $\mathrm{B}(h_2(t), h_2(t))$이 된다.

(2): $t=\alpha$일 때, $2h_1(\alpha)=h_2(\alpha)$가 성립하는데 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$에서

$g(h_1(t))=t$, $g(h_2(t))=t$에 각각 $t=\alpha$를 대입하여 연립하면

$$\frac{\ln h_1(\alpha)}{h_1(\alpha)}=\frac{\ln h_2(\alpha)}{h_2(\alpha)}$$

$$=\frac{\ln 2h_1(\alpha)}{2h_1(\alpha)}$$ 이므로, $\{h_1(\alpha)\}^2=2h_1(\alpha)$에서

$h_1(\alpha)=2$, $h_2(\alpha)=4$를 얻는다.

(3): $f(t)=\sqrt{2}\,(h_2(t)-h_1(t))$에 대하여 구하고자 하는

$f'(\alpha)=\sqrt{2}\,(h_2{}'(\alpha)-h_1{}'(\alpha))$인데, $g(h_1(t))=t$, $g(h_2(t))=t$의

양변을 t에 대하여 미분하고 $t=\alpha$를 대입하자.

$g'(h_1(\alpha))\times h_1{}'(\alpha)=1$, $g'(h_2(\alpha))\times h_2{}'(\alpha)=1$를 얻는다.

$g'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$와 $h_1(\alpha)=2$, $h_2(\alpha)=4$를 이용하면

$\dfrac{1-\ln2}{4}\times h_1{}'(\alpha)=1$, $\dfrac{1-2\ln2}{16}\times h_2{}'(\alpha)=1$이므로

$$f'(\alpha)=\sqrt{2}\,(h_2{}'(\alpha)-h_1{}'(\alpha))$$
$$=\sqrt{2}\left(\frac{16}{1-2\ln2}+\frac{-4}{1-\ln2}\right)$$

이다. $a=16$, $b=-4$이므로 $a^2+b^2=272$이다.

답: 272

제시하는 사고과정

양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자.(1) $\left\{f'\left(\frac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오.

(2020학년도 수능 가30 제한시간 8분)

(1): 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$와 곡선 $y=2e^{x-a}$이 만나는 점의 x좌표를 $\alpha(\alpha>t)$라 하면

$t^3\ln(\alpha-t)=2e^{\alpha-a}$ ······ ㉠

곡선 $y=t^3\ln(x-t)$와 곡선 $y=2e^{x-a}$ 이 한 점에서 만나려면 두 곡선이 만나는 점에서 접해야한다.

곡선 $y=t^3\ln(x-t)$에서 $y'=t^3\times\frac{1}{x-t}$

곡선 $y=2e^{x-a}$에서 $y'=2e^{x-a}$ 이때,

$t^3\times\frac{1}{\alpha-t}=2e^{\alpha-a}$ ······ ㉡

㉠의 양편을 t에 대하여 미분하면

$3t^2\ln(\alpha-t)+t^3\times\left(-\frac{1}{\alpha-t}\right)=2e^{\alpha-a}\times(-1)\times\frac{da}{dt}$

$t^3\ln(\alpha-t)\times\frac{3}{t}-\frac{t^3}{\alpha-t}=2e^{\alpha-a}\times(-1)\times\frac{da}{dt}$

㉠, ㉡에 의해

$2e^{\alpha-a}\times\frac{3}{t}-2e^{\alpha-a}=2e^{\alpha-a}\times(-1)\times\frac{da}{dt}$

$\frac{3}{t}-1=(-1)\times\frac{da}{dt}$

$\frac{da}{dt}=-\frac{3}{t}+1$

$t=\frac{1}{3}$일 때 $\frac{da}{dt}=-8$이므로

$f'\left(\frac{1}{3}\right)=-8$

답: 64

제시하는 사고과정

직선 $y=x$와 $y=e^{tx}$의 그래프가 서로 다른 두 점 A, B에서 만날 때$_{(1)}$ 선분 AB의 길이를 함수 $f(t)$라 하자. 각각 다음 조건을 만족시킨다. (단, O는 원점이다.)

(가) 점 A의 x좌표보다 점 B의 x좌표가 크다.
(나) $t=\alpha$일 때, $2\overline{OA}=\overline{OB}$이다.$_{(2)}$

$f'(\alpha)=\left(\frac{a}{1-2\ln2}+\frac{b}{1-\ln2}\right)\sqrt{2}$일 때$_{(3)}$, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a와 b는 정수이다.)

(2020년 제작 우주설 자작문항, 제한시간 8분)

(1): t값에 따라 곡선 $y=e^{tx}$이 움직이므로 $y=x$와의 교점도 달라질 것이다.

방정식 $x=e^{tx}$의 서로 다른 두 실근을 s, u라고 하면, s, u는 t에 영향을 받는 변수 일 것이다. (단, $s<u$)

$s=e^{ts}$, $u=e^{tu}$가 성립하고, $f(t)=\sqrt{2}(u-s)$

(2): $t=\alpha$일 때, $2s=u$를 만족시킨다. $u=e^{tu}$에 대입하면

$s=e^{\alpha s}$, $2s=e^{2\alpha s}$이다. 연립하면, $s^2=2s \Rightarrow s=2$

$t=\alpha$일 때, $s=2$, $u=4$이다.

$s=e^{\alpha s}$에 대입하면 $\alpha=\frac{\ln2}{2}$를 얻는다.

(3): $f'(t)=\sqrt{2}\left(\frac{du}{dt}-\frac{ds}{dt}\right)$에 대하여

$s=e^{ts}$, $u=e^{tu}$를 각각 t에 대하여 미분하면,

$$\frac{ds}{dt}=e^{ts}\left(s+t\frac{ds}{st}\right) \Rightarrow \frac{ds}{dt}(1-te^{ts})=s\,e^{ts}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dt}=\frac{s\,e^{ts}}{(1-te^{ts})}$$

마찬가지로, $\frac{du}{dt}=\frac{ue^{tu}}{(1-te^{tu})}$이므로

$$f'(t)=\sqrt{2}\left\{\frac{ue^{tu}}{(1-te^{tu})}-\frac{se^{ts}}{(1-te^{ts})}\right\}$$

$t=\alpha$일 때, $s=2$, $u=4$이므로 대입하면 ($\alpha=\frac{\ln2}{2}$)

$f'(\alpha)=\sqrt{2}\left\{\frac{16}{(1-2\ln2)}-\frac{4}{(1-\ln2)}\right\}$를 얻는다.

6일차 예습과제

정답을 내지 못하여도 상관없으니 도전하여 봅시다.

4. 함수 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$ 에 대하여 구간 $\left[\dfrac{12}{e^{12}},\ \infty\right)$ 에서 정의된 함수

$$g(t)=\int_0^{12}|f(x)-t|\,dx$$

가 $t=k$ 에서 극솟값을 갖는다. 방정식 $f(x)=k$ 의 실근의 최솟값을 a 라 할 때, $g'(1)+\ln\left(\dfrac{6}{a}+1\right)$ 의 값을 구하시오.

(2019 학년도 사관학교 (가)형 30번)

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.