2교시 정답 및 해설

• 2교시 수리 영역 •

[가 형]

1	③	**2**	②	**3**	①	**4**	④	**5**	①
6	⑤	**7**	③	**8**	③	**9**	④	**10**	④
11	①	**12**	③	**13**	②	**14**	⑤	**15**	⑤
16	④	**17**	①	**18**	②	**19**	⑤	**20**	②
21	③	**22**	3	**23**	10	**24**	32	**25**	16
26	2	**27**	120	**28**	24	**29**	170	**30**	9

1. [출제의도] 행렬의 덧셈과 곱셈 계산하기

$AB+B=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 1\\-2 & -1\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 6

2. [출제의도] 지수와 로그의 성질을 알고 계산하기

$\log_4(2^{\frac{7}{2}}\times 2^{\frac{1}{2}})=\log_4 2^4=\log_4 4^2=2$

3. [출제의도] 함수의 극한의 뜻을 이해하기

$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$

4. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이해하기

$y=\frac{\pi}{3}-x$이므로

(준식) $=\sqrt{3}\cos x+2\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

$=2\sqrt{3}\cos x-\sin x$

$=\sqrt{13}\sin(\alpha-x)$

$\left(\text{단, }\sin\alpha=\frac{2\sqrt{39}}{13},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{13}}{13}\right)$

따라서 최댓값은 $\sqrt{13}$

5. [출제의도] 무리방정식의 해 구하기

$\sqrt{x^2+x-1}=t$라 하면

$2x^2+2x-1+\sqrt{x^2+x-1}=2$에서

$2t^2+1+t=2$이므로 $(2t-1)(t+1)=0$

그러므로 $t=\frac{1}{2}$ $(\because t\geq 0)$

$\therefore\ \sqrt{x^2+x-1}=\frac{1}{2}$에서 $x^2+x-\frac{5}{4}=0$

따라서 모든 실근의 곱은 $-\frac{5}{4}$

6. [출제의도] 여러 가지 수열의 일반항 구하기

$a_{n+1}-a_n=n+1$이므로

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(k+1)$

$=1+\frac{(n-1)(n+2)}{2}$

따라서 $a_{15}=1+\frac{14\times 17}{2}=120$

7. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$a_n=S_n-S_{n-1}=2n+2\,(n\geq 2)$

$S_1=5$이므로 $a_1=5$

따라서 $a_1+a_6=5+2\times 6+2=19$

8. [출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기

함수 $f(x)$의 정의역은 $x<5$이다.

$f'(x)=\frac{-2}{5-x}+\frac{x}{2}=0$에서 $x=1$ 또는 $x=4$,

$f''(x)=\frac{-2}{(x-5)^2}+\frac{1}{2}=0$에서

$x=3$ $(\because x<5)$이므로 함수 $f'(x)$, $f''(x)$, $f(x)$를 표로 나타내면 다음과 같다.

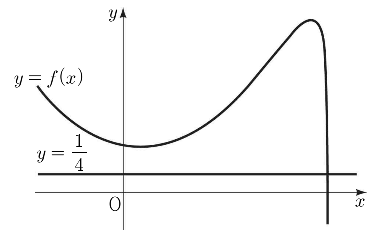
x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$f(4)$	$\searrow$	

$\left(\text{단, } f(1)=\frac{1}{4}+4\ln 2,\ f(3)=\frac{9}{4}+2\ln 2,\ f(4)=4\right)$

ㄱ. (참)

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 1이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{4}$은 다음과 같으므로 방정식 $f(x)=\frac{1}{4}$의 실근의 개수는 1이다. (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

9. [출제의도] 그래프와 행렬의 관계를 이해하기

주어진 그래프를 행렬로 나타내면

$$\begin{array}{c} \\ A\\ B\\ C\\ D\\ E\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}A & B & C & D & E\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$

이므로 $p=1$, $q=0$이고 꼭짓점 C에서 다른 한 꼭짓점을 지나 다시 꼭짓점 C로 돌아오는 방법은 CAC, CBC, CDC, CEC이므로 $r=4$이다.

따라서 $p+q+r=5$

10. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬의 관계를 이해하기

연립일차방정식 $\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & 1\\1 & k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}1-k & 1\\1 & 3-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ …… ㉠

㉠이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지므로

$(1-k)(3-k)-1=0$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 4

11. [출제의도] 행렬의 뜻을 알고 추론하기

ㄱ. $A=2B+E$이므로

$AB=(2B+E)B=2B^2+B$

$=B(2B+E)=BA$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ (거짓)

ㄷ. (반례) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ

12. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\overline{P_0P_1}=\overline{P_1P_2}=\cdots=\overline{P_{n-1}P_n}=2\sin\frac{\pi}{2n}$

이므로 각 정삼각형의 넓이는 $\sqrt{3}\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$이다.

따라서

$\lim_{n\to\infty}n\cdot S(n)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{3}n^2\times\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\pi^2$

13. [출제의도] 무한수열의 극한 이해하기

$f(n)=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^2+2n}=\frac{2n^2+3n+1}{6n+12}$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n+1}{6n^2+12n}=\frac{1}{3}$

14. [출제의도] 정적분을 뜻을 알고 추론하기

ㄱ. 구간 $(0,\,1)$에서 $\frac{d\{f(x)\}^2}{dx}=2f(x)f'(x)$

$\frac{d^2\{f(x)\}^2}{dx^2}=2\{f'(x)\}^2+2f(x)f''(x)$이므로

$\frac{d^2\{f(x)\}^2}{dx^2}>0$

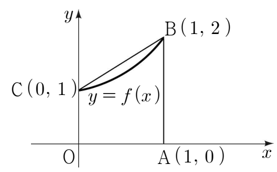
$\therefore$ 함수 $y=\{f(x)\}^2$의 그래프는 구간 $(0,\,1)$에서 아래로 볼록하다. (참)

ㄴ. $1-x=t$라 하면

$\int_0^1 f(1-x)dx=\int_0^1 f(t)dt$이므로

$\int_0^1\{f(x)+f(1-x)\}dx=2\int_0^1 f(x)dx$

조건에 의해 구간 $(0,\,1)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같고



$\int_0^1 f(x)dx$의 값은 사다리꼴 COAB의 넓이보다 작다.

$\therefore\ \int_0^1\{f(x)+f(1-x)\}dx<3$ (참)

ㄷ. ㄱ과 ㄴ에 의해

$\frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\cdot\frac{1}{n}\geq\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\{f(x)\}^2dx$

이므로

$\sum_{k=1}^{n}\frac{\left\{f\left(\frac{k-1}{n}\right)\right\}^2+\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^2}{2}\cdot\frac{1}{n}\geq\int_0^1\{f(x)\}^2dx$

(참) 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 미분계수의 정의를 이용하여 문제해결하기

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2\sin 2x}{1-\cos x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{1-\cos x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x\cos x(1+\cos x)}{\sin^2 x}$

$=\lim_{x\to 0}2\cos x(1+\cos x)\frac{x}{\sin x}=4$

16. [출제의도] 지수방정식을 활용한 실생활문제 해결하기

점 A의 x좌표를 k라 하면 점 B의 x좌표는 $k+2$, 점 C의 x좌표는 $k+4$이다.

$a^k+2=\frac{12}{5}$에서 $a^k=\frac{2}{5}$ …… ㉠

$a^{k+2}+2=\frac{9}{2}$에서 $a^{k+2}=\frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해 $a^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$이므로 $a=\frac{5}{2}$

$h=a^{k+4}+2=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{2}\right)^4+2=\frac{141}{8}$

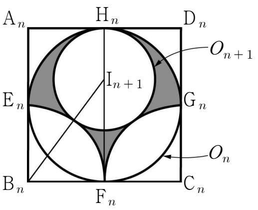
따라서 $h=\frac{141}{8}$

17. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 알고 추론하기

$f(n)=\frac{n+1}{n}$, $g(n)=5n$ 이므로

$f(5)\times g(10)=60$

18. [출제의도] 무한등비급수의 합 구하기



원 O_{n+1}의 중심을 I_{n+1}이라 하고 반지름의 길이를 r_{n+1}이라 하면 직각삼각형 $\mathrm{I}_{n+1}\mathrm{B}_n\mathrm{F}_n$에서 피타고라스의 정리에 의해

$(r_n+r_{n+1})^2=(2r_n-r_{n+1})^2+r_n^2$

$2r_nr_{n+1}=4r_n^2-4r_nr_{n+1}$

$\frac{r_{n+1}}{r_n}=\frac{2}{3}$이므로 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{4}{9}$

$\frac{r_2}{r_1}=\frac{2}{3}$이므로 $S_1=4-\left(2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\pi\right)=2-\frac{4}{9}\pi$

$\therefore$ $\{S_n\}$은 첫째항이 $2-\frac{4}{9}\pi$, 공비가 $\frac{4}{9}$인 무한등비수열이다.

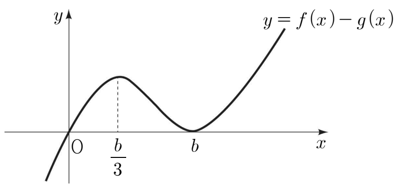
따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{2-\frac{4}{9}\pi}{1-\frac{4}{9}}=\frac{18-4\pi}{5}$

19. [출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기

ㄱ. $f(x)=px^3+qx^2+rx$ $(p>0)$라 하고 $g(x)=mx\,(m\neq 0)$라 하자.

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=f(x)-g(x)$의 변곡점의 x좌표는 $-\frac{q}{3p}$이므로 곡선 $y=f(x)-g(x)$의 변곡점의 x좌표는 a이다. (참)

ㄴ. 그림과 같이 함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프는 원점을 지나고 $x=b$에서 x축에 접하므로 $f(x)-g(x)=px(x-b)^2$이다.



$\{f(x)-g(x)\}'=p(x-b)(3x-b)$이므로

함수 $f(x)-g(x)$는 $x=\frac{b}{3}$에서 극댓값을 갖는다. (참)

ㄷ. $h(x)=f(x)-g(x)=px(x-b)^2$

이라 하면 ㄱ 에서 $h''(a)=0$이다.

$\therefore$ $a=\frac{2b}{3}$이므로 $\frac{b-a}{a}=\frac{1}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수를 미분하기

$\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-2\cos\theta\sin\theta$이고

$x=1$일 때, $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$(\text{접선의 기울기})=\frac{-2\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}}{\sec^2\frac{\pi}{4}}=-\frac{1}{2}$

21. [출제의도] 함수의 연속의 뜻을 알고 추론하기

ㄱ. $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)=0$이므로 $x=1$에서 연속이다. (참)

ㄴ. $\lim_{x\to0}f(g(x))=0$이고 $f(g(0))=-1$이므로 $x=0$에서 연속이 아니다. (거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to-1}g(f(x))=g(f(-1))=1$이므로 $x=-1$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

22. [출제의도] 삼각방정식의 해 구하기

$\cos x=t\,(-1\le t\le 1)$라 하면

$\cos2x-2\cos x=2t^2-2t-1$

$2t^2-2t-1=k$가 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위는 $-\frac{3}{2}\le k\le 3$이다.

따라서 k의 최댓값은 3

23. [출제의도] 접선의 방정식 구하기

곡선 $y=2x^2+1$ 위의 점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은 $y=-4x-1$ …… ㉠

직선 ㉠이 곡선 $y=2x^3-ax+3$에 접하므로 접점의 x좌표를 t라 하면

점 $(t,\ 2t^3-at+3)$에서의 접선의 방정식은

$y=(6t^2-a)(x-t)+2t^3-at+3$

$=(6t^2-a)x-4t^3+3$ …… ㉡

㉡이 ㉠과 같으므로 $t=1$

따라서 $a=10$

24. [출제의도] 연속함수의 뜻 이해하기

$\lim_{x\to2}(a\sqrt{x+2}+b)=0$이므로 $2a+b=0$

$\lim_{x\to2}\frac{a\sqrt{x+2}-2a}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{a}{\sqrt{x+2}+2}=2$

따라서 $a=8$, $b=-16$이므로 $2a-b=32$

25. [출제의도] 삼각함수의 배각공식을 이해하여 문제해결하기

$\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{BAD}=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$라 하면

$\cos2\theta=1-2\sin^2\theta=\frac{5}{8}$이므로 $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AD}}}=\sin\theta=p\sqrt{3}$

따라서 $\frac{1}{p^2}=16$

26. [출제의도] 여러 가지 함수의 정적분 구하기

$\int_0^1(1+2e^{-x})dx-\int_1^e\frac{\ln x}{x^2}dx$

$=\left[x-2e^{-x}\right]_0^1-\left\{\left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e-\int_1^e\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx\right\}$

$=2$

27. [출제의도] 여러 가지 수열에 관한 문제해결하기

a_n부터 a_{n+5}까지의 항의 값을 3으로 나눈 나머지를 나열하면 1, 1, 2, 2, 0, 0이므로 S_n부터 S_{n+5}까지의 항의 값을 3으로 나눈 나머지를 나열하면 1, 2, 1, 0, 0, 0이다. (단, $n=6k-5$, k는 자연수)

따라서 $40\times3=120$

28. [출제의도] 도함수를 활용하여 실생활문제 해결하기

잘라낸 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하고 상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(6-2x)(12-2x)$ (단, $0<x<3$)

$V'(x)=12(x^2-6x+6)=0$이므로

$x=3-\sqrt{3}$에서 최댓값을 갖는다.

따라서 $M=24\sqrt{3}$이므로 $\frac{\sqrt{3}}{3}M=24$

29. [출제의도] 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이용하여 문제해결하기

ⅰ) $1\le n\le 9$일 때, $[f(2)]\le3$, $[f(3)]>3$이므로 $n\ge3$이면 $[f(n)]>3$

$\therefore$ $[f(n)]\le3$을 만족시키는 n은 $1, 2$이므로 n의 개수는 2이다.

ⅱ) $10\le n\le 99$일 때,

$[f(25)]\le3$, $[f(26)]>3$이므로 $n\ge26$이면 $[f(n)]>3$

$\therefore$ $[f(n)]\le3$을 만족시키는 n은 $10, 11, 12, \cdots, 25$이므로 n의 개수는 16이다.

ⅲ) $100\le n\le 999$일 때,

$[f(251)]=3$, $[f(252)]=4$이므로 $n\ge252$이면 $[f(n)]>3$

$\therefore$ $[f(n)]\le3$을 만족시키는 n은 $100, 101, 102, \cdots, 251$이므로 n의 개수는 152이다.

따라서 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여 $[f(n)]\le3$을 만족시키는 자연수 n의 개수는 170이다.

30. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

ⅰ) $x<1$일 때, $\int_0^x(-t+1)dt=x$이므로

$-\frac{x^2}{2}+x=x$ $\therefore$ $x=0$

ⅱ) $x\ge1$일 때,

$\int_0^1(-t+1)dt+\int_1^x(t-1)dt=x$

$\frac{1}{2}+\left(\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{2}\right)=x$

$x^2-4x+2=0$

$\therefore$ $x=2+\sqrt{2}\ (\because x\ge1)$

ⅰ), ⅱ)에 의해 양수인 실근은 $x=2+\sqrt{2}$이므로 $m=2$, $n=1$이다.

따라서 $m^3+n^3=9$

[나 형]

1	③	**2**	②	**3**	⑤	**4**	④	**5**	②
6	⑤	**7**	③	**8**	⑤	**9**	④	**10**	④
11	①	**12**	③	**13**	②	**14**	①	**15**	①
16	④	**17**	①	**18**	②	**19**	④	**20**	③
21	③	**22**	2	**23**	6	**24**	32	**25**	7
26	15	**27**	120	**28**	23	**29**	170	**30**	40

1~2. '가'형과 같음

3. [출제의도] 역행렬의 뜻 이해하기

$AB=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-4 & a \\ -5 & -1+3a \end{pmatrix}$

행렬 AB의 역행렬이 존재하지 않으므로

$(a-4)(-1+3a)+5a=0$

$3a^2-8a+4=0$

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 $\frac{8}{3}$

4. [출제의도] 등비수열의 뜻 이해하기

$a+b=4$, $a+b+c=13$에서

$a(1+r)=4$, $a(1+r+r^2)=13$이므로

$\frac{r^2+r+1}{r+1}=\frac{13}{4}$, $4r^2-9r-9=0$

$\therefore\ r=3$ 또는 $r=-\frac{3}{4}$

따라서 모든 항이 양수이므로 $r=3$

5. [출제의도] 행렬의 곱셈 이해하기

$A^2=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $A^3=-E$(단, E는 단위행렬)

이므로 $A+A^2+A^3+A^4+A^5+A^6=O$

$\therefore\ A+A^2+A^3+\cdots+A^{2010}+A^{2011}=A$

따라서 모든 성분의 합은 7

6~7. '가'형과 같음

8. [출제의도] 지수부등식 해결하기

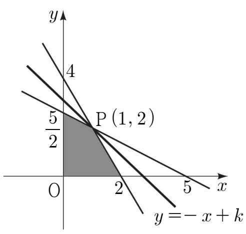
$x\ge 0$, $y\ge 0$ …… ㉠

$2^y\le 4^{2-x}$에서 $y\le -2x+4$ …… ㉡

$\left(\frac{1}{4}\right)^y=\left(\frac{1}{2}\right)^{2y}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}$에서

$2y\le -x+5$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 만족시키는 점 $(x,\ y)$를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



이때, $x+y=k$라 하면

두 직선 $y=-2x+4$, $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$의

교점 $\mathrm{P}(1,\ 2)$에서 $x+y$의 값이 최대이다.

따라서 $x+y$의 최댓값은 3

9~11. '가'형과 같음

12. [출제의도] 로그의 성질을 알고 실생활 문제해결하기

$S_1=20\log\frac{aV_0}{V_0}=6.02$,

$S_2=20\log\frac{bV_0}{V_0}=36.02$ 이므로

$S_2-S_1=20\log\frac{b}{a}=30\ \therefore\ \log\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$

따라서 $\frac{b}{a}=10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}$

13. '가'형과 같음

14. [출제의도] 무한수열의 극한값 구하기

원점 O에서 직선 $y=x+\frac{1}{n}$에 내린 수선의 발을 H_n이라 하면

(삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 높이)$=\overline{\mathrm{OH}_n}=\frac{\sqrt{2}}{2n}$,

(삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 밑변의 길이)

$=2\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}=2\sqrt{1-\overline{\mathrm{OH}}_n^2}=\frac{\sqrt{4n^2-2}}{n}$

$\therefore A_n=\frac{\sqrt{2n^2-1}}{2n^2}$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot A_n=\frac{\sqrt{2}}{2}$

15. [출제의도] 지수방정식의 해 구하기

$2^x=t(t>0)$라 하면

$2^x-6+2^{3-x}=t-6+\frac{8}{t}=0$에서

$t=2$ 또는 $t=4$이므로 $\alpha=1$, $\beta=2(\because\alpha<\beta)$

따라서 $\alpha+2\beta=5$

16~18. '가'형과 같음

19. [출제의도] 함수의 극한값 구하기

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+2t}$ 이므로 $S(t)=(t^2+2t)\pi$

원 C 위의 점 P에서의 접선의 방정식이

$tx+\sqrt{2t}\,y=t^2+2t$이므로 $\mathrm{Q}(t+2,\ 0)$

$\overline{\mathrm{OQ}}=t+2$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2t+4}$ 이므로

$\lim\limits_{t\to+0}\frac{S(t)}{\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}}=\lim\limits_{t\to+0}\frac{(t^2+2t)\pi}{(t+2)-\sqrt{2t+4}}=4\pi$

따라서 $\lim\limits_{t\to+0}\frac{S(t)}{\overline{\mathrm{OQ}}-\overline{\mathrm{PQ}}}=4\pi$

20. [출제의도] 무한급수의 뜻을 알고 추론하기

ㄱ. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

$\therefore\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산 (참)

ㄴ. (반례) $a_n=\frac{1}{3^n}$, $b_n=2$ (거짓)

ㄷ. $a_1=1$, $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}a_n$이므로

$a_2=\frac{1}{2}a_1$, $a_3=\frac{1}{3}a_2$, $\cdots$, $a_n=\frac{1}{n}a_{n-1}$

$\therefore\ a_n=\frac{1}{2\times3\times4\times\cdots\times n}a_1=\frac{1}{n!}$이므로

$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

21. '가'형과 같음

22. [출제의도] 무한수열의 극한값 구하기

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n^2+3n+2}-n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(\sqrt{n^2+3n+2}+n)}{(\sqrt{n^2+3n+2}-n)(\sqrt{n^2+3n+2}+n)}$

$=2$

23. [출제의도] 로그함수의 그래프의 성질을 이해하기

$\overline{\mathrm{BC}}=\log_a4-\log_b4=2$ …… ㉠

점 A, B의 y좌표가 같으므로

$\log_a2=\log_b4$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\log_a4-\log_a2=\log_a2=2$에서 $a=\sqrt{2}$, $b=2$

따라서 $a^2+b^2=6$

24. '가'형과 같음

25. [출제의도] 함수의 극한에 관한 성질을 알고 추론하기

조건 (가)에 의해 $f(x)-3x^3=2x^2+ax+b$라 하면

$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x^3+2x^2+ax+b}{x}=2$이므로

$a=2$, $b=0$

따라서 $f(x)=3x^3+2x^2+2x$이므로 $f(1)=7$

26. [출제의도] 역행렬의 뜻 이해하기

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 할 때,

행렬 A는 역행렬을 갖지 않으므로 $ad=bc$

ⅰ) $a=b=c=d$인 경우 3가지

ⅱ) $ad=bc=2$인 경우 4가지

ⅲ) $ad=bc=3$인 경우 4가지

ⅳ) $ad=bc=6$인 경우 4가지

따라서 행렬 A의 개수는 15

27. '가'형과 같음

28. [출제의도] 로그방정식의 해 구하기

$\log_3x\cdot\log_2y=\frac{\log_2x}{\log_23}\cdot\frac{\log_3y}{\log_32}=6$

$\log_2x=X$, $\log_3y=Y$라 하면

$\begin{cases}X+Y=5\\XY=6\end{cases}$이므로

$\begin{cases}X=2\\Y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}X=3\\Y=2\end{cases}$

즉, $\begin{cases}x=4\\y=27\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=8\\y=9\end{cases}$

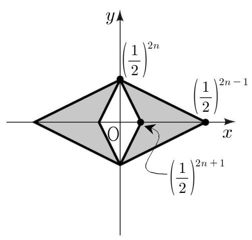
따라서 $\beta-\alpha$의 최댓값은 23

29. '가'형과 같음

30. [출제의도] 등비수열의 합 구하기

점 $(x,\ y)$가 나타내는 영역은 두 대각선의 길이가 각각 $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$, $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$인 마름모의 내부와 두 대각선의 길이가 각각 $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$, $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$인 마름모의 외부의 공통 부분(어두운 부분)이므로

$a_n=3\times\left(\frac{1}{16}\right)^n$



$S_{10}=3\sum\limits_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{16}\right)^k=\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{40}\right\}$

따라서 $\log_{\frac{1}{2}}(1-5S_{10})=40$