2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

1.

출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{pmatrix}$에서

$2A=\begin{pmatrix}2 & 4\\4 & -2\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 8이다.

<답>④

2.

출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2}{8n^3+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n^3}}{8+\frac{5}{n^3}}$$

$$=\frac{1+0}{8+0}$$

$$=\frac{1}{8}$$

<답> ①

3.

출제의도 : 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_4=a_1+3d$

$=1+3d=7$

$\therefore d=2$

$\therefore\ a_n=a_1+(n-1)d$

$=1+(n-1)\times 2$

$=2n-1$

$\therefore\ a_2+a_3=3+5=8$

<다른 풀이>

등차수열 $\{a_n\}$의 성질에 의해

$a_2+a_3=a_1+a_4$

$=1+7=8$

<답> ④

4.

출제의도 : 연립일차방정식을 행렬을 이용하여 풀 수 있는가?

행렬 $\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & a\end{pmatrix}$ 에 대하여

$1\cdot a-2\cdot 3=0$

$\therefore\ a=6$

<답> ⑤

5.

출제의도 : 함수의 극한에 대한 개념을 이해하고 그래프를 통해 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to -1}f(x)+\lim_{x\to 1+0}f(x)=1+(-1)=0$$

<답> ③

6.

출제의도 : 거듭제곱근의 성질을 이해하고 있는가?

$$\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3 = \left(\sqrt{2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}\right)^3$$
$$= \left(\sqrt{2^{\frac{5}{3}}}\right)^3$$
$$= \left(2^{\frac{5}{6}}\right)^3$$
$$= 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5}$$
$$= \sqrt{32}$$

이때, $5 = \sqrt{25} < \sqrt{32} < \sqrt{36} = 6$이므로 $\left(\sqrt{2\sqrt[3]{4}}\right)^3$보다 큰 자연수 중 가장 작은 것은 6이다.

<답> ②

7.

출제의도 : 지수와 로그를 활용할 수 있는가?

$\log T = -kld$에서

$T = 10^{-kld}$

이때, 투과길이가 l_0이고 용액의 농도가 $3d_0$일 때의 투과도가 T_1이므로

$T_1 = 10^{-k \cdot l_0 \cdot 3d_0} = 10^{-3kl_0d_0}$ ------㉠

또, 투과길이가 $2l_0$이고 용액의 농도가 $4d_0$일 때의 투과도가 T_2이므로

$T_2 = 10^{-k \cdot 2l_0 \cdot 4d_0} = 10^{-8kl_0d_0}$ -----㉡

㉠, ㉡에서

$T_2 = T_1^{\frac{8}{3}}$

이므로

$n = \frac{8}{3}$

<답> ⑤

8.

출제의도 : 실생활과 관련된 조건부확률에 관한 문제를 해결할 수 있는가?

5명 중 임의로 뽑힌 한 학생이 만두를 선택한 학생일 사건을 M, 쫄면을 선택한 학생일 사건을 N이라 하면 구하는 확률은

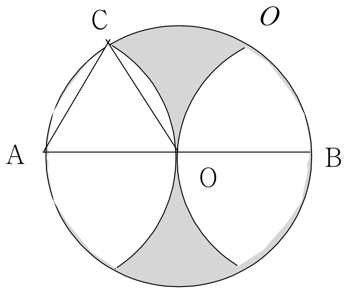
$$\mathrm{P}(N \mid M) = \frac{\mathrm{P}(M \cap N)}{\mathrm{P}(M)}$$
$$= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{2}$$

<답> ③

9.

출제의도 : 무한등비급수에 관련된 내적문제를 해결할 수 있는가?

아래 그림과 같이 원 O의 중심을 O, 원 O와 중심이 A인 원이 만나는 점을 C라 하자.



이때, 삼각형 AOC는 정삼각형이므로

$S_1=1^2\times\pi-4\times\{2\times(\text{부채꼴 OAC})-\triangle\text{AOC}\}$

$=1^2\times\pi-4\times\left\{2\times\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2\right\}$

$=\pi-\left(\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right)$

$=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

한편, 도형 R_n에서 가장 작은 원은 개수가 2^{n-1}, 반지름의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$S_n=S_1+2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times S_1+\cdots+2^{n-1}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{n-1}S_1$

$=S_1+\frac{1}{2}S_1+\left(\frac{1}{2}\right)^2S_1+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}S_1$

따라서

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\frac{1}{2}}$

$=\frac{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{2}}$

$=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$

<답> ②

10.

출제의도 : 이항분포를 따르는 확률변수에서 분산의 성질을 이용하여 분산을 구할 수 있는가?

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(6,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

분산 $\mathrm{V}(X)$를 구하면

$\mathrm{V}(X)=6\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$

$\therefore\ \mathrm{V}(-3X+2)=(-3)^2\mathrm{V}(X)$

$=9\times\frac{4}{3}$

$=12$

<답> ⑤

11.

출제의도 : 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$a_1a_5=9$에서 $a_3^2=9$이므로

$a_3=3\ (\because a_3>0)$

또, $a_2a_6=36$에서 $a_4^2=36$

$a_4=6\ (\because a_4>0)$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$r=\frac{a_4}{a_3}=\frac{6}{3}=2$

$a_3=a_1\times2^2=3$에서

$a_1=\frac{3}{4}$

$\therefore\ 8(a_1a_2+a_3a_4)=8a_1^2(r+r^2\times r^3)$

$=8\times\frac{9}{16}\times(2+2^2\times2^3)$

$=\frac{9}{2}\times34=153$

<다른 풀이>

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_1a_5=a_1\times a_1r^4$

$=a_1^2r^4=9\cdots$ ㉠

$a_2a_6=a_1r\times a_1r^5$

$=a_1^2r^6=36\cdots$ ㉡

㉡÷㉠에서 $r^2=4$

$\therefore\ r=2\ (\because r>0)$

㉠에서 $a_1^2=\dfrac{9}{16}$

$$\therefore\ 8(a_1a_2+a_3a_4)=8a_1^2(r+r^2\times r^3)$$
$$=8\times\frac{9}{16}\times(2+2^2\times2^3)$$
$$=\frac{9}{2}\times34=153$$

<답> ①

12.
출제의도 : 경우의 수를 구하여 확률을 계산할 수 있는가?

나올 수 있는 모든 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1=12$(가지)
을이 뽑은 1장의 카드에 적힌 수를 a라 하고
갑이 뽑은 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱을 b라 할 때
가능한 경우의 수는 다음과 같다.
(ⅰ) $a=3$일 때, $b=2(=1\times2)$
$\therefore$ 1가지
(ⅱ) $a=4$일 때, $b=2(=1\times2)$
$b=3(=1\times3)$
$\therefore$ 2가지
따라서 구하는 확률은

$$\frac{1+2}{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_1}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$$

<답> ③

13.
출제의도 : 함수의 연속성과 연속함수의 성질을 이해하고 있는가?

ㄱ. $x>1$에서 $f(x)=-x+2$이므로

$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=\lim\limits_{x\to1+0}(-x+2)=1$ (참)

ㄴ. $x\le1$에서 $f(x)=a$이므로

$\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}a=\lim\limits_{x\to1-0}0=0$

이므로 ㄱ에서 $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-0}f(x)$

즉,

$\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄷ. 함수 $g(x)=(x-1)f(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to1+0}g(x)=\lim_{x\to1+0}(x-1)f(x)$$
$$=\lim_{x\to1+0}(x-1)(-x+2)=0$$

$$\lim_{x\to1-0}g(x)=\lim_{x\to1-0}(x-1)f(x)$$
$$=\lim_{x\to1-0}a(x-1)=0$$

이므로 $\lim\limits_{x\to1}g(x)=0$이고

$g(1)=(1-1)f(x)=0$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to1}g(x)=g(1)$

즉, 함수 $y=(x-1)f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.
한편, $x>1$, $x\le1$에서 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 연속함수의 성질에 의해 함수 $y=(x-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

<답> ③

14.

출제의도 : 수열의 규칙성을 찾아 합을 구할 수 있는가?

[단계1]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{6} k = \frac{6\times7}{2}=21$$

[단계2]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{7} k = \frac{7\times8}{2}=28$$

[단계3]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{9} k = \frac{9\times10}{2}=45$$

[단계4]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{11} k = \frac{11\times12}{2}=66$$

[단계5]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{13} k = \frac{13\times14}{2}=91$$

[단계6]에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$\sum_{k=1}^{15} k = \frac{15\times16}{2}=120$$

따라서 <그림6>에 적혀 있는 모든 수의 합은

$$21+28+45+66+91+120=371$$

<답> ④

15.

출제의도 : 로그방정식을 풀 수 있고 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

A_n의 x좌표가 $\frac{1}{n}$이므로

$$\mathrm{A}_n\left(\frac{1}{n},\ \log_3\frac{1}{n}\right)$$

한편, B_n의 좌표를 $(b_n,\ \log_3 b_n)$이라 하면

점 C_n은 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$을 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$\mathrm{C}_n\left(\frac{b_n+2\times\frac{1}{n}}{1+2},\ \frac{\log_3 b_n+2\log_3\frac{1}{n}}{1+2}\right)$$

즉,

$$\mathrm{C}_n\left(\frac{b_n+\frac{2}{n}}{3},\ \frac{\log_3 b_n+2\log_3\frac{1}{n}}{3}\right)$$

이때, 점 C_n의 y좌표가 0이므로

$$\log_3 b_n+2\log_3\frac{1}{n}=0$$

$$\log_3 b_n=\log_3 n^2$$

$$\therefore\ b_n=n^2$$

따라서,

$$x_n=\frac{b_n+\frac{2}{n}}{3}=\frac{n^2+\frac{2}{n}}{3}=\frac{n^3+2}{3n}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2}{3n^3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{n^3}}{3}$$

$$=\frac{1}{3}$$

<답> ①

16.

출제의도 : 역행렬에 관련된 성질을 이해하고 있는가?

ㄱ. $(A+B)(A^{-1}+B^{-1})=4E$에서

$$(A+B)\frac{1}{4}(A^{-1}+B^{-1})=E$$

이므로

$$(A+B)^{-1}=\frac{1}{4}(A^{-1}+B^{-1})$$

즉, $A+B$의 역행렬이 존재한다. <참>

ㄴ. $A=E$이면 $A^{-1}=E$이므로 주어진 식에서

$(E+B)(E+B^{-1})=4E$

$E+B+B^{-1}+E=4E$

$B+B^{-1}=2E$

양변에 B를 곱하면

$B^2+E=2B$

$(B-E)^2=O$

이때, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$으로 놓으면

$(B-E)^2=O$이지만 $B\neq E$이다.

<거짓>

ㄷ. $AB=\frac{1}{2}E$에서 $2AB=2BA=E$이므로

$A^{-1}=2B,\ B^{-1}=2A$

주어진 식에 대입하면

$(A+B)(2A+2B)=4E$

$(A+B)^2=2E$

$A^2+2AB+B^2=2E$

$A^2+B^2=E$ <참>

<답> ③

17.

출제의도 : 수열에 관련된 증명을 이해하고 있는가?

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k+1}}=\frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k}}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4^2}+\cdots+\frac{n-1}{4^{n-1}}\right)-\left(\frac{1}{4^2}+\frac{2}{4^3}+\cdots+\frac{n-1}{4^n}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}-\frac{n-1}{4^n}\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{\boxed{n-1}}{4^n}\right)$$

이때, $\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k+1}}$의 양변에 2^n을 곱하면

$$a_n=2^{n-1}a_1+2^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{2^{2k+1}}$$

$$=2^{n-1}a_1+\frac{2^{n+1}}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{\boxed{n-1}}{4^n}\right)$$

$$=2^{n-1}\left(-\frac{4}{9}\right)+\frac{2^{n+1}}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{\boxed{n-1}}{4^n}\right)$$

$$=\boxed{-\frac{2^{n+1}}{9}}+\frac{2^{n+1}}{3}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4^k}-\frac{\boxed{n-1}}{4^n}\right)$$

따라서, $f(n)=n-1$, $g(n)=-\frac{2^{n+1}}{9}$이므로

$$f(10)\times g(5)=9\times\left(-\frac{2^6}{9}\right)$$

$$=-64$$

<답> ①

18.

출제의도 : 부정적분과 미분의 관계를 이해하고 있는가?

함수 $f(x)$가 이차함수이므로

$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$라 하자.

$$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}dx$$

$$=\int\{x^2+ax^2+bx+c\}dx$$

$$=\int\{(1+a)x^2+bx+c\}dx$$

$$=\frac{1}{3}(1+a)x^3+\frac{b}{2}x^2+cx+C\ \cdots ㉠$$

(C는 적분상수)

한편, $f(x)g(x)=(ax^2+bx+c)g(x)$

$=-2x^4+8x^3\ \cdots ㉡$

이므로 $g(x)$는 이차함수이다.

$\therefore\ a=-1$

㉠, ㉡에서

$(-x^2+bx+c)\left(\frac{b}{2}x^2+cx+C\right)=-2x^4+8x^3$

$-\frac{b}{2}x^4+\left(\frac{b^2}{2}-c\right)x^3+\left(-C+bc+\frac{bc}{2}\right)x^2$
$+(bC+c^2)x+cC=-2x^4+8x^3$

에서

$-\frac{b}{2}=-2,\ \frac{b^2}{2}-c=8,$

$-C+bc+\frac{bc}{2}=0,\ cC=0$

$\therefore\ b=4,\ c=0,\ C=0$

$\therefore\ g(x)=2x^2$

$\therefore\ g(1)=2$

<답> ②

19.

출제의도 : 도형의 넓이 미분법을 이용하여 접선의 접점을 구할 수 있는가?

삼각형 OAP의 넓이가 최대가 되려면 점 P에서 직선 $y=x$까지의 거리가 최대이어야 한다.

이때, 점 P에서 접선은 직선 $y=x$와 평행이므로 $f'(x)=1$에서

$a\{(x-2)^2+2x(x-2)\}=1$

$3ax^2-8ax+4a-1=0$

이 이차방정식의 한 근이 $x=\frac{1}{2}$이므로

$3a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-8a\cdot\frac{1}{2}+4a-1=0$

$\frac{3}{4}a-1=0$

$\therefore\ a=\frac{4}{3}$

<답> ②

20.

출제의도 : 정규분포를 따르는 모집단에서 모평균에 대한 신뢰구간을 구할 수 있는가?

정규분포 $N\left(m,\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기 $n=25$인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라 할 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\left[\overline{X}-c\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{25}},\ \overline{X}+c\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{25}}\right]$$

(단, $P(|Z|\le c)=0.95$)

즉, $\left[\overline{X}-\frac{c}{10},\ \overline{X}+\frac{c}{10}\right]$

$\therefore\ a=\overline{X}-\frac{c}{10},\ b=\overline{X}+\frac{c}{10}$

$b-a=2\times\frac{c}{10}=\frac{c}{5}$

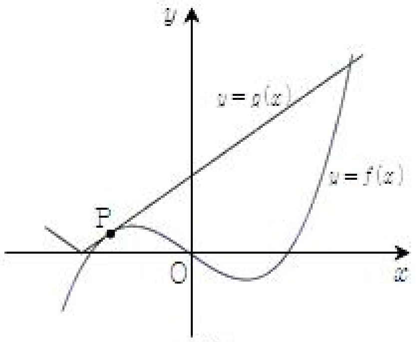
$\therefore\ c=5(b-a)$

<답> ⑤

21.

출제의도 : 미분법을 이용하여 두 곡선의 위치 관계를 이해하고 있는가?

두 함수 $f(x)=6x^3-x$와 $g(x)=|x-a|$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나는 경우는 다음 그림과 같다.



<그림1>

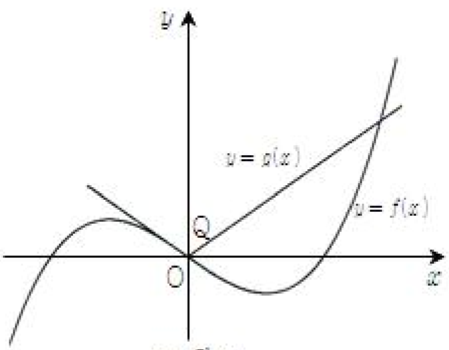
<그림1>에서 직선 $g(x)=x-a$가 곡선 $f(x)=6x^3-x$ 위의 점 P에서 접하므로

$f'(x)=1$에서 $18x^2-1=1$, $x^2=\dfrac{1}{9}$

$\therefore\ x=-\dfrac{1}{3}\ (x<0)$

이때, 접점 P의 좌표는 $\left(-\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9}\right)$이므로

$\dfrac{1}{9}=-\dfrac{1}{3}-a \quad \therefore\ a=-\dfrac{4}{9}$



<그림2>

<그림2>에서 직선 $g(x)=-x+a$가 곡선 $f(x)=6x^3-x$ 위의 점 Q에서 접하므로 $f'(x)=-1$에서

$18x^2-1=-1$, $18x^2=0 \quad \therefore\ x=0$

이때, 접점 Q의 좌표는 $(0,0)$이므로

$0=0+a \quad \therefore\ a=0$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$-\dfrac{4}{9}+0=-\dfrac{4}{9}$

<답> ④

22.

출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+x}{x+1}=\lim_{x\to2}\frac{x(x+1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to2}x=2$$

<답> 2

23.

출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$$\int_{-2}^{2}x(3x+1)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(3x^2+x)dx$$
$$=\int_{-2}^{2}3x^2dx$$
$$=2\int_{0}^{2}3x^2dx$$
$$=2\left[x^3\right]_0^2$$
$$=2(8-0)$$
$$=16$$

<답> 16

24.

출제의도 : 이항정리를 활용하여 항의 계수를 구할 수 있는가?

$(1+ax)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r\, 1^{5-r}(ax)^r = {}_5C_r\, a^r x^r$

이때, x^2항은 $r=2$일 때이므로 x^2의 계수는

$${}_5C_2\, a^2 = \frac{5\times4}{2\times1}\times a^2$$

$$=10a^2=1440$$

$a^2=144$

$a>0$이므로 $a=12$

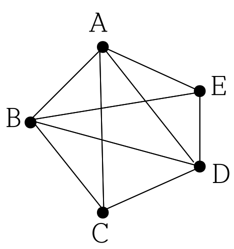
<답> 12

25.

출제의도 : 그래프를 나타내는 행렬을 통해 그래프의 특성을 파악할 수 있는가?

그래프 G를 나타내는 행렬 M에 대하여 그림과 같이 그래프 G를 그리면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



$\therefore\ a=5,\ b=9$

$\therefore\ a+b=5+9=14$

<답> 14

26.

미분계수의 정의를 이해하고 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\cdot3$$

$=3f'(1)$

$f(x)=x^3+4x-2$에서 $f'(x)=3x^2+4$

$\therefore 3f'(1)=3\times(3+4)=21$

<답> 21

27.

출제의도 : 정규분포에서 표준화를 통해 두 확률이 같을 조건을 구할 수 있는가?

A과수원에서 생산하는 귤의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(86,\ 15^2)$을 따른다.

또, B과수원에서 생산하는 귤의 무게를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $\mathrm{N}(88,\ 10^2)$을 따른다.

A과수원에서 임의로 선택한 귤의 무게가 98이하일 확률과 B과수원에서 임의로 선택한 귤의 무게가 a이하일 확률이 같으므로 $\mathrm{P}(X\le 98)=\mathrm{P}(Y\le a)$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{98-86}{15}\right)=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{a-88}{10}\right)$$

$\therefore\ a=96$

<답> 96

2013학년도 대수능 9월 모의평가 수리영역 나형 정답 및 해설

28.

출제의도 : 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하고 수열의 극한을 구할 수 있는가?

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2=2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$에서

$(a_{n+1}-a_n)^2=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)^2$

$=2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)-2\left(1-\frac{1}{9^{n-1}}\right)$

$=\frac{16}{9^n}\ (n\ge 2)$

이때, $n=1$이면

$(a_2-a_1)^2=2(1-\frac{1}{9})=\frac{16}{9}$

이므로

$(a_{n+1}-a_n)^2=\frac{16}{9^n}\quad (n\ge 1)$

한편, $a_{n+1}>a_n$이므로

$a_{n+1}-a_n=\frac{4}{3^n}$

$\therefore\ a_{n+1}=a_n+\frac{4}{3^n}$

이때, $a_1=10$이므로

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{3^k}$

$=10+\dfrac{\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}$

$=10+2\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}(n\ge 2)$

따라서,

$\lim_{n\to\infty}a_n=12$

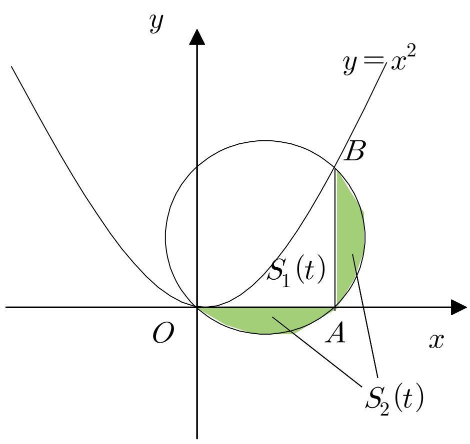
<답> 12

29.

출제의도 : 정적분을 활용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

세 점 $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(t,0)$, $\mathrm{B}(t,t^2)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB는 직각삼각형이므로 원 C의 반지름의 길이 r는

$r=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}$



위의 그림에서 $S_2(t)$의 넓이는

$S_2(t)=$ (반원의 넓이)

$-$(직각삼각형 OAB의 넓이)

$=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{t^2+t^4}\right)^2-\frac{1}{2}\times t\times t^2$

$=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{2}t^3$

위의 그림에서 $S_1(t)$의 넓이는

$S_1(t)=\int_0^t x^2dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3$

따라서 구하는 넓이 $S(t)$는

$S(t)=S_1(t)+S_2(t)$

$$=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{3}t^3$$

$$=\frac{1}{8}(t^2+t^4)\pi-\frac{1}{6}t^3$$

$$S'(t)=\frac{1}{8}(2t+4t^3)\pi-\frac{1}{2}t^2$$

$$\therefore\ S'(1)=\frac{1}{8}(2+4)\pi-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3\pi-2}{4}$$

$\therefore\ p=3,\ q=-2$

$\therefore\ p^2+q^2=9+4=13$

<답> 13

30.

출제의도 : 로그부등식을 활용하여 정사각형의 개수를 구할 수 있는가?

두 자연수 n, k에 대하여 아래 그림과 같이 네 꼭짓점 $A_1(n,k)$, $A_2(n+1,k)$, $A_3(n+1,k+1)$, $A_4(n,k+1)$으로 하는 정사각형이 두 함수 $y=\log 7x$, $y=\log 3x$와 모두 만나기 위해서는

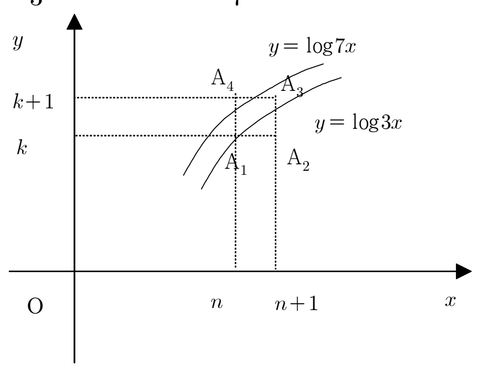
$\log 7n \le k+1$ 이고 $\log 3(n+1)\ge k$

이어야 한다.

즉,

$n\le \frac{10^{k+1}}{7}$ 이고 $n\ge \frac{10^k}{3}-1$

$$\therefore\ \frac{10^k}{3}-1\le n\le \frac{10^{k+1}}{7}$$



(i) $k=1$일 때,

$$\frac{10}{3}-1\le n\le \frac{100}{7}$$

그러므로 자연수 n은 3, 4, $\cdots$, 14로 12개다.

(ii) $k=2$일 때,

$$\frac{100}{3}-1\le n\le \frac{1000}{7}$$

그리고 꼭지점의 x좌표는 모두 100이하이므로 $n+1\le 100$이다.

그러므로 99이하의 자연수 n은 33, 34, $\cdots$, 99로 67개다.

따라서 모든 정사각형의 개수는

$12+67=79$

<답> 79