2012학년도 4월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수리 영역 •

[가 형]

1	②	**2**	④	**3**	④	**4**	①	**5**	①
6	③	**7**	⑤	**8**	①	**9**	③	**10**	①
11	②	**12**	⑤	**13**	④	**14**	③	**15**	②
16	⑤	**17**	③	**18**	②	**19**	⑤	**20**	④
21	⑤	**22**	5	**23**	16	**24**	55	**25**	29
26	70	**27**	508	**28**	3	**29**	14	**30**	8

1. [출제의도] 지수 계산하기

$4^{\frac{3}{2}} \times 16^{-\frac{1}{2}} = 2^3 \times 2^{-2} = 2$

2. [출제의도] 행렬 연산하기

$X = B - 2A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

3. [출제의도] 삼각함수의 성질을 알고 계산하기

$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{1}{8}$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2x}{x^2} = 2$에서 $f(x)$는 x^2의 계수가 2인 이차함수이고

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x^2-1} = 3$에서 $\lim_{x\to -1} f(x) = 0$이므로

$f(x) = 2(x+1)(x+a)$이다.

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)}{x^2-1} = \lim_{x\to -1}\frac{2(x+a)}{x-1} = \frac{2(-1+a)}{-2} = 3$

$\therefore\ a = -2$

따라서 $f(x) = 2(x+1)(x-2)$이므로 $f(1) = -4$

5. [출제의도] 여러 가지 함수의 미분법 이해하기

$\ln y = 2e^{-3x}$이고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{y'}{y} = -6e^{-3x}$

$y' = -6e^{-3x}\cdot y$ ...... ㉠

㉠에 $x = 0,\ y = e^2$을 대입하면 $y' = -6e^2$

따라서 점 $(0, e^2)$에서의 접선의 기울기는 $-6e^2$

6. [출제의도] 일차변환과 행렬 이해하기

$A + B = C$라 하면 $C = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

$f(A) + f(B) = f(A+B) = f(C) = 3B$

따라서 $f^{-1}(B) = \frac{1}{3}C$이므로 $f^{-1}(B) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

7. [출제의도] 분수부등식 이해하기

$f(x) = ax(x-2)\ (a>0)$라 하면

부등식 $\frac{f(x-2)}{f(x-4)} \le 1$에서 $\frac{a(x-2)(x-4)}{a(x-4)(x-6)} \le 1$이므로

$x \ne 4$이고 $\frac{4}{x-6} \le 0$이다.

$\frac{4}{x-6} \le 0$의 양변에 $(x-6)^2$을 곱하여 정리하면

$x \le 6\ (x \ne 4,\ x \ne 6)$이다.

따라서 부등식 $\frac{f(x-2)}{f(x-4)} \le 1$을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 5이므로 모든 자연수의 합은 11

8. [출제의도] 수열의 극한의 성질 이해하기

(가)에서 $\frac{3n^2+1}{n(n+1)} < a_n$이고

(나)에서 $a_n < 3 - \frac{1}{2}b_n$이므로

$\frac{3n^2+1}{n(n+1)} < a_n < 3 - \frac{b_n}{2}$이다.

한편, $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n(n+1)} \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{b_n}{2}\right)$이고

(다)에서 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이므로

$3 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le 3$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$

9. [출제의도] 함수의 연속성 추론하기

ㄱ. $\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to -0} f(x) = -1$ (참)

ㄴ. $\lim_{x\to 1+0}\{f(x) - f(-x)\} = -1-1 = -2$ (거짓)

ㄷ. $|f(-1)|\cdot\sin\{\pi\times(-1)\} = 0$,

$\lim_{x\to -1+0}|f(x)|\cdot\sin\pi x = \lim_{x\to -1-0}|f(x)|\cdot\sin\pi x = 0$

이므로 함수 $|f(x)|\cdot\sin\pi x$는 $x = -1$에서 연속이다.

같은 방법으로 함수 $|f(x)|\cdot\sin\pi x$는

$x = 0,\ x = 1$에서 연속이다.

$\therefore$ 함수 $|f(x)|\cdot\sin\pi x$는

열린 구간 $(-2, 2)$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

10. [출제의도] 고차부등식 이해하기

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0$

$(x-1)(x-2)(x-3) > 0$

$\therefore\ 1 < x < 2$ 또는 $x > 3$

$B \subset A \subset C$이므로 $\alpha \ge 3,\ \beta \le 1$

따라서 $\alpha - \beta$의 최솟값은 2

11. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

지수함수 $y = 2^{2x+a} + b$의 그래프에서 점근선의 방정식이 $y = 2$이므로 $b = 2$이다.

$y = f(x)$의 그래프는 지수함수 $y = 2^{2x+a} + 2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시킨 함수 $y = 2^{-2x+a} + 2$의 그래프이다.

함수 $y = 2^{-2x+a} + 2$의 그래프가 점 $(-1, 10)$을 지나므로 $a = 1$이다.

따라서 $a + b = 3$

12. [출제의도] 로그의 뜻을 알고 문제해결하기

해발고도 1840m인 곳에서의 기압을 p_1(hPa)이라 하면

$p_0 = 1000,\ t = 10,\ H = 1840$이므로

$1840 = 18400(1 + 0.04\times 10)\log\frac{1000}{p_1}$

$\therefore\ \frac{1}{14} = 3 - \log p_1$이므로 $p_1 = 10^{\frac{41}{14}}$

따라서 해발고도 1840m인 곳에서의 기압(hPa)은 $10^{\frac{41}{14}}$

13. [출제의도] 부정적분 이해하기

$f'(x) = a(x+1)(x-1)\ (a>0)$이므로

$x = -1$에서 극댓값, $x = 1$에서 극솟값을 가진다.

$f(x) = \int a(x+1)(x-1)dx$

$= \int a(x^2-1)dx = a\left(\frac{x^3}{3} - x\right) + C$

(단, C는 적분상수)

$f(-1) = a\left(-\frac{1}{3} + 1\right) + C = 4$ ...... ㉠

$f(1) = a\left(\frac{1}{3} - 1\right) + C = 0$ ...... ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$a = 3,\ C = 2$이므로 $f(x) = x^3 - 3x + 2$이다.

따라서 $f(3) = 20$

14. [출제의도] 행렬의 성질 추론하기

ㄱ. $(ABA^{-1})^2 = (ABA^{-1})(ABA^{-1})$

$= AB(A^{-1}A)BA^{-1} = ABEBA^{-1}$

$= ABBA^{-1} = AB^2A^{-1}$ (참)

ㄴ. 행렬 A의 역행렬이 존재하면

$A^2(A^{-1})^2 = AAA^{-1}A^{-1} = A(AA^{-1})A^{-1}$

$= AEA^{-1} = AA^{-1} = E$

$\therefore\ (A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$ (참)

ㄷ. (반례) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 추론하기

$p = 3,\ q = 6,\ f(n) = 3n$이므로 $p + q + f(10) = 39$

16. [출제의도] 정적분 이해하기

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x(\sin x + 1)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos x(\sin x + 1)dx$

$\sin x = t$로 치환하면 $\cos x\,dx = dt$

$x = 0$일 때 $t = 0$이고, $x = \frac{\pi}{2}$일 때 $t = 1$이므로

$\int_0^1 (2t^2 + 2t)dt = \left[\frac{2t^3}{3} + t^2\right]_0^1 = \frac{5}{3}$

17. [출제의도] 분수방정식의 뜻을 알고 문제해결하기

코끼리 트래킹 코스에서 이동하는 데 걸린 소요시간은

$\frac{12}{8} = 1.5$

뗏목 래프팅 코스에서 이동한 평균속력을 v라 하면

뗏목 래프팅 코스에서 이동하는 데 걸린 소요시간은

$\frac{13.5}{v}$,

승마 코스에서 이동하는 데 걸린 소요시간은

$\frac{12}{v+10}$이므로

$1.5 + \frac{12}{v+10} = \frac{13.5}{v}$ ...... ㉠

㉠의 양변에 $v(v+10)$을 곱하여 정리하면

$v^2 + 9v - 90 = (v-6)(v+15) = 0$

$\therefore\ v = 6\ (\because v > 0)$

뗏목 래프팅 코스에서 이동하는 데 걸린 소요시간은

$\frac{13.5}{6} = 2.25$

승마 코스에서 이동하는 데 걸린 소요시간은

$\frac{12}{16} = 0.75$

(세 코스에서 이동하는 데 걸린 소요시간의 총합)

$= 1.5 + 2.25 + 0.75 = 4.5$

따라서 갑이 승마, 뗏목 래프팅, 코끼리 트래킹 코스에서 이동하는 데 걸린 소요시간의 총합은 4시간 30분

18. [출제의도] 일차변환의 뜻을 알고 문제해결하기

$A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{8} & -\sin\frac{\pi}{8} \\ \sin\frac{\pi}{8} & \cos\frac{\pi}{8} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$이라 하자.

행렬 A는 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{8}$만큼 회전시키는 회전변환을 나타내는 행렬이고, 행렬 B는 원점을 닮음의 중심으로 하고 닮음비가 $\frac{1}{2}$인 닮음변환을 나타내는 행렬이다.

(나)에서 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = AB\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$이고

(가)에서 $x_0 = 1,\ y_0 = 0$이므로

$x_{98} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{98},\ y_{102} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{102}$

$\therefore\ x_{98} + y_{102} = 17\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{103}$

따라서 $k = 17\sqrt{2}$

19. [출제의도] 정적분의 뜻을 알고 추론하기

ㄱ. $\int_0^1 f(x)dx = \left[e^x - x\right]_0^1 = e-2$ (참)

ㄴ. $g(x)=f(x)-x$라 하자.

$x>0$에서 $g'(x)=e^x-1>0$이므로

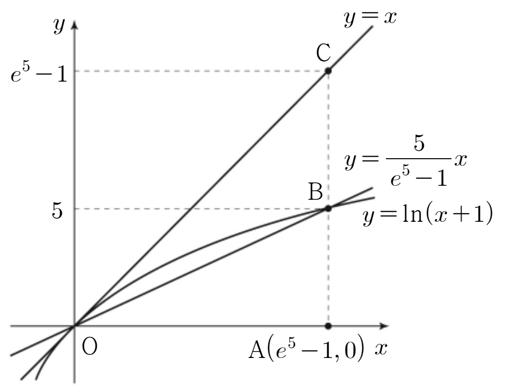
함수 $g(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.

따라서 $g(0)=0$이므로 $x>0$에서 $f(x)>x$이다. (참)

ㄷ. $f^{-1}(x)=\ln(x+1)$이므로

$\triangle\mathrm{OAB} = \frac{5(e^5-1)}{2} < \int_0^{e^5-1} f^{-1}(x)dx$,

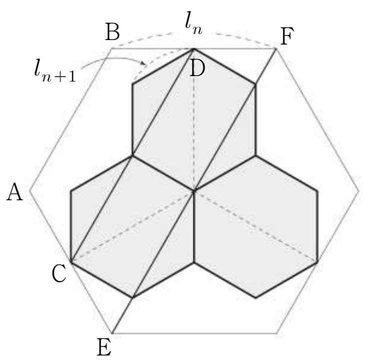
$\int_0^{e^5-1} f^{-1}(x)dx < \frac{(e^5-1)^2}{2} = \triangle\mathrm{OAC}$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. [출제의도] 무한등비급수를 활용하여 문제해결하기

H_n의 한 정육각형의 한 변의 길이를 l_n이라 하고 H_{n+1}의 한 정육각형의 한 변의 길이를 l_{n+1}이라 하자.



$2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{EF}}$이므로 $\frac{3}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$이다.

$\frac{3}{2}l_n = 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}l_{n+1}$이 성립하므로, $l_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{4}l_n$에서

$S_{n+1} = 3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 S_n = \frac{9}{16}S_n$

수열 $\{S_n\}$은

$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2\times 6\times 3 = \frac{27}{32}\sqrt{3}$ 이고, 공비가 $\frac{9}{16}$인 무한등비수열이다.

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{27}{32}\sqrt{3}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{27}{14}\sqrt{3}$

21. [출제의도] 도함수의 뜻을 알고 추론하기

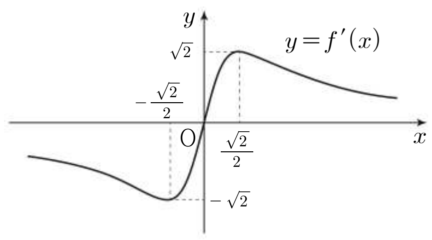
ㄱ. $f'(x)=\frac{4x}{2x^2+1}$이므로 $f'(-x)=-f'(x)$ (참)

ㄴ. $f''(x)=\frac{4(2x^2+1)-4x\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}=\frac{4(1-2x^2)}{(2x^2+1)^2}$

$f''(x)=0$에서 $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f'(x)$	↘	$-\sqrt{2}$	↗	$\sqrt{2}$	↘

$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$이므로 $y=f'(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $f'(x)$의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다. (참)

ㄷ. ⅰ) $x_1=x_2$일 때, 주어진 부등식은 성립한다.

ⅱ) $x_1 \neq x_2$일 때, 닫힌 구간 $[x_1, x_2]$에서

평균값의 정리에 의하여 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=f'(c)$인

c가 열린 구간 (x_1, x_2)에서 적어도 하나 존재한다.

ㄱ, ㄴ에 의하여 $-\sqrt{2}\le f'(x)\le\sqrt{2}$ 이므로

$\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right| = |f'(c)| \le \sqrt{2}$ 이다.

∴ ⅰ), ⅱ)에 의하여 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $|f(x_1)-f(x_2)| \le \sqrt{2}|x_1-x_2|$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. [출제의도] 행렬과 연립일차방정식 이해하기

연립일차방정식 $\begin{pmatrix}1-k & -2\\ -3 & 4-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$가

$x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지므로

$(1-k)(4-k)-6=0$, $k^2-5k-2=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

모든 실수 k의 값의 합은 5

23. [출제의도] 무리방정식 이해하기

$x^2+5x-6+\sqrt{x^2+5x}=0$에서

$\sqrt{x^2+5x}=t$ $(t\ge 0)$라 하면,

$t^2+t-6=0$ ∴ $t=2$ $(\because t\ge 0)$

$\sqrt{x^2+5x}=2$의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+5x-4=0$

∴ 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실근의 곱 $p=-4$

따라서 $p^2=16$

24. [출제의도] 여러 가지 수열 이해하기

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}=\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n}{n+1}$

$\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2}$, $\frac{a_3}{a_2}=\frac{4}{3}\times\frac{2}{3}$, $\cdots$, $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n}\times\frac{n-1}{n}$

$\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1\times 3}{2\times 2}\times\frac{2\times 4}{3\times 3}\times\cdots\times\frac{(n-1)(n+1)}{n\times n}$

∴ $a_n=\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2n}$

따라서 $100a_{10}=55$

25. [출제의도] 일차변환과 행렬의 성질 이해하기

일차변환을 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}$라 하면

$\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\end{pmatrix}$ …… ㉠

$\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -4\end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $p=-5$, $q=4$, $r=8$, $s=-6$

∴ $\begin{pmatrix}-5 & 4\\ 8 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\ -18\end{pmatrix}$

따라서 $a=11$, $b=-18$이므로 $a-b=29$

26. [출제의도] 삼각방정식의 뜻을 알고 문제해결하기

$\angle\mathrm{POB}=2\theta$이므로 $\angle\mathrm{PAB}=\theta$,

$\angle\mathrm{BOQ}=\theta$이므로 $\angle\mathrm{QAB}=\frac{\theta}{2}$이다.

$\triangle\mathrm{ABP}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}=2\cos\theta$, $\triangle\mathrm{AQB}$에서 $\overline{\mathrm{BQ}}=2\sin\frac{\theta}{2}$

$3\overline{\mathrm{AP}}=7\overline{\mathrm{BQ}}$이므로 $3\cos\theta=7\sin\frac{\theta}{2}$이다.

$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$이므로

$18\cos^2\theta+49\cos\theta-49=0$이다.

$\cos\theta=\frac{7}{9}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $90\cos\theta=70$

27. [출제의도] 등차수열과 등비수열 이해하기

$a_n=S_n-S_{n-1}=n+1$ $(n\ge 2)$, $a_1=S_1=2$이므로

$a_n=n+1$ $(n\ge 1)$

$\sum_{n=1}^{7}2^{a_n}=\sum_{n=1}^{7}2^{n+1}=\frac{2^2(2^7-1)}{2-1}=508$

28. [출제의도] 미분계수의 뜻을 알고 문제해결하기

$\frac{1}{n}=h$라 하면, $n\to\infty$일 때, $h\to 0$이다.

(준식)$=\lim_{h\to 0}\frac{\{g(1+h)-g(1)\}-\{g(1-2h)-g(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}+2\lim_{h\to 0}\frac{g(1-2h)-g(1)}{-2h}$

$=g'(1)+2g'(1)=3g'(1)$

$g(1)=f^{-1}(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$f(a)=a^3+3a^2+4a+5=1$에서 $a=-2$이다.

$f'(x)=3x^2+6x+4$에서 $f'(-2)=4$이고

$g(f(x))=x$에서 $g'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}$이므로

$3g'(1)=3\times\frac{1}{f'(-2)}=\frac{3}{4}$이다.

따라서 $4p=3$

29. [출제의도] 지표와 가수의 뜻을 알고 문제해결하기

$\log x=f(x)+g(x)$ ($f(x)$는 정수, $0\le g(x)<1$)

$0\le g(x^2)<1$, $0\le g(x^3)<1$이므로

(가)에서 $0\le f(x)=g(x^2)+g(x^3)<2$이다.

$f(x)$는 정수이므로 0 또는 1이다.

한편, (나)에 의하여 $f(x)\ne 0$

∴ $f(x)=1$

$\log x^2=f(x^2)+g(x^2)=2f(x)+2g(x)$ …… ㉠

$\log x^3=f(x^3)+g(x^3)=3f(x)+3g(x)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f(x^2)+f(x^3)+g(x^2)+g(x^3)=5f(x)+5g(x)$ …… ㉢

㉢의 좌변은 정수이므로 $5g(x)$는 정수이다.

∴ $0<g(x)<1$에서 $g(x)$가 될 수 있는 값은

$\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$이다.

$g(x)=\frac{4}{5}$일 때, $g(x^2)=\frac{3}{5}$, $g(x^3)=\frac{2}{5}$, $g(x^4)=\frac{1}{5}$

이므로 $g(x^2)>g(x^3)>g(x^4)$이 성립한다.

∴ $g(x)=\frac{4}{5}$이므로 $\log x=1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$, $x=10^{\frac{9}{5}}$

따라서 $m=5$, $n=9$이므로 $m+n=14$

30. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

점 P는 호 AB 위의 점이고 시각 t일 때 $\angle\mathrm{POA}=t$ $\left(0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$이므로 점 P의 좌표는 $(\cos t, \sin t)$이다.

점 $\mathrm{Q}(x, 0)$의 시각 t에서의 위치는

$x=\cos t+\sqrt{5-\sin^2 t}$, $y=0$

점 Q의 x좌표의 시간에 대한 변화율

$\frac{dx}{dt}=-\sin t-\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{5-\sin^2 t}}$

∴ $\angle\mathrm{POA}=\frac{\pi}{4}$가 되는 순간, 점 Q의 x좌표의 시간에 대한 변화율

$$r=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{5-\frac{1}{2}}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{6}=-\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

따라서 $9r^2=8$

[나 형]

1	②	**2**	④	**3**	③	**4**	②	**5**	①
6	③	**7**	④	**8**	①	**9**	③	**10**	⑤
11	②	**12**	⑤	**13**	④	**14**	③	**15**	②
16	①	**17**	③	**18**	①	**19**	①	**20**	④
21	⑤	**22**	5	**23**	6	**24**	55	**25**	26
26	32	**27**	508	**28**	256	**29**	14	**30**	295

1. '가'형과 같음

2. '가'형과 같음

3. [출제의도] 무한수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n+3}{2^{2n}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{3}{4^n}}{1-\frac{1}{4^n}}=1$$

4. [출제의도] 역행렬의 성질 이해하기

행렬 $\begin{pmatrix} t-1 & 3 \\ 2 & t+2 \end{pmatrix}$가 역행렬을 갖지 않으므로

$(t-1)(t+2)-6=0$이고

$t^2+t-8=0$이다.

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

모든 실수 t의 값의 곱은 -8

5. [출제의도] 지수부등식 이해하기

$2^{-2x^2}>2^{-4x}$, $2x^2<4x$

$\therefore\ 0<x<2$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=2$이므로 $\alpha+\beta=2$

6. [출제의도] 무한급수의 수렴조건 이해하기

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3^a+1)^n}{6^{3n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3^a+1}{216}\right)^n$이 수렴하므로

$-1<\dfrac{3^a+1}{216}<1$, $-217<3^a<215$

$\therefore$ 자연수 a는 1, 2, 3, 4이다.

따라서 a의 개수는 4

7. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\displaystyle\lim_{x\to2}(x-a)=0$이므로 $a=2$이다.

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-3}=-1$이므로

$b=-1$이다.

따라서 $a+b=1$

8. '가'형과 같음

9. [출제의도] 함수의 연속성 추론하기

ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to-1+0}f(x)=\lim_{x\to-1-0}f(x)=2$ (참)

ㄴ. $\displaystyle\lim_{x\to-1+0}f(-x)=2$, $f(1)=1$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}f(-x)\neq f(1)$이다. (거짓)

ㄷ. $f(0)f(1)=2\times1=2$,

$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)f(x+1)=1\times2=2$,

$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)f(x+1)=2\times1=2$에서

$\displaystyle f(0)f(1)=\lim_{x\to0}f(x)f(x+1)$이므로

함수 $f(x)f(x+1)$은 $x=0$에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

10. [출제의도] 등차수열과 등비수열 이해하기

$6=a+3+b$, $1=\dfrac{4}{(a+3)b}$

$a+b=3$, $(a+3)b=4$에서

$a=\sqrt{5}$ ($\because a>0$), $b=3-\sqrt{5}$

따라서 $b-a=3-2\sqrt{5}$

11. '가'형과 같음

12. '가'형과 같음

13. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$2f(x)-3g(x)=h(x)$라 하면, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}h(x)=2$이고

$3g(x)=2f(x)-h(x)$이다.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8f(x)-3g(x)}{3g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{6f(x)+h(x)}{2f(x)-h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{h(x)}{f(x)}}{2-\frac{h(x)}{f(x)}}=3$$

14. '가'형과 같음

15. '가'형과 같음

16. [출제의도] 등비수열의 뜻을 알고 문제해결하기

$a_n=2\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이고, A_n은 $\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}$의 넓이이므로

$A_n=\dfrac{1}{2}\times2\left|-\dfrac{1}{2}\right|^{n-1}\times1=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$이다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{20}A_n=\frac{1\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{19}$

17. [출제의도] 등차수열의 뜻을 알고 추론하기

수열 $\{a_n\}$이 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n<a_{n+1}$이다.

따라서 주어진 부등식에서

$x\geq\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$이므로 $b_n=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$이다.

ㄱ. $b_1=\dfrac{a_1+a_2}{2}$ (참)

ㄴ. $b_n=\dfrac{1+3(n-1)+1+3n}{2}=3n-\dfrac{1}{2}$이므로

수열 $\{b_n\}$은 공차가 3인 등차수열이다. (거짓)

ㄷ. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}b_n=\sum_{n=1}^{10}\left(3n-\frac{1}{2}\right)=3\times\frac{10\times11}{2}-5=160$(참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

18. [출제의도] 순서도를 이해하여 값 추론하기

$\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-1}-\dfrac{1}{3n+2}\right)$이므로

$$S=\frac{1}{2\times5}+\frac{1}{5\times8}+\frac{1}{8\times11}+\cdots+\frac{1}{26\times29}+\frac{1}{29\times32}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{29}-\frac{1}{32}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{32}\right)=\frac{5}{32}$$

19. [출제의도] 함수의 극한의 뜻을 알고 문제해결하기

$$f(x)=\begin{cases}-1 & \left(|x|<\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ -\frac{1}{3} & \left(|x|=\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ 1 & \left(|x|>\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

따라서 $\displaystyle f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\lim_{x\to\frac{\sqrt{2}}{2}-0}f(x)=-\frac{1}{3}+(-1)=-\frac{4}{3}$

20. '가'형과 같음

21. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬 문제해결하기

주어진 조건을 연립방정식으로 나타내면

$\begin{cases}x+y=15\\5x+10y=125\end{cases}$

$5x+10y=125$의 양변을 5로 나누면

$\begin{cases}x+y=15\\x+2y=25\end{cases}$

$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\25\end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}15\\25\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\25\end{pmatrix}$에서 $a=-1$, $b=-1$

따라서 $a+b=-2$

22. '가'형과 같음

23. [출제의도] 연속함수의 성질 이해하기

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\displaystyle f(1)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+5)}{x-1}=6$

따라서 $a=6$

24. '가'형과 같음

25. [출제의도] 로그부등식 이해하기

$x>0$, $x>4$이므로 $x>4$ $\cdots\cdots$ ㉠

$\log_2x(x-4)\leq\log_2 32$

$x^2-4x-32\leq0$

$(x+4)(x-8)\leq0$에서 $-4\leq x\leq8$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $4<x\leq8$

x는 5, 6, 7, 8이므로 x의 값의 합은 26

26. [출제의도] 로그방정식 이해하기

$3^x=3^{2y}$에서

$x=2y$ $\cdots\cdots$ ㉠

$(\log_2 8x)(\log_2 4y)=-1$에서

$(3+\log_2 x)(2+\log_2 y)=-1$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(\log_2 y+3)^2=0$이므로 $y=\dfrac{1}{8}$, $x=\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 $\alpha=\dfrac{1}{4}$, $\beta=\dfrac{1}{8}$이므로 $\dfrac{1}{\alpha\beta}=32$

27. '가'형과 같음

28. [출제의도] 여러 가지 수열 이해하기

$a_1^2=\dfrac{1}{2}$, $a_2^2=1$, $a_3^2=\dfrac{1}{2}$, $a_4^2=0$,

$a_5^2=\dfrac{1}{2}$, $a_6^2=1$, $a_7^2=\dfrac{1}{2}$, $a_8^2=0$, $\cdots$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{32}na_n^2=\frac{1}{2}\times\frac{16\times32}{2}+1\times\frac{8\times32}{2}=256$

29. '가'형과 같음

30. [출제의도] 여러 가지 수열의 뜻을 알고 문제해결하기

$b_n=a_{n+1}-a_n=2n-1$이므로

$\displaystyle a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)=1+\frac{2n(n-1)}{2}-(n-1)$

$=n^2-2n+2$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(n^2-2n+2)$

$=\dfrac{10\times11\times21}{6}-2\times\dfrac{10\times11}{2}+20=295$