2012학년도 대학수학능력시험 대비

2011학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수리 영역 •

수리'가'형 정답

1	③	2	④	3	②	4	⑤	5	①
6	②	7	④	8	④	9	①	10	③
11	②	12	①	13	②	14	③	15	⑤
16	⑤	17	④	18	③	19	③	20	②
21	①	22	15	23	27	24	130	25	140
26	3	27	10	28	12	29	17	30	7

해 설

1. [출제의도] 로그의 계산을 할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\log_2 3+\log_2 \frac{8}{3}=\log_2\left(3\times\frac{8}{3}\right)=\log_2 2^3=3$

2. [출제의도] 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는지 묻는 문제이다.

(주어진 식)$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

3. [출제의도] 배각의 공식을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times\frac{9}{16}-1=\frac{1}{8}$

4. [출제의도] 삼각함수의 부정적분을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$f(x)=\int \sin x dx=-\cos x+C$ (C는 적분상수)

$\therefore\ f(\pi)-f(0)=-\cos\pi+\cos 0=2$

5. [출제의도] 곡선의 접선의 기울기를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$x^3+xy+y^3-8=0$에 $y=0$을 대입하면 $x=2$이다.

$x^3+xy+y^3-8=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+y+xy'+3y^2y'=0$

따라서 점 $(2, 0)$에서의 접선의 기울기는 -6이다.

6. [출제의도] 정규분포의 확률을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

물고기 한 마리의 무게를 확률변수 X라 하면

$\mathrm{P}(X\geq 830)=\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{830-800}{50}\right)=\mathrm{P}(Z\geq 0.6)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 0.6)=0.5-0.2257=0.2743$

7. [출제의도] 조건부확률을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

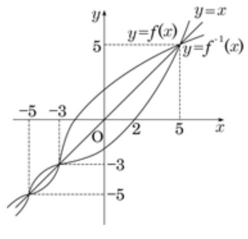
임의로 뽑은 한 명이 여학생일 사건을 F, 봄을 선택한 학생일 사건을 A라 하자.

$\mathrm{P}(A)=0.6\times 0.55+0.4\times 0.65=0.59$

$\mathrm{P}(F\cap A)=0.4\times 0.65=0.26$ 이므로

$\mathrm{P}(F|A)=\frac{\mathrm{P}(F\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{26}{59}$

8. [출제의도] 분수부등식의 해를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.



(i) $f(x)>0,\ f(x)\leq f^{-1}(x)$에서 $2<x\leq 5$

(ii) $f(x)<0,\ f(x)\geq f^{-1}(x)$에서 $-5\leq x\leq -3$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 6이다.

9. [출제의도] 일차변환의 합성을 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

일차변환 $f\circ g\circ f$를 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$

$(f\circ g\circ f)(P)=f(P)$에서

$\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{3}\\1\end{pmatrix}$이므로

$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{3},\ -\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=1$

따라서 $\sin\theta=\frac{1}{2},\ \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$

10. [출제의도] 행렬의 성질을 추론할 수 있는지 묻는 문제이다.

ㄱ. $AB=BA$이면 $A^2B=ABA=BA^2$ (참)

ㄴ. (반례) $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ (거짓)

ㄷ. $A(AB)=(AB)A=E$이므로 $AAB=ABA$의 양변의 왼쪽에 A^{-1}을 곱하면 $AB=BA$ (참)

11. [출제의도] 좌표로 표시된 벡터의 크기의 최솟값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

삼각형 ABC의 무게중심 G는 $\mathrm{G}(4,5,6)$이다.

$\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{3}\right|=|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$이다.

이때, $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$의 값이 최소이려면 점 G에서 xy평면에 내린 수선의 발이 점 P일 때이므로 $\mathrm{P}(4,5,0)$일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$의 최솟값은 6이다.

12. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 등식을 증명할 수 있는지 묻는 문제이다.

$a=-1,\ f(m)=-\frac{m(m+1)}{2}$이므로

$a+f(9)=(-1)+(-45)=-46$

13. [출제의도] 공간좌표를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\mathrm{A}(1,3,2),\ \mathrm{B}(1,-3,-2),\ \mathrm{C}(1,3,-2)$이므로 삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{C}=90^\circ$인 직각삼각형이다.

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{13}$

14. [출제의도] 함수의 극한과 연속성을 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to -1-0}f(x)\times\lim\limits_{x\to -1-0}g(x)=1\times 0=0$이고

$\lim\limits_{x\to -1+0}f(x)\times\lim\limits_{x\to -1+0}g(x)=0\times(-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)g(x)=0$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)-\lim\limits_{x\to 1-0}g(x)=0-(-1)=1$이고

$\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)-\lim\limits_{x\to 1+0}g(x)=1-0=1$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}\{f(x)-g(x)\}=1$ (참)

ㄷ. $g(f(0))=g(-1)=0,\ \lim\limits_{x\to 0}g(f(x))=\lim\limits_{t\to -1+0}g(t)=-1$

이므로 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

15. [출제의도] 지수함수에서 넓이의 최솟값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

직사각형의 가로의 길이는 $\beta-\alpha=4$이고, 세로의 길이는 $3^\alpha-(-3^{-\beta})$이므로 직사각형의 넓이를 S라 하면

$S=(\beta-\alpha)\left(3^\alpha+3^{-\beta}\right)=4\left(3^\alpha+3^{-\alpha-4}\right)$

$\geq 4\times 2\sqrt{3^\alpha\cdot 3^{-\alpha-4}}=\frac{8}{9}$

(단, 등호는 $\alpha=-2,\ \beta=2$일 때 성립)

따라서 직사각형의 넓이의 최솟값은 $\frac{8}{9}$이다.

16. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

두 점근선의 교점을 원점으로 하고, 두 초점이 x축 위에 있는 좌표평면에서 쌍곡선 H의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0, b>0)$이라 하자.

두 초점의 좌표가 $\mathrm{A}(2,0),\ \mathrm{D}(-2,0)$이므로 $a^2+b^2=2^2$

직선 BE가 점근선이므로 $\frac{b}{a}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{DP}}-\overline{\mathrm{AP}}=2a=2$

17. [출제의도] 함수의 그래프의 성질을 추측할 수 있는지 묻는 문제이다.

$f'(x)=e^x-\frac{1}{x^2}$이고 $f''(x)=e^x+\frac{2}{x^3}$이다.

ㄱ. $f'(\alpha)=e^\alpha-\frac{1}{\alpha^2}=0$에서 $e^\alpha=\frac{1}{\alpha^2}$ (참)

ㄴ. 모든 양수 x에 대하여 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f'(\alpha)=0$이고 모든 양수 x에 대하여 $f''(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극소이자 최소이다. (참)

18. [출제의도] 벡터의 내적을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}},\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$가 성립하므로 점 P는 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 평면과 구의 교선인 원 위에 있다.

이때, 이 원의 반지름의 길이는 구의 중심과 직선 AB 사이의 거리와 같다.

한편, 원점 O에서 직선 $x+1=2-y=z$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(t-1, 2-t, t)$라 하면

$(t-1,2-t,t)\cdot(1,-1,\ 1)=0$에서 $t=1$이다.

이때, $\mathrm{H}(0,1,1)$이므로 $\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{2}$이다.

따라서 구하는 도형의 길이는 $2\sqrt{2}\pi$이다.

19. [출제의도] 적분과 미분을 이용하여 수면의 높이를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

수면의 높이가 h일 때 물의 부피 V는

$V=\pi\int_0^h x^2dy=\pi\int_0^h(2^{y-1})^2dy$이므로

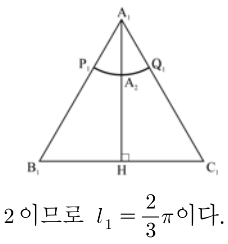
$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dh}\cdot\frac{dh}{dt}=\pi(2^{2h-2})\frac{dh}{dt},\ \pi(2^{2a-2})\cdot 6=12\pi$

$\therefore\ a=\frac{3}{2}$

20. [출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 행렬을 나타낼 수 있는지 묻는 문제이다.

R_1지점에서 도로망을 따라 S_2지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 $a_{11}\times a_{12}+a_{12}\times a_{22}$이므로 행렬 A^2의 $(1,\ 2)$성분과 같다.

21. [출제의도] 도형에서 무한등비급수의 합을 활용할 수 있는지 묻는 문제이다.



$\overline{\mathrm{A_1P_1}}=\overline{\mathrm{A_1A_2}}=2$이므로 $l_1=\frac{2}{3}\pi$이다.

한편, 꼭짓점 A_1에서 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 H로 놓으면 $\overline{\mathrm{A_1H}}=3\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{A_2H}}=\overline{\mathrm{A_1H}}-\overline{\mathrm{A_1A_2}}=3\sqrt{3}-2$

그러므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\frac{2}{3}\pi$이고 공비가 $1-\frac{2\sqrt{3}}{9}$인 등비수열을 이룬다.

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\frac{2}{3}\pi}{1-\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)} = \sqrt{3}\,\pi$

22. [출제의도] 무리방정식의 해를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\sqrt{x+10} = x-10$ 의 양변을 제곱하여 정리하면

$(x-6)(x-15) = 0$

$\therefore\ x = 15$ ($\because\ x \geq 10$)

23. [출제의도] 등차수열의 일반항을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 = a_2 + (-a_3 + a_4) + (-a_5 + a_6)$

$= a + 3(a+1) = 4a + 3 = 15$에서 $a = 3$

$\therefore\ a_7 = a + 6(a+1) = 7a + 6 = 27$

24. [출제의도] 중복조합을 이용하여 실생활 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

${}_4\mathrm{H}_8 - {}_4\mathrm{H}_4 = {}_{11}\mathrm{C}_3 - {}_7\mathrm{C}_3 = 165 - 35 = 130$

25. [출제의도] 로그와 관련된 실생활 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

$70 = 10\log\dfrac{\frac{1}{10^5}}{x_0} = 10(-5 - \log x_0)$ …… ㉠

$a = 10\log\dfrac{10^2}{x_0} = 10(2 - \log x_0)$ …… ㉡

㉡−㉠을 계산하면 $a - 70 = 70$

$\therefore\ a = 140$

26. [출제의도] 일차변환의 행렬을 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

일차변환 f에 의하여 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 $\mathrm{P}'(x', y')$으로 옮겨진다고 하면

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+2y \\ x+ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

에서 두 직선 $x' = 2$, $y' = x' + 1$로 각각 옮겨지는 두 직선 l, l'은 $-x+2y = 2$, $x + ay = -x + 2y + 1$이다.

이때, 수직인 두 직선 l, l'의 기울기는 각각 $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{-2}{a-2}$이므로 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{-2}{a-2} = -1$에서 $a = 3$이다.

27. [출제의도] 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$g(x) = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = t$라 하면 $-2 \leq t \leq 2$이다.

$(f\circ g)(x) = f(t) = t^3 - 3t^2 + 15$에서

$f'(t) = 3t(t-2)$이므로 $f(t)$는 $t = 0$에서 극대이다.

따라서 $f(0) = 15$, $f(-2) = -5$, $f(2) = 11$이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $f(0) + f(-2) = 10$이다.

28. [출제의도] 연속확률변수의 평균을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\displaystyle\int_0^a 2e^{-x}dx = \left[-2e^{-x}\right]_0^a = 1$에서 $a = \ln 2$이다.

$\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_0^{\ln 2} 2xe^{-x}dx = \left[-2xe^{-x}\right]_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} 2e^{-x}dx$

$= 1 - \ln 2$

$\therefore\ 10p + q = 12$

29. [출제의도] 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\mathrm{A}(1,\ 0)$이고 $S_1 = S_2$이므로

$\displaystyle\int_0^1 \{-(x+1)^3 + 8 - k\}dx = 0$

$\therefore\ 4k = 4\times\dfrac{17}{4} = 17$

30. [출제의도] 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

선분 AN의 중점을 P라 하면 두 직선 CN, MP가 서로 평행하므로 두 직선 BM, CN이 이루는 각의 크기는 두 직선 BM, MP가 이루는 각의 크기와 같다.

이때, $\overline{\mathrm{AB}} = 4$라 하면 $\overline{\mathrm{BM}} = 2\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{MP}} = \sqrt{3}$이고,

직각삼각형 BNP에서 $\overline{\mathrm{BP}} = \sqrt{13}$이다.

따라서 삼각형 BMP에서 코사인법칙에 의해

$\cos\theta = \left|\dfrac{\overline{\mathrm{BM}}^2 + \overline{\mathrm{MP}}^2 - \overline{\mathrm{BP}}^2}{2\overline{\mathrm{BM}}\cdot\overline{\mathrm{MP}}}\right| = \dfrac{1}{6}$

$\therefore\ p + q = 6 + 1 = 7$

수리‘나’형 정답

1	③	2	①	3	④	4	③	5	④
6	②	7	⑤	8	③	9	②	10	③
11	③	12	①	13	①	14	④	15	⑤
16	④	17	⑤	18	⑤	19	②	20	②
21	①	22	120	23	27	24	128	25	140
26	25	27	15	28	7	29	800	30	31

해 설

1. ‘가’형과 동일

2. [출제의도] 행렬의 계산을 할 수 있는지 묻는 문제이다.

$A^2 - AB = A(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 $3 - 2 + 1 - 1 = 1$이다.

3. [출제의도] 함수의 극한을 계산할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim_{x\to 1}(\sqrt{x+3}+2) = 2 + 2 = 4$

4. [출제의도] 서로 독립인 사건의 확률을 계산할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A\cap B)$

$= \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$= \dfrac{2}{3} + \mathrm{P}(B) - \dfrac{2}{3}\mathrm{P}(B) = \dfrac{11}{12}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B) = \dfrac{3}{4}$

5. [출제의도] 함수의 미분가능성을 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

함수 $f(x)$는 연속함수이다.

$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + a & (x > 1) \\ 4x & (x < 1) \end{cases}$

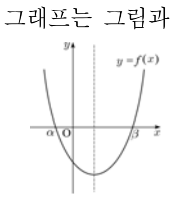
$\displaystyle\lim_{x\to 1+0}(3x^2 + a) = \lim_{x\to 1-0} 4x$에서 $3 + a = 4$이다.

$\therefore\ a = 1$

6. ‘가’형과 동일

7. [출제의도] 정적분의 값을 비교할 수 있는지 묻는 문제이다.

이차함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$\therefore\ C < B < A$

8. [출제의도] 확률을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2} = \dfrac{6}{(n+3)(n+2)} = \dfrac{1}{12}$

$n^2 + 5n - 66 = (n+11)(n-6) = 0$

$\therefore\ n = 6$

9. [출제의도] 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$g(x) = t$로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$이고

$(f\circ g)(x) = f(t) = t^3 + 3t^2 + 2$

$f'(t) = 3t^2 + 6t = 0$에서 $t = 0$ 또는 $t = -2$

이때, $f(0) = 2$, $f(-1) = 4$, $f(1) = 6$이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 8이다.

10. ‘가’형과 동일

11. [출제의도] 등비수열의 일반항의 자릿수를 구할 수

있는지 묻는 문제이다.

$\log a_{21} = \log(4 \cdot 5^{20}) = 2\log 2 + 20\log 5$

$= 2\times 0.3010 + 20\times(1-0.3010) = 14.5820$

따라서 지표가 14이므로 a_{21}은 15자리의 자연수이다.

12. '가'형과 동일

13. [출제의도] 정적분과 미분의 관계를 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x) = f'(x)f(x) + f(x)f'(x)$이므로

$f(x)\{1-2f'(x)\} = 0$이다.

이때, 함수 $f(x)$는 상수함수가 아닌 다항함수이므로

$f'(x) = \dfrac{1}{2}$이다.

이때, $f(1) = 0$이므로 $f(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ f(3) = 1$

14. [출제의도] 함수의 극한값을 추론할 수 있는지 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to+0} f(x) = \lim\limits_{x\to-0} f(x) = -1$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1+0} \{f(x)+g(x)\} \neq \lim\limits_{x\to1-0} \{f(x)+g(x)\}$ (거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{x\to-1+0} f(x)g(x) = \lim\limits_{x\to-1-0} f(x)g(x) = 0$이므로

$\lim\limits_{x\to-1} f(x)g(x) = 0$ (참)

15. '가'형과 동일

16. [출제의도] 도형에서 함수의 극한값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

중심이 $\mathrm{P}(x,\ y)$이므로 x축에 접하는 원의 반지름의 길이는 y이다. 두 원이 외접하므로 $\overline{\mathrm{PA}} = y+1$

즉, $\sqrt{x^2+(y-3)^2} = y+1$이다.

$x^2+(y-3)^2 = (y+1)^2$에서 $x^2 = 8y-8$

이때, $x\to\infty$이면 $y\to\infty$이므로

$\therefore\ \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\overline{\mathrm{PH}}^2}{\overline{\mathrm{PA}}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{y+1} = \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{8y-8}{y+1} = 8$

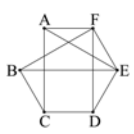
17. [출제의도] 무한급수와 정적분의 관계를 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n} f\left(-1+\dfrac{2k}{n}\right) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}(3x^3+4x^2-2x-1)\,dx$

$= \displaystyle\int_0^1 (4x^2-1)\,dx = \dfrac{1}{3}$

18. [출제의도] 그래프의 성질을 추론할 수 있는지 묻는 문제이다.

주어진 행렬이 나타내는 그래프는 그림과 같다.



따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

19. [출제의도] 속도와 거리의 관계를 이해할 수 있는지 묻는 문제이다.

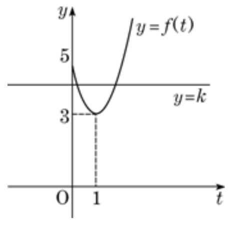
t에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 x_{P}, x_{Q}라 하면

$x_{\mathrm{P}} = 5 + \displaystyle\int_0^t (3t^2-2)\,dt = t^3-2t+5$,

$x_{\mathrm{Q}} = k + \displaystyle\int_0^t 1\,dt = t+k$

이때, 두 점 P, Q가 만나려면 $t^3-2t+5 = t+k$ 즉, $t^3-3t+5 = k$이어야 한다.

$f(t) = t^3-3t+5$라 하면 $f'(t) = 3t^2-3 = 3(t-1)(t+1)$이므로 $t>0$에서 함수 $f(t)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=k$와 곡선 $y=f(t)$가 서로 다른 두 점에서 만날 조건은 $3<k<5$이므로 정수 k는 4이다.

20. '가'형과 동일

21. '가'형과 동일

22. [출제의도] 이항정리에서 이항계수를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

${}_{10}\mathrm{C}_3 = \dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1} = 120$

23. '가'형과 동일

24. [출제의도] 곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$y' = 3x^2-2$이므로 곡선 위의 점 $(2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 10이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-4 = 10(x-2)$, $y = 10x-16$

$S = \dfrac{1}{2}\cdot16\cdot\dfrac{8}{5} = \dfrac{64}{5}$

$\therefore\ 10S = 128$

25. '가'형과 동일

26. [출제의도] 로그방정식을 이용하여 실근의 개수를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\log x = X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2 + (\log 2 + \log 4)X + (\log 2)(\log 4) + (\log k)^2 = 0$

주어진 조건을 만족하려면 X에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식 D는

$D = (\log 2 + \log 4)^2 - 4(\log 2)(\log 4) - 4(\log k)^2 > 0$

$-\dfrac{1}{2}\log 2 < \log k < \dfrac{1}{2}\log 2$

$\therefore\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} < k < \sqrt{2}$

$\therefore\ 10(\alpha^2+\beta^2) = 10\left(\dfrac{1}{2}+2\right) = 25$

27. [출제의도] 중복조합의 수를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

${}_{3+4-1}\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6\times5}{2} = 15$

28. [출제의도] 연속확률변수의 평균을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\mathrm{E}(X) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^2\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (5x^2-2x)\,dx = \dfrac{3}{4}$

$\therefore\ p+q = 7$

29. [출제의도] 행렬의 거듭제곱과 수열의 합을 추론할 수 있는지 묻는 문제이다.

$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$이라 하면 $A^n = (3P)^n = 3^n P^n$이다.

행렬 P^n의 모든 성분의 합을 T_n이라 하면 행렬 A^n의 모든 성분의 합은 $S_n = 3^n T_n$이므로 $S_n = 3^{n+1}$이 성립하려면 $T_n = 3$이어야 한다.

$T_1 = -1$, $T_2 = -3$, $T_3 = -2$, $T_4 = 1$, $T_5 = 3$,

$T_6 = 2$, $T_7 = -1$, $\cdots$

이므로 $n = 6k-1$(k는 자연수)일 때 $T_n = 3$이다.

따라서 구하는 100 이하의 모든 자연수의 합은 첫째항이 5이고 제16항이 95인 등차수열의 첫째항부터 제16항까지의 합이므로 $\dfrac{16(5+95)}{2} = 800$이다.

30. [출제의도] 수열의 합을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (8k-4) - 1 = 4n^2-1\ \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\sum\limits_{n=1}^{10} \dfrac{1}{S_n} = \sum\limits_{n=1}^{10} \dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{10}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{21}\right) = \dfrac{10}{21}$

$\therefore\ p+q = 31$