

지금까지 우리가 공부한 내용을 한 문장으로 정리해보면 이렇게 될 겁니다.

시공간 상에 좌표계를 설정해 물체의 운동을 관측하여 물체의 위치, 속도, 가속도를 분석한다.

물체의 운동을 위치, 속도, 가속도를 이용해서 분석하는 것은 많이 해보았죠.

운동방정식, 여러 공식들, 그래프, 평균속도 등을 활용함으로써 실현하였습니다.

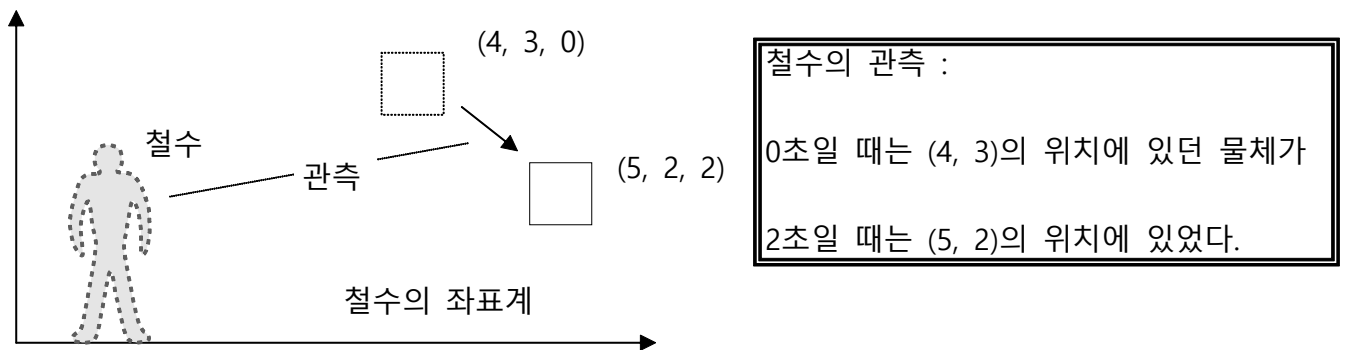
한편, 좌표계에 대해서는 간략하게만 배웠고 관측은 살펴본 적이 없죠.

이번에는 좌표계와 좌표계를 통해 관측하는 관찰자에 대해서 살펴봅시다.

좌표계는 세상을 관측하는 틀이라고 했습니다.

그리고 여기서 세상만사를 관측하는 주체를 관찰자라고 합니다.

관찰자마다 고유한 자신의 좌표계가 있고, 그 좌표계는 (정확하게는 원점은) 정지해있습니다.



관측 도중에 좌표계의 원점이 변해버리면 제대로 관측이 안 될 테니 당연한 이치입니다.

물론 좌표계의 원점은 관측을 시작할 때는 원하는 곳 아무데나 잡아도 됩니다.

보통 물체의 처음 위치를 원점으로 두겠지만, 둘 이상의 물체의 경우는 상황에 따라 다르겠죠.

기준이 되는 물체의 처음 위치를 원점으로 둘 수도 있고, 사이를 원점으로 둘 수도 있죠.

자기 자신의 위치를 원점으로 하게 될 수도 있고요. 물론 크게 중요하지는 않습니다.

변위(위치의 변화량)는 원점에 무관하고, 속도와 가속도는 변위로부터 정의되니까요.

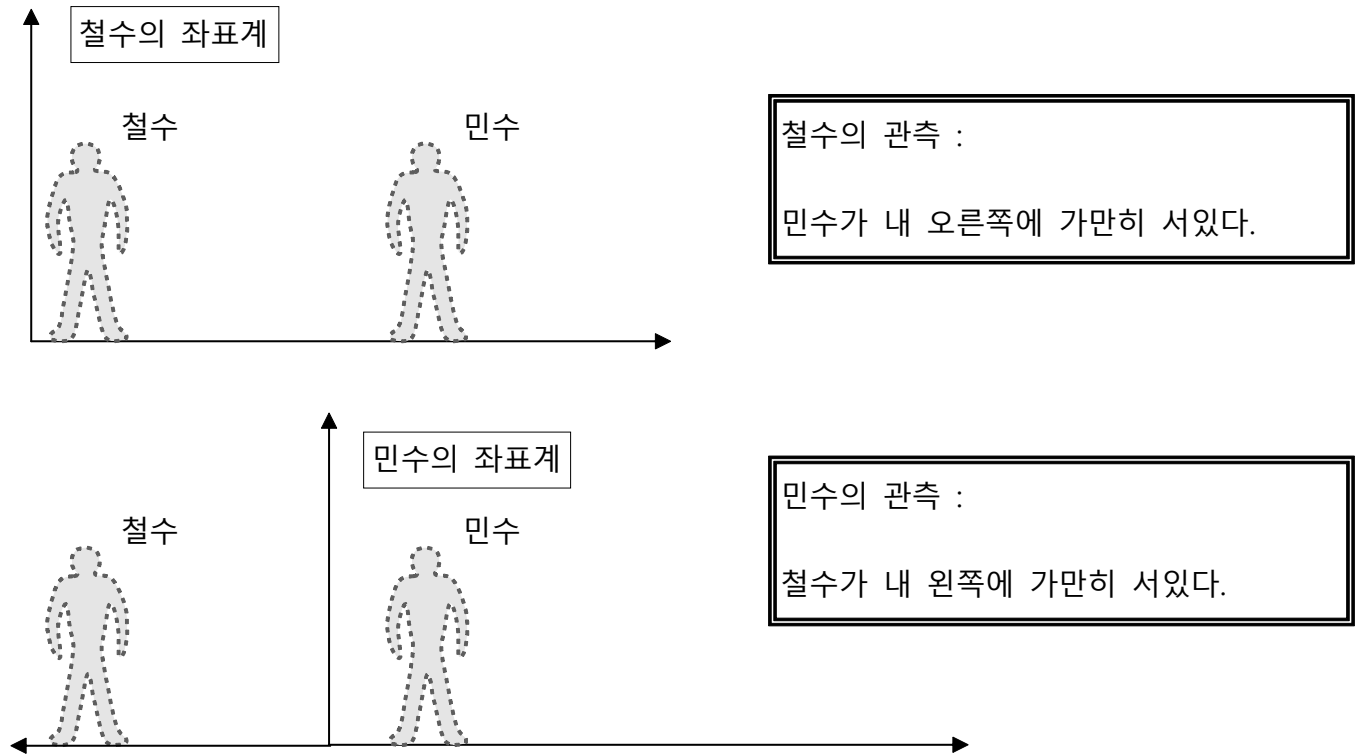
참고로 여기서 말하는 원점은 공간뿐만 아니라 시간도 포함하는 시공간상의 원점입니다.

※ 단순히 순서쌍으로 묶이기 때문에 시공간이라고 하는 건 아닙니다만, 우리 수준이 아닙니다.

문제는 관찰자가 세상에 하나만 있는 것은 아니라는 점입니다.

철수가 관찰할 때, 세상의 관찰자엔 두 가지 Case가 있습니다.

Case 1) (철수에 대해) 정지해 있는 관찰자



철수와 민수의 좌표계는 언뜻 보기엔 달라 보입니다.

그러나 철수와 민수는 물체의 운동을 동일하게 관측합니다.

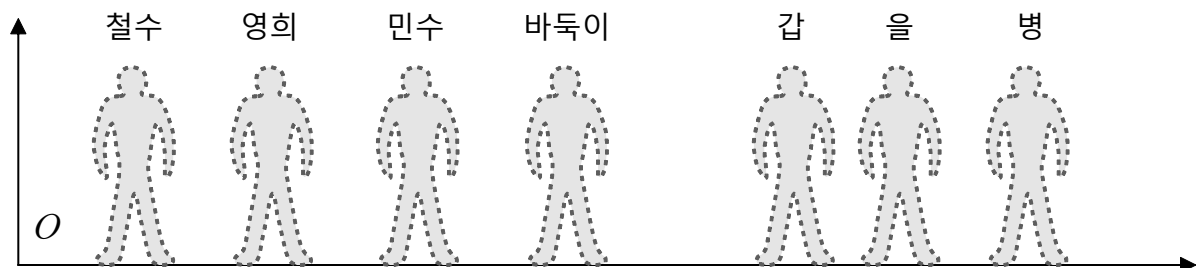
철수와 민수의 관측에서 차이가 있는 것은 오로지 위치뿐입니다.

정확히 두 원점의 차이만큼 차이가 있습니다.

따라서 원점을 동일하게 잡게 되면 철수와 민수의 좌표계가 동일해집니다.

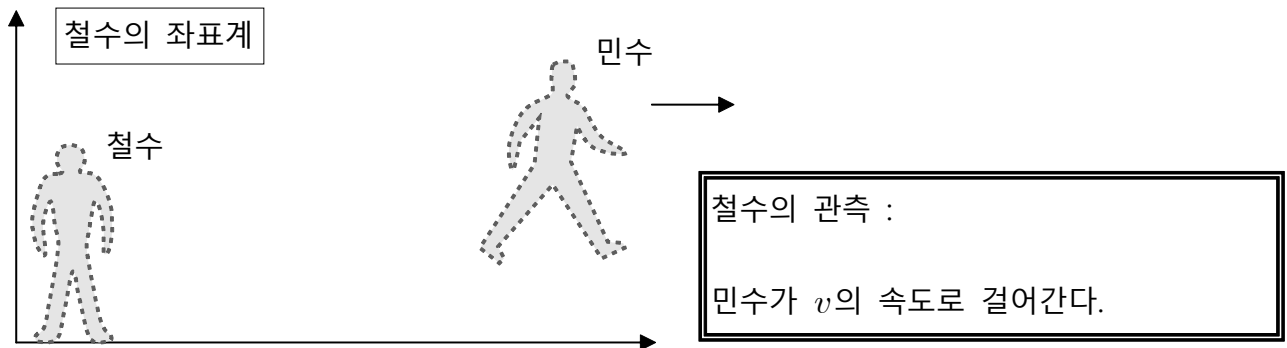
그런 의미에서 철수와 민수는 같은 좌표계, 이름을 지어보자면 O 에 있는 것으로 봅니다.

철수와 민수뿐만 아니라 철수나 민수에 대해 정지해 있는 모든 관찰자는 O 에 있습니다.

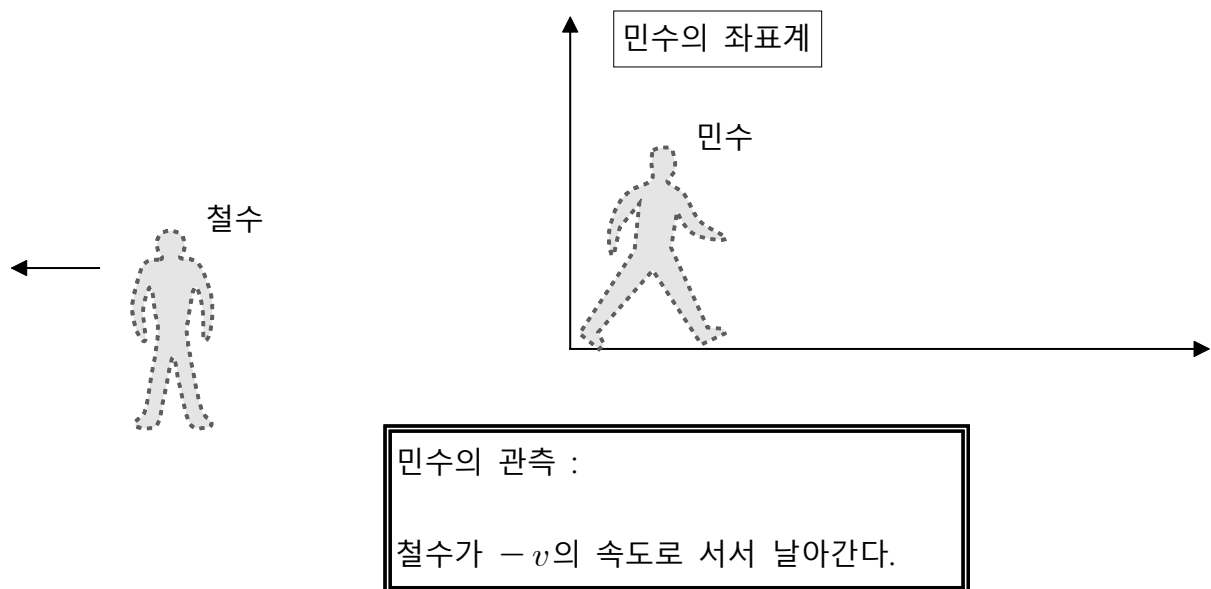


Case 2) (철수에 대해) 운동하는 관찰자

철수의 관측에 의하면 세상은 철수에 대해 정지해 있는 것들과, 운동하는 것들로 나뉩니다.



그런데 민수 역시 한 명의 관찰자로 볼 수 있습니다. 물론 관찰자가 사람일 필요는 없습니다.



이렇게 각 관찰자는 정지한 자신을 기준으로 다른 대상들을 관측합니다.

물론 민수는 상식적으로 서서 날아가는 일은 없으니 자기가 움직인다고 생각하겠죠.

비슷한 예로, 자동차 안에 타있는 문과생은 창밖의 가로수가 뒤쪽으로 지나가는 것을 보고 가로수가 운동하는 것이 아니라 자신이 운동한다고 말할 겁니다.

하지만 사실은 자동차에 타있는 관찰자의 좌표계에서 관측했다고 하였을 때

자동차와 관찰자는 정지해 있고, 가로수가 뒤쪽으로 가는 것이라고 진술하는 게 옳습니다.

땅은 멈춰있고 자동차가 운동한다는 것은 고정관념입니다.

땅에서 보면 자동차가 운동하는 것이겠지만, 자동차 입장에서는 땅이 운동하는 것입니다.

참고로, 반드시 관찰자가 있어야만 좌표계가 존재하는 것은 아닙니다.

예를 들어서 내가 가만히 서서 5 m/s 의 속력으로 공을 던졌다고 합시다.

그러면 그 공은 나의 좌표계에 대해 5 m/s 의 속력으로 운동하는 어떤 좌표계에 있게 됩니다.

그리고 좌표계 전체가 운동한다는 말은

그 좌표계에 속한 모든 물체/관찰자가 운동한다는 말로 약속합니다.

지금까지 좌표계에 대해서 배워보았으니, 이제 이를 통해 **상대속도**의 개념을 이해해봅시다.

상대속도는 다음과 같습니다.

“좌표계 A, B, O에 대하여 O에서 관측한 A의 상대속도가 v_{OA} 이고 B의 상대속도가 v_{OB} 일 때,

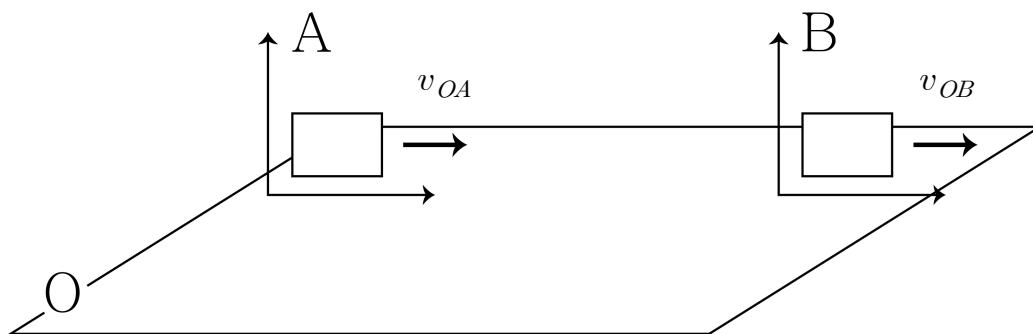
A에서 관측한 B의 상대속도 v_{AB} 는 $v_{AB} = v_{OB} - v_{OA}$ 이다”

아니! 상대속도의 정의에 상대속도가 들어가다니! 하시는 분들도 있을 텐데요

사실은 지금까지 배운 모든 속도가 실제로는 상대속도이기 때문에 그렇습니다.

위에 적은 식은 상대속도의 계산 방법이라고 보아도 될 것입니다.

유도하는 것은 어렵지 않습니다. $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ 의 양 변을 t 에 대해 미분하면 끝이죠.



위 그림이 지금까지 우리가 관측했던 방법입니다. 지면(O)에서 두 물체(A, B)의 속도를 관측,

여러 공식을 활용해서 이들의 운동을 분석하였습니다.

즉, 지면에서의 상대속도를 활용해서 문제를 풀었던 것입니다.

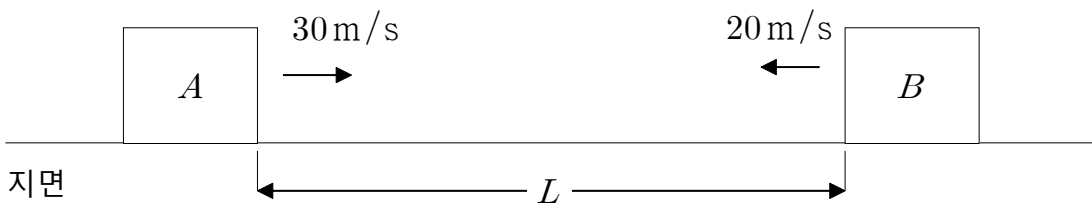
그런데 상대속도를 이용하면 O에서 관측할 것이 아니라, A의 관점에서 관측하게 됩니다.

v_{AB} 는 A에 대한 B의 상대속도이고, 풀어서 쓰면 A에서 관측한 B의 상대속도가 됩니다.

복잡하게 적을 것 없이 예제를 한 번 보도록 합시다.

예제 14) 0초일 때 A와 B가 서로를 향해 출발하여 각각 30m/s, 20m/s의 속력으로 등속도 운동 하였다. A와 B가 만날 때까지 걸린 시간이 5초일 때, A와 B 사이의 처음 거리는?

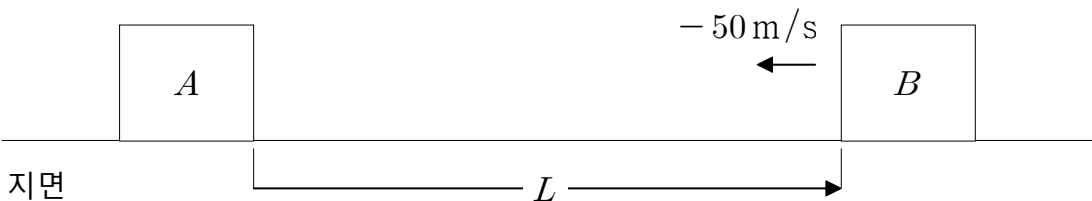
이걸 원래 풀었던 방식으로 하자면 아래 그림처럼 될 것입니다.



A와 B가 만나는 순간을 t 라고 하면, A의 이동거리는 $30t$, B의 이동거리는 $20t$ 입니다.

이때 $30t + 20t = L$ 이고 $t = 5$ 이므로 $L = 250$ m입니다.

이번에는 A에 대한 B의 상대속도를 이용해서 풀어봅시다.



$v_{OA} = +30$ m/s, $v_{OB} = -20$ m/s라고 하면 $v_{AB} = -50$ m/s가 됩니다.

맨 처음 A의 위치를 0, B의 위치를 L 이라고 합시다. (위치는 벡터임에 유의하세요)

그러면 A의 좌표계에서 관측할 때, 5초 동안 B의 변위는 -250 m 이고

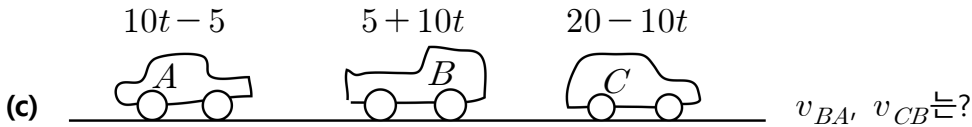
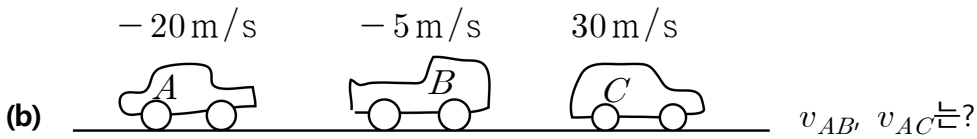
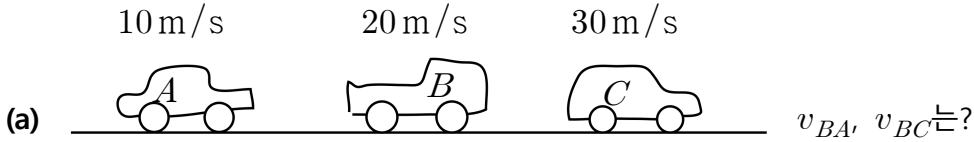
B의 나중 위치는 0이므로, $L - 250 = 0$, $L = 250$ m입니다. 따라서 크기도 250 m 이죠.

(처음 위치 + 변위 = 나중 위치)

글로 적어서 좀 정신없지만 직접 두 가지 방법으로 풀어보면 그 차이가 느껴질 것입니다.

예제 15) 지면에 대한 속도가 다음 그림과 같을 때, 물음에 답하시오.

(단, 오른쪽 방향을 양(+)으로 한다.)



정의 그대로 적용해서 풀면 정답은 다음과 같습니다. 풀고 비교해보세요.

(a) $-10 \text{ m/s}, 10 \text{ m/s}$ (b) $15 \text{ m/s}, 50 \text{ m/s}$ (c) $-10, 20t - 15$

그 다음 의미를 되새겨보세요.

(a) B에 대한 A의 속도(= B가 바라본 A의 속도)가 -10 m/s 라는 것은 B의 좌표계에서 볼 때 A가 왼쪽으로 10 m/s 의 속력으로 운동한다는 것입니다.

지면에서 볼 때, B는 오른쪽으로 20 m/s , A는 오른쪽으로 10 m/s 로 운동하니 당연합니다.

(a)와 (b)의 각 경우에 대해서 직관적으로 이해가 되는지 확인해보세요.

(c) 속도에 t 같은 것이 들어가는데, 당황하지 말고 $v = v_0 + at$ 에 대응시켜서 생각해보세요.

예를 들면 지면에서 관측한 B의 속도 $v_{OB} = 5 + 10t$ 인데 이는 $v_0 = 5, a = 10$ 인 것입니다.

이때 v_{BA} 에는 가속도항이 없습니다. 즉, B가 볼 때 A는 속도 -10 으로 등속도 운동을 합니다.

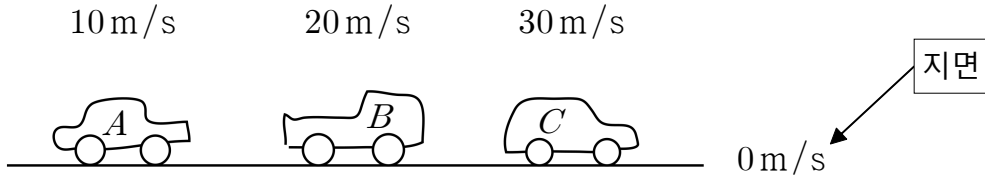
이는 A와 B의 가속도가 동일하기 때문입니다.

그런데 계산에 약한 학생들은 (저를 포함해서) $v_{AB} = v_{OB} - v_{OA}$ 같은 식도 어렵습니다.

문자 정리하는 문제라면 상관없겠지만, 숫자가 들어가면 종종 부호가 헷갈리죠.

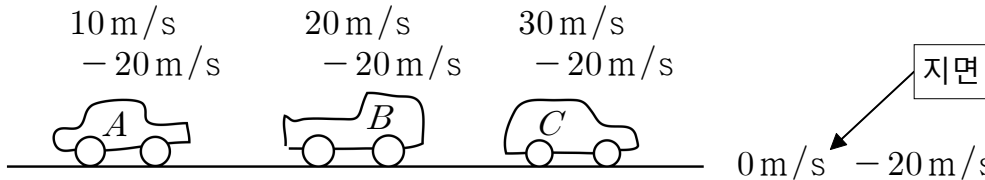
다행히 상대속도는 다음과 같은 요령으로 헷갈리지 않게 계산할 수 있습니다.

[예제 15]의 (a)는 B에 대한 A와 C의 속도 v_{BA} , v_{BC} 를 구하는 문제입니다.



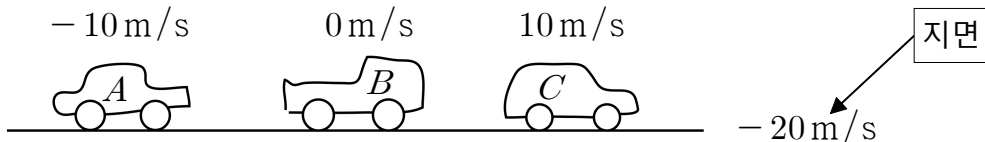
※ 상대속도에서 "B에 대한" = "B가 보는" = "B를 기준으로 하는" = "B의 좌표계에서 관측한"

이때 B는 자기 자신이 정지한 것으로 관측, $v_{BB} = 0$ 이 되어야 한다는 것만 기억하면 됩니다.



그래서 B가 관측하면 모든 물체/좌표계의 속도가 (지면에서 관측했을 때의 속도)에다

-20 m/s를 더하게 됩니다. 그러면 아래와 같이 되겠죠.



따라서 $v_{BA} = -10 \text{ m/s}$, $v_{BC} = 10 \text{ m/s}$, $v_{BO} = -20 \text{ m/s}$ 가 됩니다. O는 지면입니다.

이처럼 상대속도를 이용하면 관측의 기준이 되는 좌표계가 바뀌게 됩니다.

따라서 속도뿐만 아니라 위치, 가속도도 다르게 관측됩니다.

그리고 다르게 관측됨으로써 계산이 간단해지기 때문에 상대속도를 이용하면 더 쉽습니다.

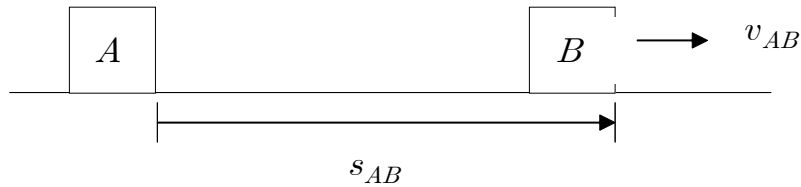
※ 물론 상대적 거리 등으로 조건이 주어지는 경우에도 상대속도를 이용합니다.

위의 두 예제에서 간략히 살펴본 내용을 정리해보도록 하겠습니다.

Step 1. 위치_속도

속도를 적분하면 위치가 됩니다. 마찬가지로 상대속도를 적분하면 위치가 됩니다.

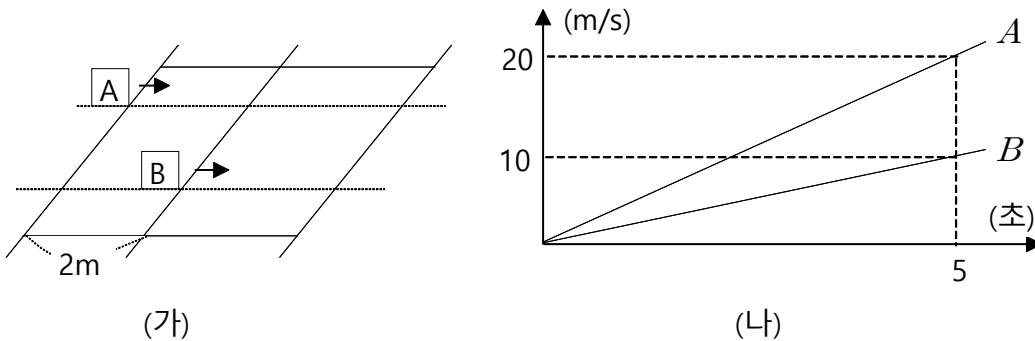
그런데 이때의 위치는 A의 위치를 기준으로 한 B의 위치, 즉 위치의 차를 나타냅니다.



즉, v_{AB} (A에 대한 B의 속도)를 이용하면 s_{AB} (A에 대한 B의 위치)의 변화를 알 수 있습니다.

다만 우리는 적분을 못하니까(...) 그래프를 이용해봅시다.

예제 16) (가)는 수평면 위에 정지해 있던 물체 A, B가 0초일 때 출발하여 각각 등가속도 운동하는 모습을, (나)는 수평면에서 관측한 두 물체의 속도를 시간에 따라 나타낸 것이다. 0초일 때 A와 B가 위치한 기준선 사이의 간격은 2m이다.

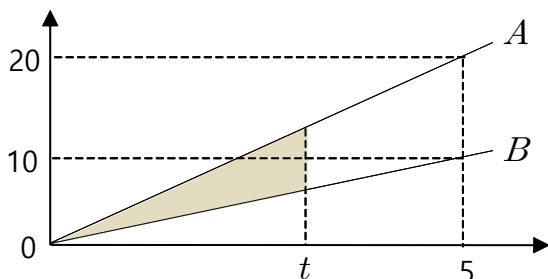


(단, A와 B는 직선 경로를 따라 서로 평행하게 운동한다.)

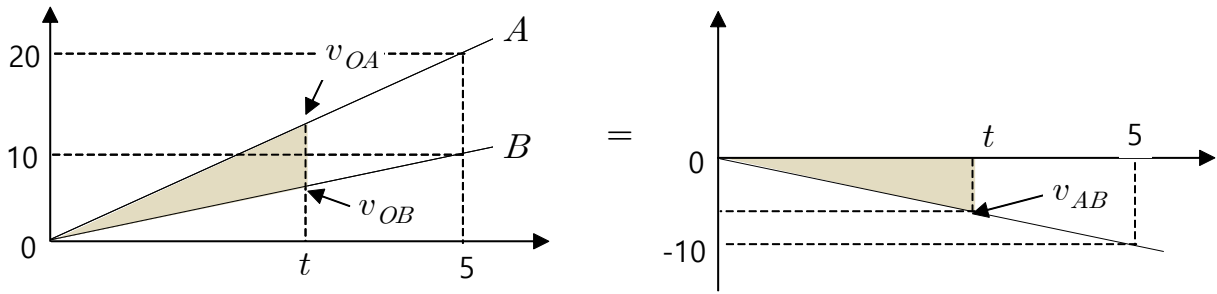
(a) A와 B 사이의 간격이 같아질 때까지 걸린 시간 t 는?

(b) 5초일 때 A와 B가 위치한 기준선 사이의 간격 L 은?

(a) 다음 회색 부분의 면적이 2m가 될 때의 시각이 t 입니다.



왜냐하면, 아래의 두 그래프에서 색칠된 부분의 면적이 같기 때문입니다. (\because 삼각형이므로)



오른쪽 그래프는 왼쪽의 두 직선을 이용해서 그린 $v_{AB} - t$ 그래프입니다.

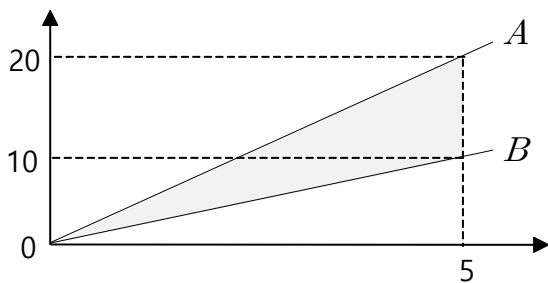
그래프가 왜 저렇게 그려지는지는 ~~한완수 그래프 그리기를~~ 참고하시면 됩니다.

A에 대한 B의 처음 위치 $s_{AB} = 2\text{m}$ 이므로

오른쪽 그래프의 색칠된 면적이 의미하는 변위 $\Delta s_{AB} = -2\text{m}$ 가 되어야 합니다.

따라서 $\frac{1}{2} \times (2t) \times t = 2$ 가 되어야 하므로 (\because 삼각형의 넓음) $t = \sqrt{2}$ 초입니다.

(b) 다음 그래프의 색칠된 면적은 B에 대한 A의 변위 Δs_{BA} 입니다.



물론 " $v_{OA} - v_{OB} = v_{BA}$ 이므로 $\int_0^5 v_{BA} dt = \Delta s_{BA}$ 이다" 이렇게 어렵게 풀지는 마세요.

변위는 방향과 크기를 가지고 있는 양입니다.

위 그래프에서 색칠된 부분의 면적이 (A의 좌표계에서 관측한) B의 변위의 크기가 됩니다.

이렇게 변위의 크기를 구한 다음($0.5 \times 10 \times 5 = 25\text{m}$) 방향을 따져주면 됩니다.

여기서는 A가 뒤쳐져 있었고, A와 B의 운동 방향이 같고, A의 속력이 더 크므로

상식적으로 (A의 좌표계에서 관측한) B의 변위의 방향은 왼쪽(음(-)의 방향)이 됩니다.

즉, 다음 두 단계가 머릿속에서 즉각적으로 진행되면 방향 파악이 끝나는 겁니다.

1> 지면에서 볼 때, A가 B의 뒤에 있었고 A가 B보다 빠르다.

2> A가 볼 때, 앞서 있던 B가 뒤쪽으로 운동한다.

(A의 좌표계에서) 처음 B의 위치가 2m(앞쪽 2m)이고, 변위가 -25 m (뒤쪽 25m)이므로

B의 나중 위치가 -23 m (뒤쪽 23m)입니다. 당연히 A의 위치가 원점(0m)입니다.

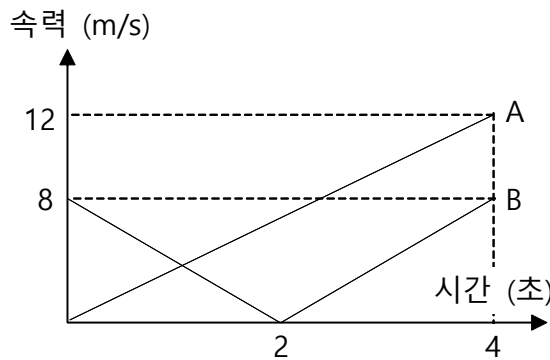
따라서 $L = 23\text{ m}$ 입니다.

원래 이 문제는 A와 B의 운동을 모두 고려해서 더하고 빼는 계산을 해서 풀었어야 하지만

상대속도를 이용하면 (A에 대한) B의 운동만을 고려해서 계산을 할 수 있습니다.


단, 주의해야할 것은 이때는 반드시 속도-시간 그래프를 이용해야 한다는 점입니다.

예제 17) 두 물체 A, B가 직선상에서 등가속도 운동하고 있다. 다음 그래프는 A, B의 속력을 A, B가 만날 때까지 시간에 따라 나타낸 것이다. 1초일 때, A와 B는 서로를 향해 운동한다.



0초일 때, A와 B 사이의 거리는?

0~2초 구간의 v_B 직선을 t 축에 대하여 대칭시킨 다음

v_A 와 v_B 사이  모양의 넓이를 구하면 $\frac{1}{2} \times (8 + 12) \times 4 = 40\text{ m}$ 입니다.

나중 위치($s_{AB}(4)$)가 0이기 때문입니다.

Step 2. 위치_속도_가속도

상대적인 위치를 이용해서 문제를 풀면 두 물체의 간격을 쉽게 구할 수 있습니다.

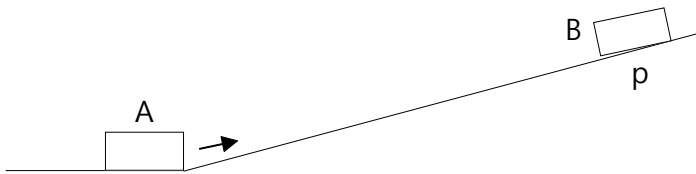
무엇보다, 그래프를 이용해서 계산할 수 있기 때문에 편합니다.

이제 두 번째 단계로 넘어가서, 상대적인 가속도를 이용하는 유형을 살펴봅시다.

예제 18) 수레 A가 20 m/s 의 속력으로 기울기가 일정한 빗면에 진입하는 순간, 빗면 위의 점 p에 수레 B를 가만히 놓았더니 4초 후 A와 B가 충돌하였다.

0초일 때 A, B 사이의 거리는?

(단, 모든 마찰은 무시하고 A와 B는 같은 연직면 상에서 운동한다.)



상황을 그림으로 그려보면 위와 같습니다. 이제 문제를 풀어봅시다.

기울기가 일정한 빗면에서 A와 B의 가속도는 같습니다.

그런데 A의 속력은 감소하고, B의 속력은 증가하기 때문에 반대로 착각하기 쉽습니다.

A의 속도 : $20 - at$, B의 속도 : at 라고 놓고 풀기 십상이죠.

이렇게 놓고 풀어도 A의 이동거리와 B의 이동거리의 합을 구하면 a 항이 소거되면서 답은 나옵니다. 하지만 이렇게 풀면 상대속도를 이용한 풀이가 아니니 다시 풀어보죠.

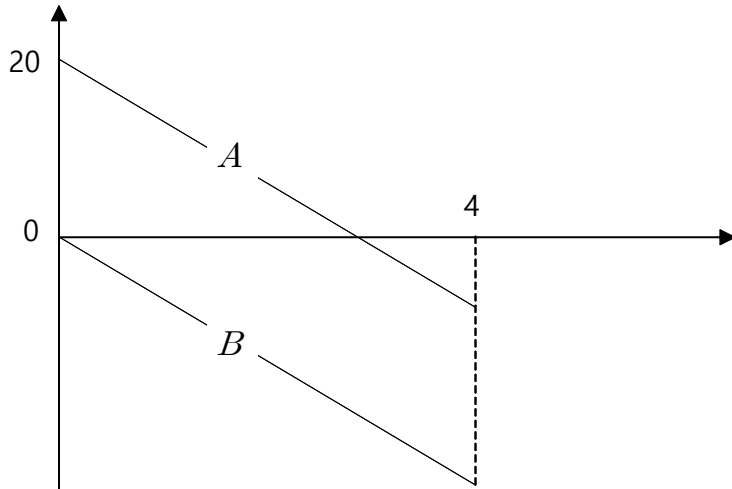
A와 B의 상대속도를 계산하려면 우선 수평면/지면에서의 A, B의 속도를 알아야 하고

당연히 A의 속도 : $20 - at$, B의 속도 : $-at$ 라고 놓아야 합니다.

자, 그런데 이렇게 놓고 보니 $v_{BA} = 20 - at - (-at) = 20\text{ m/s}$ 입니다.

즉, B가 볼 때 A가 일정한 속력 20 m/s 로 다가오는 것입니다.

위 상황을 $v-t$ 그래프로 그리면 이렇게 됩니다.



그런데, 가속도가 같기 때문에 두 직선의 기울기가 같습니다.

따라서 v_{AB} 의 그래프를 그리면 상수함수가 되지요.

이제 처음 두 물체 사이의 간격은 평행사변형의 넓이와 같으므로 $20 \times 4 = 80\text{m}$ 입니다.

가속도가 같은 운동을 하는 두 물체의 상대적인 가속도는 0입니다.

동일한 빗면에서 운동하는 물체들, 중력장 속에서 운동하는 물체들은 모두 가속도가 같습니다.

따라서 이런 경우에는 그래프를 그리거나, 한 순간의 상대속도를 구하면

두 물체의 등가속도 운동 \rightarrow 한 물체의 등속도 운동으로 상황을 단순화시킬 수 있습니다.

지금까지 속도 가속도 단원에서 등장하는 거의 모든 개념과 요령을 배워보았습니다.

하지만 물리는 개념을 글로 배우는 과목이 아닙니다.

문제 하나하나에 직접 적용해보고 익히고 피드백 함으로써 한 걸음씩 나아가는 과목이죠.

이 칼럼은 이것 자체로는 절대 완결되지 않습니다.

여러분이 가지고 있는 EBS 문제집, 기출 문제집을 다시 풀어보면서 개념을 되새겨 보시고

여기에서 등장한 여러 풀이와 따름 정리들을 활용하는 연습을 해보기 바랍니다.

그럼 다음 칼럼에서는 특수 상대성이론의 모든 것을 파헤쳐보도록 하겠습니다.