수학 영역

해설 진주환

5지선다형

1. $(2\sqrt{2})^{\frac{5}{3}} \div \sqrt{2}$ 의 값은? [2점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2　④ $2\sqrt{2}$　⑤ 4

2. 함수 $f(x)=x^4+x$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [2점]

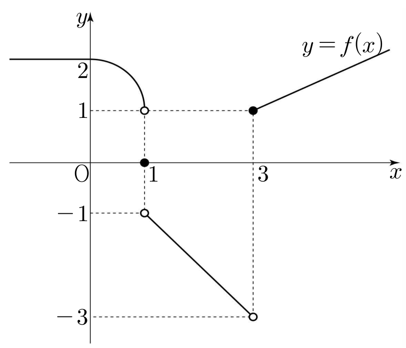
① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

3. 공비가 -2인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4+a_7=70$일 때, a_3의 값은? [3점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

$-2a_3+16a_3=14a_3=70.$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



$\underbrace{\lim_{x\to 3-} f(x)}_{-3} - \underbrace{\lim_{x\to 1}|f(x)|}_{1}$ 의 값은? [3점]

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

5. $\cos\theta = \frac{1}{3}$ 일 때, $|\tan\theta \times \sin\theta|$ 의 값은? [3점]

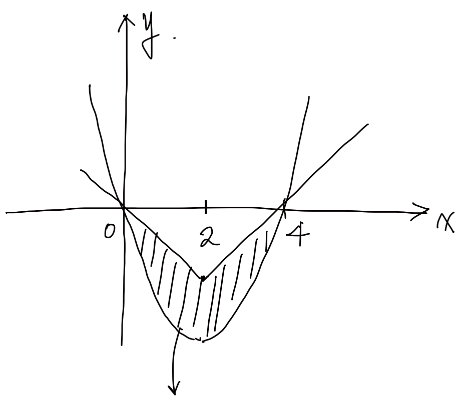
① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

$\left|\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right| = \left|\frac{\frac{8}{9}}{\frac{1}{3}}\right| = \frac{8}{3}$.

6. 두 곡선 $y = x(x-4)$, $y = |x-2| - 2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

$x-4$, $-x$

① 6 ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$ ④ 8 ⑤ $\frac{26}{3}$



$-x - x(x-4) = -x^2+3x$.

$2 \cdot \int_0^2 -x^2+3x \, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^2 \times 2$

$= \left(-\frac{8}{3}+6\right) \times 2 = \frac{20}{3}$

7. 두 함수

$$f(x) = 2^{x-3},\ g(x) = x^2 - 4x + \frac{15}{2}$$

에 대하여 닫힌구간 $[-2, 5]$ 에서 함수 $g(f(x))$ 의 최댓값과 최솟값의 합은? [3점]

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

min : $f(x) = 2$; $x = 4$. → $g(f(4)) = \frac{7}{2}$.

max : $f(x) = 4$ or $\frac{1}{2^5}$: $x = 5$ → $g(f(5)) = \frac{15}{2}$

$\therefore \frac{7}{2} + \frac{15}{2} = 11$.

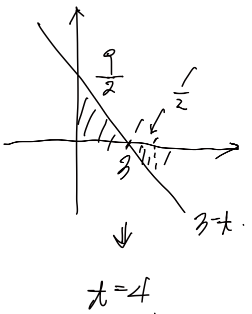
8. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 3 - t,\ v_2(t) = t$$

이다. 점 P가 움직인 거리가 5가 되는 순간 점 Q의 위치는? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$x_1(t) = 3t - \frac{1}{2}t^2$, $x_2(t) = \frac{1}{2}t^2$.



$\downarrow$

$t = 4$.

$\therefore x_2(4) = \frac{1}{2}\cdot 4^2 = 8$

9. 일차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$2\int_0^x |f(t)|\,dt = |x-2|\,f(x) + 3$$

을 만족시킬 때, $f(6)$의 값은? [4점]

① 3 ② $\frac{9}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 9

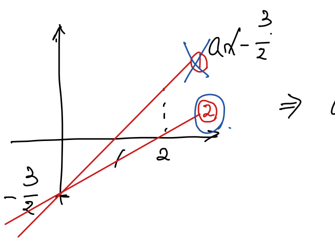
$x \to 0$: $2f(0) + 3 = 0$: $f(0) = -\frac{3}{2}$.

$\to f(x) = ax - \frac{3}{2}$.

$x \to 2$: $\cancel{2}\int_0^2 |f(t)|\,dt = \frac{3}{2}$.

$(x \to 1)$

$\cancel{①}$ $\frac{3}{2} \neq 3$



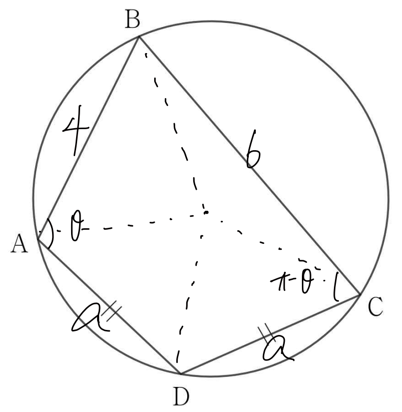
$\Rightarrow a = \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$. ② $\frac{9}{4} = -\frac{3}{4} + 3$

$\therefore f(6) = \frac{3}{4} \times 6 - \frac{3}{2} = 3$

10. 그림과 같이 $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 6$이고 원에 내접하는 사각형 ABCD가 다음 조건을 만족시킬 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]

> (가) $\cos(\angle BAD) = -\frac{\sqrt{3}}{6}$
>
> (나) $\overline{AD} = \overline{CD}$

① $4\sqrt{11}$ ② $\frac{9}{2}\sqrt{11}$ ③ $5\sqrt{11}$ ④ $\frac{11}{2}\sqrt{11}$ ⑤ $6\sqrt{11}$



i) $\cancel{a^2} + 16 + 8a\cdot\frac{\sqrt{3}}{6} = \cancel{a^2} + 36 - 12\cdot a\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}$

$\frac{20\sqrt{3}}{6}a = 20 \Leftrightarrow a = 2\sqrt{3}$.

ii) $\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cancel{4}^{2} + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\cancel{6}^{3}\right)\cdot\sin\theta$

$= 10\sqrt{3}\cdot\sqrt{1 - \frac{1}{12}} = 5\sqrt{11}$.

11. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 어떤 자연수 m에 대하여

+4d

$$a_m,\ S_3,\ a_{m+4},\ a_{2m},\ \frac{35}{2}$$

+2d +2d +2d +2d.

가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $m+a_{11}$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

i) $\cancel{a}_m+6d=\cancel{a}_{2m}\ md \Leftrightarrow m=6.$

ii) $a_{2m}+2d=a+13d=\frac{35}{2}$

iii) $a_m+2d=a+7d=S_3=3a+3d.$

$\Leftrightarrow a=2d.$

$15d=\frac{35}{2}$

$\Leftrightarrow d=\frac{7}{6}$

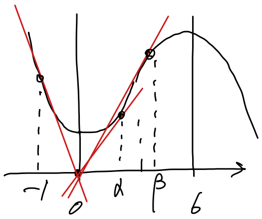
$\therefore a=\frac{7}{3},\ d=\frac{7}{6},\ m=6$

$\therefore m+a_{11}=6+\frac{7}{3}+\frac{7}{\cancel{6}_{3}}\cdot\cancel{10}^{5}=6+14=20.$

12. 원점을 지나고 삼차함수 $f(x)=-x^3+9x^2+11$의 그래프에 접하는 기울기가 양수인 모든 직선의 기울기의 합은? [4점]

① 40 ② $\frac{165}{4}$ ③ $\frac{85}{2}$ ④ $\frac{175}{4}$ ⑤ 45

$f'(x)=-3x^2+18x=-3x(x-6).$



임의의 점 $(t, f(t))$에 대해 접선 l:

$y=-3t(t-6)(x-t)+f(t)$

$\rightarrow 0=-3t(t-6)\cdot(-t)+(-t^3+9t^2+11)$

$=2t^3-9t^2+11=(t+1)(2t^2-11t+11)$

$\therefore 2t^2-11t+11=0$ 의 두 근 α, β

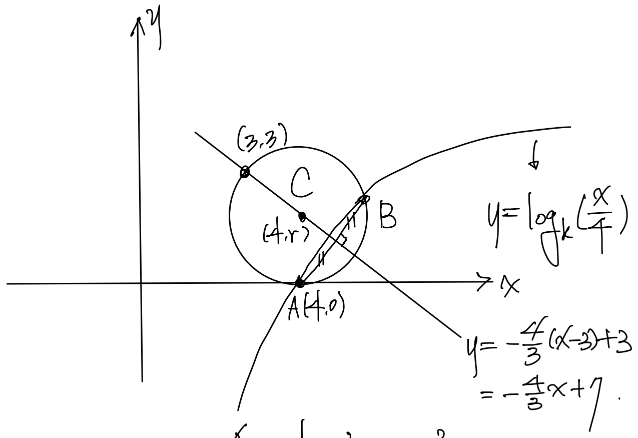
(기울기의 합) $=f'(\alpha)+f'(\beta)=-3(\alpha^2+\beta^2)+18(\alpha+\beta)$

$=-3\left(\left(\frac{11}{2}\right)^2-2\cdot\frac{11}{2}\right)+18\cdot\frac{11}{2}$

$=\frac{165}{4}$

13. 중심이 제1사분면 위에 있고 점 A(4, 0)에서 x축과 접하는 원 C가 곡선 $y=\log_k\left(\frac{x}{4}\right)$ $(k>1)$과 만나는 두 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 선분 AB의 수직이등분선이 원 C와 만나는 두 점 중 한 점의 좌표가 $(3, 3)$일 때, k의 값은? [4점]

① $\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ ② $\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ ③ $\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ ④ $\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$ ⑤ $\left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$



$C(4, r) \rightarrow \cancel{r^2} = (4-3)^2+(r-3)^2$
$= \cancel{r^2}-6r+10 \rightarrow r=\frac{5}{3}$.

$\therefore \overline{AB}: y=\frac{3}{4}(x-4)=\frac{3}{4}x-3$

$B\left(t, \frac{3}{4}t-3\right)$ 라하면,

$\frac{\frac{3}{4}t-3}{2} = -\frac{4}{3}\left(\frac{t+4}{2}\right)+7 \Leftrightarrow \frac{3}{8}t-\frac{3}{2}=-\frac{2}{3}t+\frac{13}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{25}{24}t=\frac{140}{24}$

$\therefore t=\frac{28}{5}$.

$\therefore \frac{6}{5}=\log_k\left(\frac{7}{5}\right) \Leftrightarrow k=\left(\frac{7}{5}\right)^{\frac{5}{6}}$

14. 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|-|x|}{x}=f(2)$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $f(-1)=0$이면 $f(3)=6$이다.

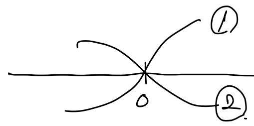
ㄴ. $f(3)<0$이면 $\frac{1}{3}<f(1)<\frac{1}{2}$이다.

ㄷ. $f(-2)>1$이고 $f\left(-\frac{8}{3}\right)\le 0$인 함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$f(0)=0$

①. $f'(0)-1=-f'(0)+1=f(2)$
$\Leftrightarrow f'(0)=1, f(2)=0$.



② $f'(0)+1=-f'(0)-1=f(2)$
$\Leftrightarrow f'(0)=-1, f(2)=0$.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx,\ f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

ㄱ. ① $c=1,\ 8a+4b=-2,\ -a+b=1$: $a=-\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$ (x)
② $c=-1,\ 8a+4b=2,\ -a+b=-1$: $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$ (o)
$\therefore f(3)=27\cdot\frac{1}{2}+9\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-3=6$.

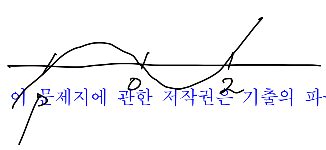
ㄴ. $f(x)=a\cdot x\cdot(x-2)(x-p)$ 라하면, $f'(0)=2ap=1$: $ap=\frac{1}{2}$

$f(3)<0 \rightarrow p>3$: $f(1)=a\cdot 1\cdot(-1)\cdot(1-p)$
$0<a<\frac{1}{6}$ $=\frac{1}{2}-a$

$\therefore \frac{1}{3}<\frac{1}{2}-a<\frac{1}{2}$

ㄷ. $f(-2)=a\cdot(-2)\cdot(-4)\cdot(-2-p)$
① $=-8a(p+2)=-4-16a>1$: 모순 $(a>0)$
② $=-8a(p+2)=4-16a>1$: $0<a<\frac{3}{16}$

$ap=-\frac{1}{2}$ 이므로 $\begin{cases} 0<a \Leftrightarrow 0<-\frac{1}{2p} : p<0 \\ a<\frac{3}{16} \Leftrightarrow -\frac{1}{2p}<\frac{3}{16} : p<-\frac{8}{3} \end{cases}$



$\Rightarrow f\left(-\frac{8}{3}\right)>0$.

15. 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 존재하지 않도록 하는 모든 2 이상의 자연수 m의 개수는? [4점]

> (가) 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 정수이고,
>
> $$n \times 2^{-a_n - 1} - 1 \le m \le n \times 2^{-a_n} - 1$$
>
> 이다.
>
> (나) $a_{m+70} - a_m \neq 3$

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

$n \cdot 2^{-a_n} = f(n)$

$\frac{f(n)}{2} - 1 \le m \le f(n) - 1$

$\Leftrightarrow \quad m+1 \le \underbrace{f(n) = n \cdot 2^{-a_n}}_{\hookrightarrow (m+2)\text{개 존재}} \le 2m+2$ ..

$a_m : \quad 1 + \frac{1}{m} \le 2^{-a_m} \le 2 + \frac{2}{m}$.

$\rightarrow \quad a_m = -1$.

$a_{m+70} : \quad \frac{m+1}{m+70} \le 2^{-a_{m+70}} \le \frac{2m+2}{m+70}$.

$\left(1 - \frac{69}{m+70}\right) \qquad \left(2 - \frac{138}{m+70}\right)$

$\rightarrow \quad a_{m+70} = 0, 1, 2, \cdots$

$\therefore \quad \frac{1}{8} < \frac{m+1}{m+70} \le \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} \le \frac{2m+2}{m+70} < \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad m+70 < 8m+8, \quad 4m+4 < m+70$

$\Leftrightarrow \quad 8 < \frac{62}{7} < m < 22.$

$\therefore$ 13개.

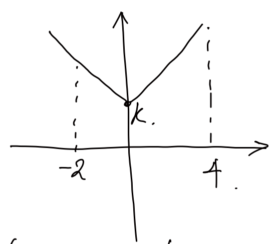
단답형

16. 중심각의 크기가 $\frac{4}{3}\pi$이고 반지름의 길이가 6인 부채꼴의 넓이를 $a\pi$라 하자. a의 값을 구하시오. [3점] 24

$\frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{4}{3}\pi = 24\pi$

17. $\int_{-2}^{4} (|x| + k)dx = 40$일 때, 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

5



$\frac{1}{2}(2k+2) \cdot 2 + \frac{1}{2}(2k+4) \cdot 4 = 6k+10 = 40.$

$\therefore k = 5.$

18. $\sum_{n=1}^{5}(a_n+n)-\sum_{n=1}^{4}(a_{n+1}+n+2)=13$ 일 때, a_1 의 값을 구하시오. [3점] 16

$(a_1+5)-8=13$ ∴ $a_1=16$

19. 다항함수 $f(x)$가 $f(2)=2$를 만족시킬 때, 함수 $g(x)=xf(x)$에 대하여 $g'(2)=22$이다. $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점] 10

$g'(2)=f(2)+2f'(2)$

$22=2+2f'(2)$

$\therefore f'(2)=10$

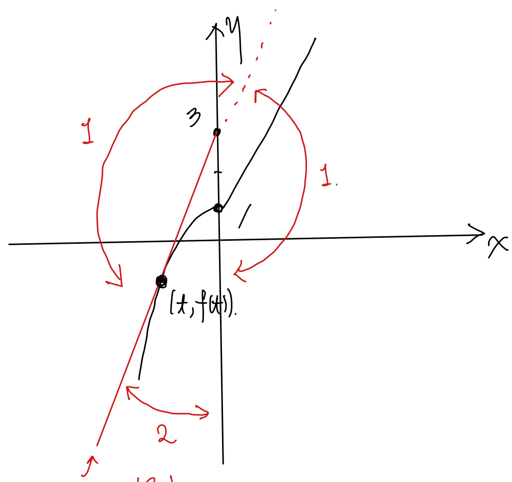
20. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}1-ax^2 & (x<0)\\ 2x+1 & (x\geq 0)\end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 방정식 $f(x)=tx+3$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

함수 $g(t)$가 $t=b$에서 불연속인 실수 b의 개수는 1이다.

$f(10a)$의 값을 구하시오. [4점] 11



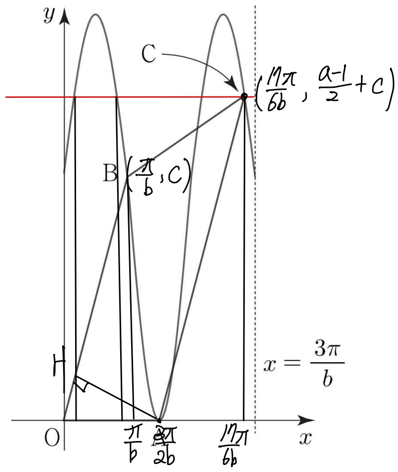
ℓ: 불연속, 기울기 2.

$\ell: \cancel{y}^{3}=-2at(\cancel{x}^{0}-t)+(1-at^2)$, $-2at=2$.

$at^2=2$, $at=-1$ ∴ $t=-2$, $a=\frac{1}{2}$.

$\therefore f(10a)=f(5)=2\cdot5+1=11$.

21. $a>1$인 실수 a와 두 양수 b, c에 대하여 $0 \le x \le \frac{3\pi}{b}$에서 정의된 함수 $f(x)=a\sin bx-|\sin bx|+c$의 그래프가 x축과 오직 한 점 A에서 만난다. 함수 $f(x)$의 그래프 위의 x좌표가 $\frac{\pi}{b}$인 점을 B, x좌표가 $\frac{17\pi}{6b}$인 점을 C라 할 때, 사각형 OACB는 넓이가 $\frac{7}{4}\pi$인 사다리꼴이다. $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점] 17.



$\sin bx>0$; $f(x)=(a-1)\sin bx+c$
$\sin bx<0$: $f(x)=(a+1)\sin bx+c$) 주기 : $\frac{2\pi}{b}$.

$B \to f\left(\frac{\pi}{b}\right)=-(a+1)+c=0$; $a+1=c$

① 사다리꼴. : $\overline{OB} \,/\!/\, \overline{AC}$

$\frac{bc}{\cancel{\pi}}=\frac{\frac{a-1}{2}+c}{\frac{8\pi}{6b}} \iff 3a-2c=3 \to c=6,\ a=5$
$\therefore C\left(\frac{17\pi}{6b}, \frac{4}{3}c\right)$

② 넓이.

$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{b}\cdot c+\frac{1}{2}\cdot\left(c+\frac{4}{3}c\right)\cdot\frac{11\pi}{6b}-\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi}{3b}\cdot\frac{4}{3}c$.
$=\frac{\cancel{7c}\pi}{\cancel{4b}}=\frac{7\pi}{4}$. $b=c=6$

$\therefore a+b+c=5+6+6=17$.

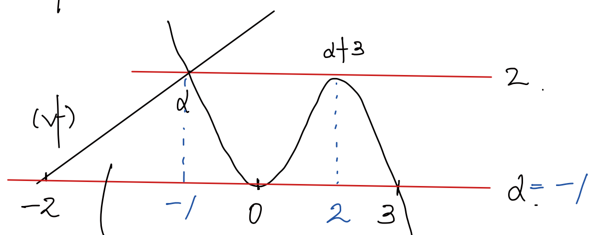
22. 삼차함수 $f(x)$와 일차함수 $g(x)$에 대하여 $f(x)$와 $g(x)$ 중 크지 않은 값을 $h(x)$라 할 때, 어떤 실수 α에 대하여 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\{x \mid h(x) \ge 2\}=\{\alpha,\ \alpha+3\}$ → $h(x)$ 연속이므로 α, $\alpha+3$에서 극대.
(나) $h(-2)=h(0)=h(3)=\alpha$

직선 $y=g(x)$의 기울기가 양수일 때, $g(\alpha+5)-f(\alpha+5)$의 값을 구하시오. [4점] 30

(가) $h(\alpha)=h(\alpha+3)=2$.

(나)



$g(x)=3x+5$, $f(x)=k(x+1)(x-2)^2+2$.
$f(0)=4k+2=-1$; $k=-\frac{3}{4}$.

$\therefore g(\alpha+5)-f(\alpha+5)=g(4)-f(4)$
$=17-\left(-\frac{3}{\cancel{4}}\cdot5\cdot\cancel{4}+2\right)$
$=30$.

※ 확인 사항

◦ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

◦ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(확률과 통계) by 김익성T.

5지선다형

23. 6개의 문자 E, F, F, E, C, T를 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 180 ② 210 ③ 240 ④ 270 ⑤ 300

$\frac{6!}{2!2!} = 180.$

24. 서로 독립인 두 사건 A, B가

$$P(A \cap B) = \frac{2}{15},\ P(A \cap B^C) = \frac{1}{5}$$

을 만족시킬 때, $P(A^C)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

$P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{15}$

$P(A) \cdot \{1 - P(B)\} = \frac{1}{5}$

$P(A) = \frac{1}{3}$

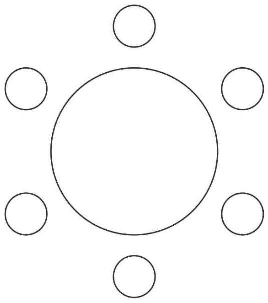
25. 익성이와 현준이를 포함한 6명의 학생이 다음 조건을 만족시키도록 일정한 간격을 두고 원 모양의 탁자에 둘러앉는 경우의 수는? (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

배반사건

익성이와 현준이는 이웃하거나 마주본다.

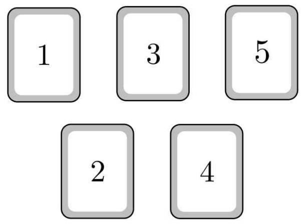
$2\times4! = 48$ $4! = 24$

① 56 ② 60 ③ 64 ④ 68 ⑤ 72



26. 숫자 1, 2, 3, 4, 5가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 있다. 이 5장의 카드를 임의로 일렬로 나열할 때, 홀수가 적힌 카드를 왼쪽부터 홀수의 크기 순서대로 나열하거나 짝수가 적힌 카드를 왼쪽부터 짝수의 크기 순서대로 나열할 확률은? [3점]

A B



$P(A) = \dfrac{\frac{5!}{3!}}{5!} = \dfrac{1}{6}$ $P(B) = \dfrac{\frac{5!}{2!}}{5!} = \dfrac{1}{2}$

$P(A\cap B) = \dfrac{\frac{5!}{3!2!}}{5!} = \dfrac{1}{12}$

$\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{7}{12}$ $\therefore \dfrac{7}{12}$

27. 대한민국 국방부 공무원의 출근시간은 평균이 60.4분, 표준편차가 10분인 정규분포를 따른다고 한다.
어떤 날 출근시간이 64분 이상인 공무원 중 50%, 64분 미만인 공무원 중 25%가 자가용을 이용하였고, 나머지 공무원은 다른 교통수단을 이용하였다. 이 날 출근한 공무원들 중 임의로 선택한 1명이 자가용을 이용하였을 확률이 p이고,
국방부 공무원 중 n명을 임의추출하여 구한 출근시간의 표본평균 $\bar{x}$에 대하여 출근시간의 모평균에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이

$$\bar{x}-1.29 \le m \le \bar{x}+1.29$$

일 때, $p \times n$의 값은? (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 0.36)=0.14$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58)=0.99$로 계산한다.) [3점]

① 130 ② 132 ③ 134 ④ 136 ⑤ 138

$X \sim N(60.4,\ 10^2)$, $Z=\dfrac{X-60.4}{10}$

$p = P(X \ge 64) \times \frac{1}{2} + P(X<64) \times \frac{1}{4}$

$= P(Z \ge 0.36) \times \frac{1}{2} + \{1-P(Z \ge 0.36)\} \times \frac{1}{4}$

$= 0.18 + 0.16$

$= 0.34$

$1.29 = 2.58 \times \dfrac{10}{\sqrt{n}}$, $n=400$.

$126-(27+45)$

$=126-72$

$=26+28=54$

28. 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow X$의 개수는? [4점] 54

(가) 3 이하의 자연수 x에 대하여
$f(x)f(x+1)$이 짝수가 되도록 하는 x가 존재하고,
$f(x)f(x+1)$이 홀수가 되도록 하는 x가 존재한다.
(나) 4 이하의 모든 자연수 x에 대하여
$f(x) \ge f(x+1)$이다.

$f(1) \ge f(2) \ge f(3) \ge f(4) \ge f(5)$: ${}_5H_5 = {}_9C_4 = 126.$

• $f(1)f(2)$, $f(2)f(3)$, $f(3)f(4)$가 모두 홀수인 경우

$f(1), f(2), f(3), f(4)$가 모두 홀수

f(5) 결정

$f(4)=1 \longrightarrow {}_3H_3 \times 1 = 10$

공역의 원소 1, 3, 5를 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응.

$f(4)=3 \longrightarrow {}_2H_3 \times 3 = 12$

$f(4)=5 \longrightarrow {}_1H_3 \times 5 = 5.$

27

• $f(1)f(2)$, $f(2)f(3)$, $f(3)f(4)$가 모두 짝수인 경우

기준

$f(1) \ge f(2) \ge f(3) \ge f(4)$

f(5) 결정

$f(1)$: 5, 4, 3, 2 / $f(2)$: 2 / $f(3)$: 2 → $f(4)$: $1 \rightarrow 4\times1$, $2 \rightarrow 4\times2$; $f(3)$: 1

12

$f(1)$: 4 / $f(2)$: 3 / $f(3)$: 2 → $f(4)$: $1 \rightarrow 1\times1$, $2 \rightarrow 1\times2$

3

$f(1)$: 5, 4 / $f(2)$: 4 / $f(3)$: 4 → $f(4)$: $4 \rightarrow 2\times4$, $3 \rightarrow 2\times3$, $2 \rightarrow 2\times2$, $1 \rightarrow 2\times1$; $f(3)$: 3 → $2 \rightarrow 2\times2$; $f(3)$: 2 → $2 \rightarrow 2\times2$, $1 \rightarrow 2\times1$; $f(3)$: 1

30

단답형

29. 닫힌구간 $[0, 4]$ 의 모든 실수 값을 가지는 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서

$$f(x)=a(x-1)^2 \quad (a\text{는 양의 상수})$$

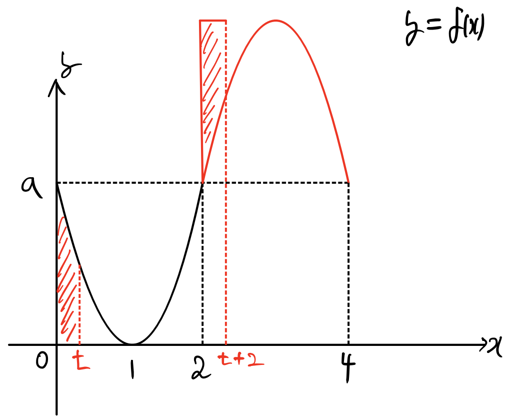
이다. $0 \le t \le 2$ 인 임의의 실수 t와 상수 b에 대하여

$$\mathrm{P}(0 \le X \le t)+\mathrm{P}(2 \le X \le t+2)=bt$$

일 때, $\mathrm{P}(2 \le X \le 4)=c$라 하자. $12(a+b+c)$의 값을 구하시오. [4점]

19

$b=\frac{1}{2}$



$\int_0^4 f(x)dx = 4a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{4}.$

$\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{6}$

$c = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \int_0^2 f(x)dx\right)$

$= \frac{5}{6}.$

30. 공이 6개씩 들어있는 두 주머니 A, B와 동전 2개로 다음 시행을 한다.

> 동전 2개를 동시에 던질 때,
> a 모두 앞면이 나오면 주머니 A에서 1개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣고, $P(a)=\frac{1}{4}$
> b 그렇지 않으면 주머니 B에서 1개의 공을 꺼내어 주머니 A에 넣는다. b_1 : 앞뒤 b_2 : 뒤뒤

$P(b_1)=\frac{1}{2}$ $P(b_2)=\frac{1}{4}$

위의 시행을 4번 반복할 때, 동전의 앞면이 나온 총횟수와 주머니 A에 들어있는 공의 개수가 같아지는 사건을 X라 하자. 3번째 시행에서 사건 X가 일어날 때, 3번째 시행에서만 사건 X가 일어날 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

4

1st	2nd	3rd	4th	P
a	b_1	a 사건X		$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$
b_1	a	a 사건X		$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$
a	a 사건X	b_1 사건X		$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$

1st	2nd	3rd	4th	P
a	b_1	a	a, b_2	$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$
b_1	a	a	a, b_2	$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$
a	a	b_1		$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{2\times\frac{1}{64}}{3\times\frac{1}{32}} = \frac{1}{3}$$

> ＊ 확인 사항
>
> ∘ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ∘ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(미적분) 해설 지수환

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{4n^2+1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

24. 실수 a에 대하여 두 직선 $y=ax+2$, $y=2x+a$가 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$일 때, 모든 a의 값의 합은? [3점]

① $-\frac{5}{3}$ ② -2 ③ $-\frac{7}{3}$ ④ $-\frac{8}{3}$ ⑤ -3

$\left|\frac{a-2}{1+a\cdot 2}\right|=1 \iff a-2=2a+1$ or $2-a=2a+1$.

$\iff a=-3$ or $a=\frac{1}{3}$.

25. 곡선 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$x=\sin(\pi\cos t),\ y=\cos(\pi\cos t)\ \left(\frac{\pi}{2}<t<\pi\right)$$

$\to \cos\alpha = -\frac{1}{3}$

이다. $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 인 실수 α에 대하여 $t=\alpha$일 때,

$\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점]

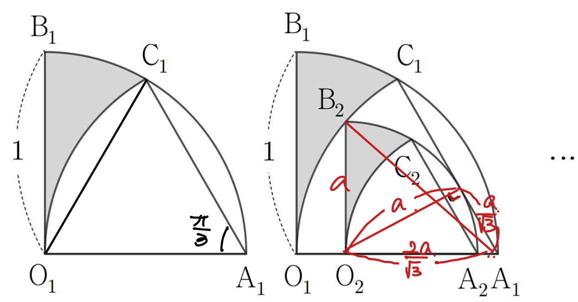
① $-\sqrt{3}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ -1 ④ $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\sqrt{3}$

$$\left.\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right|_{t=\alpha}=\left.\frac{-\sin(\pi\cos t)\cdot(-\pi\sin t)}{\cos(\pi\cos t)\cdot(-\pi\sin t)}\right|_{t=\alpha}=\frac{-\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$$

26. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $O_1A_1B_1$이 있다. 호 A_1B_1 위의 점 C_1을 $\angle O_1A_1C_1=\frac{\pi}{3}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $A_1C_1O_1$을 그린다. 선분 O_1B_1, 호 B_1C_1, 호 O_1C_1로 둘러싸인 부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 O_1A_1 위의 두 점 O_2와 A_2에 대하여 중심이 O_2, 반지름의 길이가 $\overline{O_2A_2}$이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 $O_2A_2B_2$를 호 A_2B_2가 직선 A_1C_1과 접하도록 그린다. 호 A_2B_2 위의 점 C_2를 $\angle O_2A_2C_2=\frac{\pi}{3}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $A_2C_2O_2$를 그린다. 선분 O_2B_2, 호 B_2C_2, 호 O_2C_2로 둘러싸인 부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은? [3점]



R_1 R_2 …

① $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{8}$ ② $\frac{21\sqrt{3}-7\pi}{48}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$

④ $\frac{27\sqrt{3}-9\pi}{48}$ ⑤ $\frac{15\sqrt{3}-5\pi}{24}$

i) $S_1=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{6}-\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}$

ii) $\triangle A_1O_2B_2$: $1^2=a^2+\frac{4}{3}a^2 \Leftrightarrow a^2=\frac{3}{7}$

$$\therefore \frac{\frac{3\sqrt{3}-\pi}{12}}{1-\frac{3}{7}}=\frac{21\sqrt{3}-7\pi}{48}$$

27. 두 함수 $f(x)=e^{2x}$, $g(x)=k\ln x\ (k\neq 0)$이 있다. $-2<t<0$인 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합을 $h(t)$라 하자.

닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 닫힌구간 $[f(t),\ f(t+2)]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값이 같다.

열린구간 $(-2,\ 0)$에서 미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 $h'(-1)$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{4}e^2$ ② $-\frac{1}{2}e^2$ ③ $-e^2$ ④ $-2e^2$ ⑤ $-4e^2$

$f(x)$; 증가함수 → $f(x)$의 최댓값 $= e^{2(t+2)}$

$g(x)$: 증가함수 $(k>0)$ → $g(x)$의 최댓값 $k\ln f(t+2)$ ⋯ ①
감소함수 $(k<0)$ → $g(x)$의 최댓값 $k\ln f(t)$ ⋯ ②

① $k>0$: $e^{2(t+2)} = 2k(t+2)$, ② $k<0$: $e^{2(t+2)} = 2kt$.

$$h(t)=\frac{e^{2(t+2)}}{2(t+2)}+\frac{e^{2(t+2)}}{2t}=\frac{1}{2}e^{2(t+2)}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+2}\right)$$

$$h'(t)=e^{2(t+2)}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t+2}\right)+\frac{1}{2}e^{2(t+2)}\left(-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{(t+2)^2}\right).$$

$$\therefore h'(-1)=e^2\cdot(-1+1)+\frac{1}{2}e^2(-1-1)=-e^2.$$

28. 일차항의 계수가 0이고 최솟값이 음수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 $-2<x<2$에서 정의된 함수

$$g(x)=\sin\{\pi f(2x)\}-2\pi f(x)$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

$f(x)=px^2-q\ (p>0)$

$g'(x)=2\pi f'(2x)\cos\{\pi f(2x)\}-2\pi f'(x)$
$=8\pi px\cos\{\pi f(2x)\}-4\pi px$
$=4\pi px[2\cos\{\pi f(2x)\}-1]$

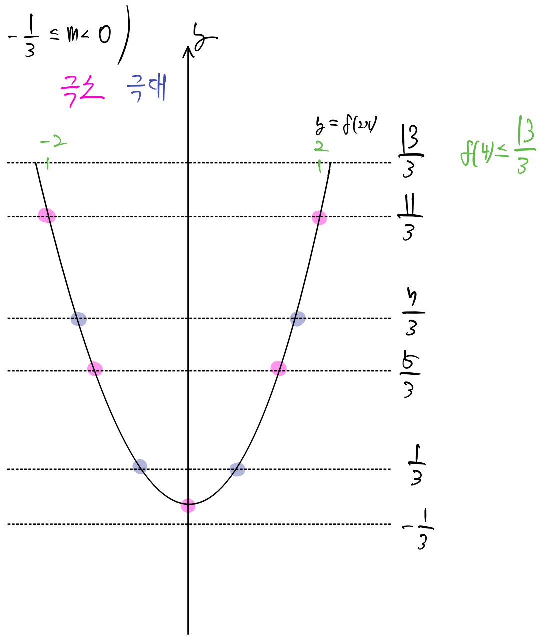
(가) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극대 또는 극소인 $a\ (-2<a<2)$의 개수는 9이다. (나) 함수 $g(x)$가 극대가 되는 x의 개수는 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수보다 많다.

$x\neq 0$인 x에서는 $x=\alpha$에서 극대(소)이면 $x=-\alpha$에서도 극대(소) $(\because g(-x)=g(x))$

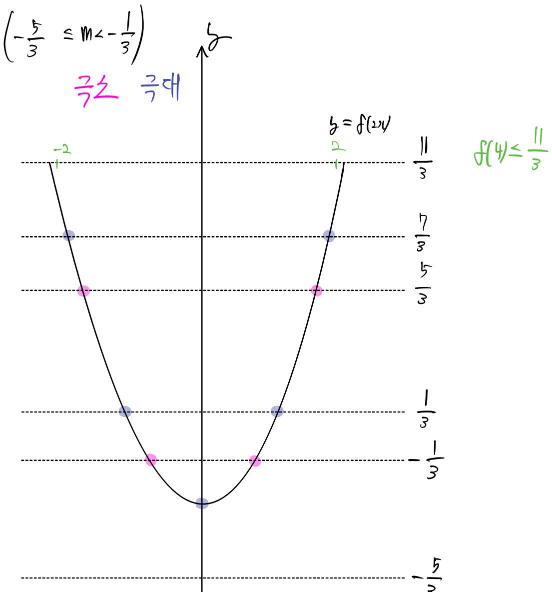
$f(4)$의 최댓값은? [4점]

① $\frac{11}{3}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ 5 ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{19}{3}$

$\left(-\frac{1}{3} \le m < 0\right)$



$\left(-\frac{5}{3} \le m < -\frac{1}{3}\right)$



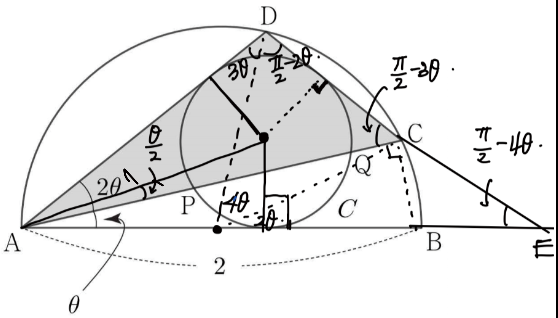
f(4)가 최대일 때에 $m = -\frac{5}{3}$, $f(4) = \frac{11}{3}$

$\therefore f(4) \le \frac{11}{3}$.

단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 반원 위의 두 점 C, D를 $\angle BAC=\theta$, $\angle CAD=2\theta$가 되도록 잡고, 세 선분 AB, CD, AD에 모두 접하는 원 C를 그린다. 선분 AC와 원 C가 만나는 두 점을 P, Q라 하자. 선분 PQ의 길이를 $l(\theta)$, 삼각형 ACD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{l(\theta)}=k$이다. $50k^2$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$)

25 [4점]



$\overline{AD}=2\cos3\theta$, $\overline{AC}=2\cos\theta$.

$\Rightarrow S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdot\sin2\theta=2\cos\theta\cdot\cos3\theta\cdot\sin2\theta$.
$=4\theta$.

$\frac{\overline{DE}}{\sin3\theta}=\frac{\overline{AE}}{\cos\theta}=\frac{\overline{AD}}{\cos4\theta}$: $\overline{AD}=2$, $\overline{AE}=2$, $\overline{DE}=\frac{3}{2}$

$\therefore \cancel{\frac{1}{2}}r\cdot(2+2+6\theta)=\cancel{\frac{1}{2}}\cdot2\cdot2\cdot\sin3\theta$.

$\Leftrightarrow r=\frac{6\theta}{2+3\theta}\approx3\theta$

$4\left(r^2-\left(r\cdot\csc\frac{3}{2}\theta\cdot\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\right)=4r^2\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{32}{9}r^2=\overline{PQ}^2$

$k^2=\lim_{\theta\to0}\frac{(4\theta)^2}{\frac{32}{9}\cdot(3\theta)^2}=\frac{16}{32}$

$\therefore 50\cdot k^2=25$.

30. 실수 전체의 집합에서 도함수가 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이고

$$\ln\{f(x)\}^2+\int_0^x tf(x-t)dt=a \quad (a\text{는 상수})$$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값은 e이고 함수 $F(x)$를

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

라 할 때, $\int_0^a f'(x)\{F(x)\}^2dx=-\frac{2}{9}e^2$이다. $\frac{27}{e}\times af(a)$의 값을 구하시오. [4점] 36

i) $x-t=p$.

$\ln(f(x)^2)+\int_0^x(x-p)\cdot f(p)\cdot dp$

$=\quad〃\quad+x\cdot\int_0^x f(p)dp-\int_0^x pf(p)dp=a$.

ii) (미분)

$\frac{2f'(x)}{f(x)}+\int_0^x f(p)dp=0$. $\Leftrightarrow$ $F(x)=-\frac{2f'(x)}{f(x)}$.

& $f'(0)=0$, $f(0)=e$. $\to a=2$.

iii)

$\int_0^a f'(x)F(x)^2dx=-\frac{1}{2}\int_0^a f(x)F(x)^3dx$

$=-\frac{1}{8}F(x)^4\Big]_0^a=-\frac{1}{8}F(a)^4=-\frac{2}{9}e^2$.

$\therefore F(a)^4=\frac{16}{9}e^2$. $\therefore F(a)^2=\frac{4}{3}e$. $\cdots$ (i)

(부분적분)

$f(x)F(x)^2\Big]_0^a-\int_0^a f(x)\cdot2F(x)\,dx$

$=f(a)F(a)^2+2\int_0^a 2f(x)f'(x)dx=f(a)F(a)^2+2f(a)^2-2e^2$

$\therefore f(a)F(a)^2+2f(a)^2=\frac{16}{9}e^2$ $\cdots$ (ii)

(i, ii), $f(a)=t$: $2t^2+\frac{4}{3}et-\frac{16}{9}e^2=0$ $\quad(t-\frac{2}{3}e)(2t+\frac{8}{3}e)=0$

$\therefore t=\frac{2}{3}e$. $\quad\frac{27}{e}\times a f(a)=\frac{27}{e}\cdot\frac{2e}{3}\cdot2=36$

※ 확인 사항

◦ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

◦ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

수학 영역(기하) by 김익성T.

5지선다형

23. 좌표공간 위의 두 점 A$(1,\ a,\ 2)$, B$(1,\ 1,\ b)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표가 $(1,\ 2,\ 3)$일 때, $a+b$의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$a=3$ $b=4$

24. 좌표평면 위의 점 A$(1,\ 1)$을 지나는 직선 l의 방향벡터를 $\vec{d}$라 할 때, $\vec{d}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 3)$이다. 직선 l의 ~~x~~ y절편은? [3점]

$\vec{d}=(1,2)$

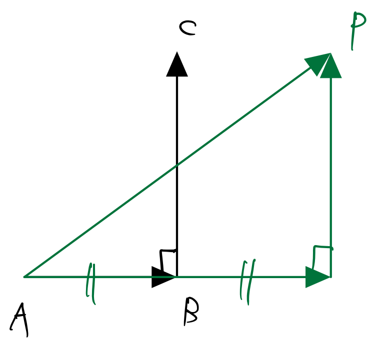
$l : y=2(x-1)+1$

$l_y=-3$.

25. 좌표평면 위에 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3$이고 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$인 세 점 A, B, C와 점 P가 있다. 점 P가

$$\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

를 만족시킬 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$의 값은? [3점]



$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})$

$=25-8$

$=17$

26. 좌표공간 위의 구

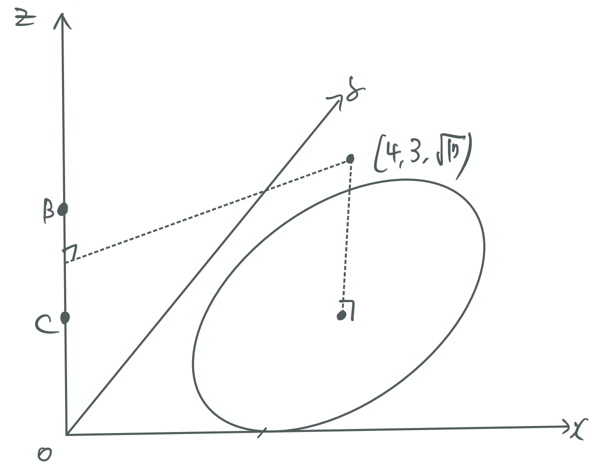
$$x^2+y^2+z^2-8x-6y-2az+a^2-1=0 \quad (a>0)$$

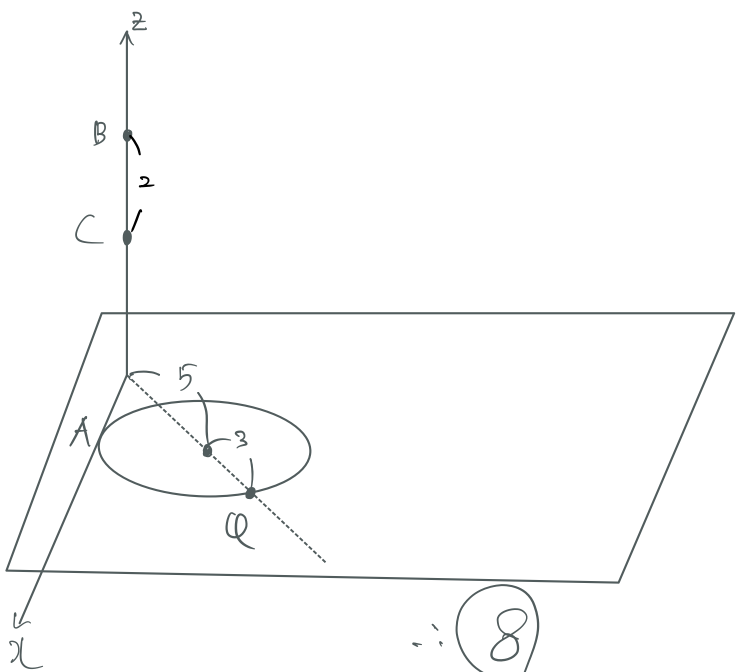
이 x축과 한 점 A에서 만나고 z축과 두 점 B, C에서 만날 때, 이 구가 xy평면과 만나서 생기는 원 위의 점 P에 대하여 삼각형 BCP의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 하자.

△BCQ 넓이는?

$(x-4)^2+(y-3)^2+(z-a)^2=26$

$(4,0,0)$ $(4,3,a)$ 거리 $=\sqrt{a^2+9}=\sqrt{26}$



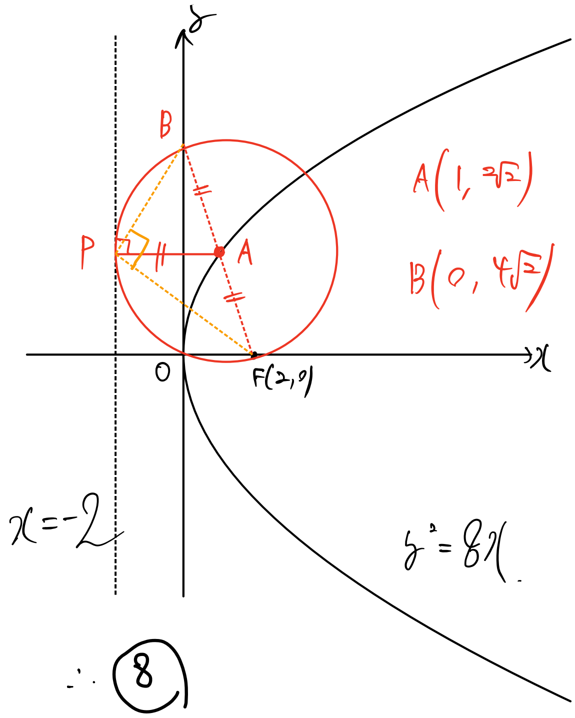


∴ 8

27. 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 P라 할 때, y축 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다.

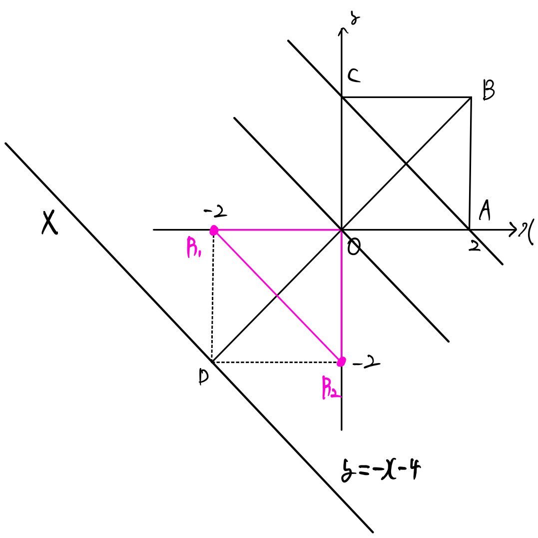
> (가) $\overline{AP}=\overline{AB}$
> (나) $\overline{FP}\perp\overline{PB}$

원점 O와 점 B를 두 초점으로 하고 점 F를 지나는 타원의 장축의 길이는? [3점]



∴ 8

BX 길이 최대 ⇐ OR 길이 최대



28. 좌표평면 위의 세 점 A(2, 0), B(2, 2), C(0, 2)를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 변 위를 움직이는 점 P와 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위를 움직이는 점 Q에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{BQ}$ $=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OQ}$
> (나) 삼각형 ACX의 무게중심은 직선 $y=-x$ 위에 있다.

G

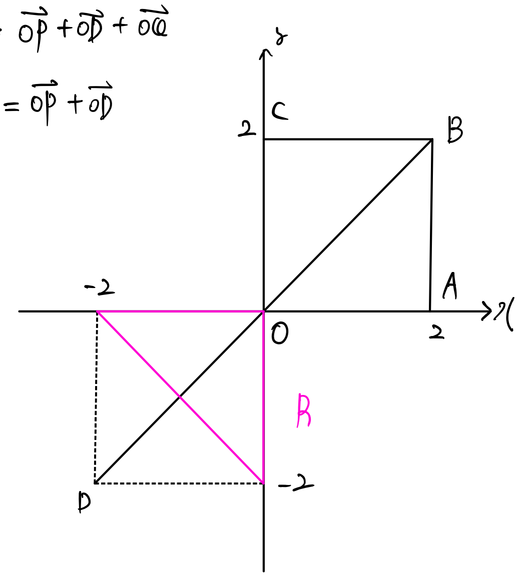
선분 BX의 길이의 최댓값이 $5\sqrt{2}$일 때, r의 값은? [4점]

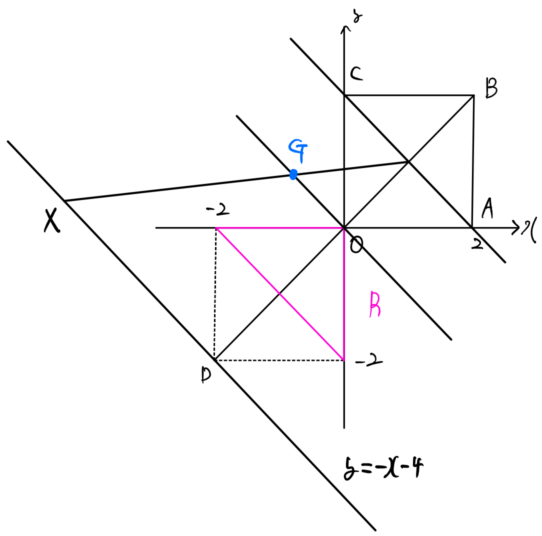
① 3　② $\sqrt{10}$　③ $\sqrt{11}$　④ $2\sqrt{3}$　⑤ $\sqrt{13}$

$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$ 인 점 D(-2, -2)

$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OQ}$

$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OD}$





X는 R을 중심으로 하고 반지름 길이가 r인 원 위의 점이면서 직선 y=-x-4 위의 점.

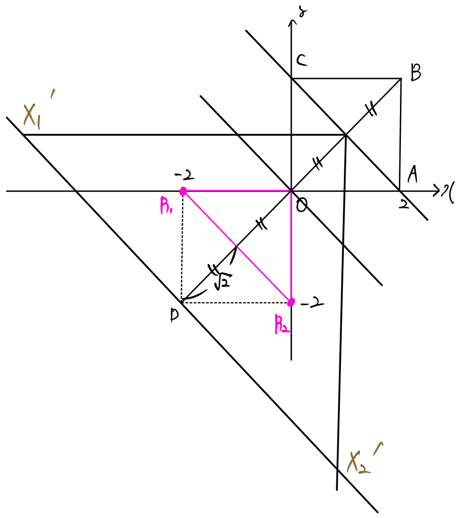
BX 길이 최대일 때의 X=X′

$\overline{BX'}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DX'}^2$

$= 32 + \overline{DX'}^2$

$= 50.$

$\overline{DX'} = 3\sqrt{2}$



$\therefore r^2 = \overline{X_1'B_1}^2 = \overline{X_2'B_2}^2 = 10.$

단답형

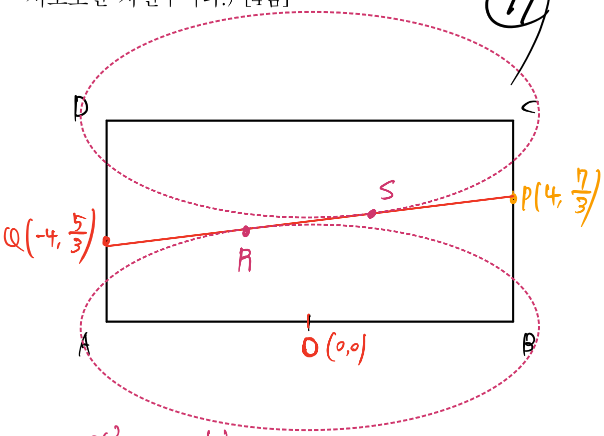
29. $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=4$, $\overline{AD}\perp\overline{CD}$인 직사각형 ABCD의 둘레 위의 점 P가 $\overline{AP}-\overline{BP}=6$을 만족시킬 때, 직사각형 ABCD의 둘레 위의 점 Q에 대하여 다음 조건을 만족시키는 선분 PQ 위의 두 점 R, S가 있다.

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ 위의 점

$\overline{AR}+\overline{BR}$와 $\overline{CS}+\overline{DS}$는 동일한 최솟값 m을 갖는다.

$m=\frac{q}{p}\sqrt{29}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

77



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-16}=1$$

$$y=\frac{x}{12}+\sqrt{\frac{a^2}{12^2}+a^2-16}$$

$$\frac{7}{3}=\frac{4}{12}+\sqrt{\frac{145}{144}a^2-16}$$

$$\frac{4\cdot 12\cdot 2}{8\sqrt{3}}$$

$$a^2=\frac{144\times 4}{29}$$

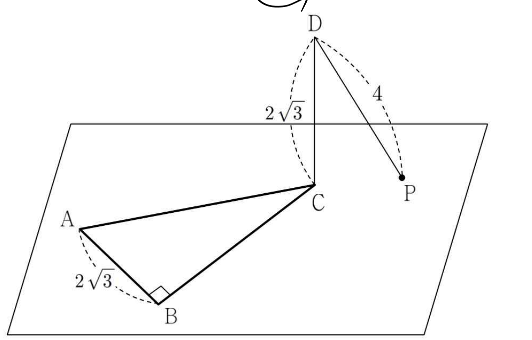
$$m=2a=\frac{48}{29}\sqrt{29}$$

30. 좌표공간 위의 삼각형 ABC가 $\overline{AB}\perp\overline{BC}$를 만족시킨다. 점 C를 지나고 평면 ABC와 수직인 직선 위의 점 D에 대하여 $\overline{AB}=\overline{CD}=2\sqrt{3}$이고, 평면 ABC 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

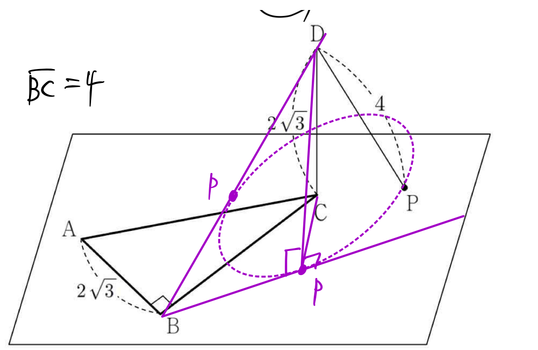
(가) $2\le\overline{BP}\le 6$
(나) $\overline{DP}=4$
(다) $\angle BPD=\frac{\pi}{2}$

사면체 ACPD의 부피의 최솟값은 m이고 이때 평면 ACD와 평면 ADP가 이루는 예각의 크기 θ에 대하여 $\tan\theta=k$라 하자. $162mk^2$의 값을 구하시오. [4점]

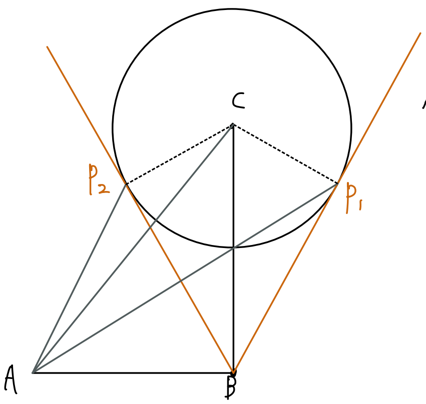
80



$\overline{BC}=4$

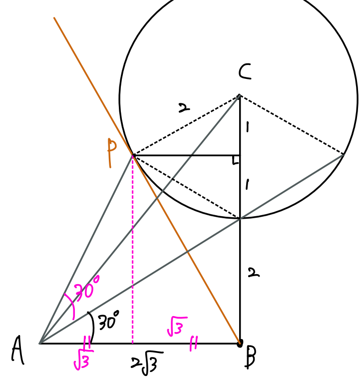


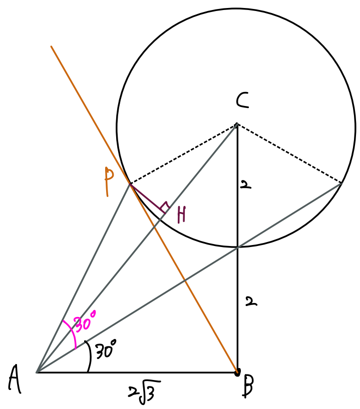
※ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.



$\triangle AP_1C > \triangle AP_2C$ 이므로

사면체 ACPD의 부피가 최소일 때의 $P = P_2$ 이다.





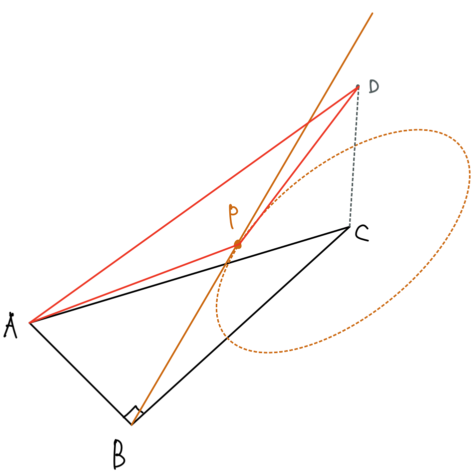
$\angle APB + \angle CPB = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$

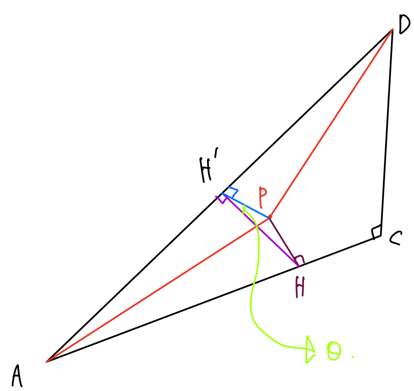
$\triangle APC = \frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{PC} \times \sin\frac{5}{6}\pi$

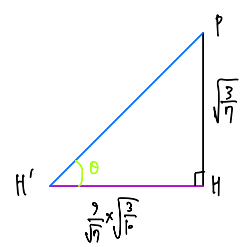
$= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{PH}$ $\therefore \overline{PH} = \sqrt{\frac{3}{7}}$.

$\therefore m = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{PH} \times 2\sqrt{3}$

$= 2$.







$\overline{CH} = \frac{5}{7}\sqrt{7}$

$\overline{AH} = \frac{9}{7}\sqrt{7}$

$\therefore \tan\theta = \frac{\sqrt{10}}{9}$.