[수학2] [05정적분의활용] 교사평경 최근 3개년

04 수2 09 정적분의 활용

01 정적분과 넓이

01 정적분과 넓이1 (정적분의 기하적 의미)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 13

1. 두 양수 a, b $(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-a)(x-b)$라 하자.

$$\int_0^a f(x)dx=\frac{11}{6},\quad \int_0^b f(x)dx=-\frac{8}{3}$$

일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

04 수2 09 정적분의 활용

01 정적분과 넓이

02 정적분과 넓이2 (그래프 조건)

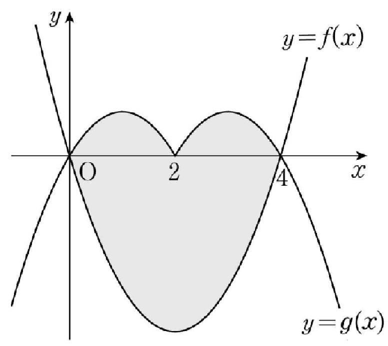
[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 7

2. 두 함수

$$f(x)=x^2-4x,\quad g(x)=\begin{cases}-x^2+2x & (x<2)\\ -x^2+6x-8 & (x\ge 2)\end{cases}$$

의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{40}{3}$ ② 14 ③ $\frac{44}{3}$ ④ $\frac{46}{3}$ ⑤ 16



04 수2 09 정적분의 활용

01 정적분과 넓이

03 정적분과 넓이3 (그래프 그리기)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 17

3. 곡선 $y=-x^2+4x-4$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $12S$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 18

4. 곡선 $y=x^3+2x$와 y축 및 직선 $y=3x+6$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

04 수2 09 정적분의 활용

01 정적분과 넓이

04 정적분과 넓이4 (포물선의 넓이공식)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 10

5. 양수 a에 대하여 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{a^3}{12}$ ② $\frac{a^3}{8}$ ③ $\frac{a^3}{6}$

④ $\frac{a^3}{4}$ ⑤ $\frac{a^3}{3}$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 27

6. 곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 6

7. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04 수2 09 정적분의 활용

01 정적분과 넓이

05 정적분과 넓이5 (중근관련)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 13

8. 곡선 $y=x^3-2x^2$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

04 수2 09 정적분의 활용

01 정적분과 넓이

08 정적분과 넓이8 (함수결정 후 넓이)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

9. 양수 a와 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq x < 1$일 때, $f(x) = 2x^2 + ax$이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = f(x) + a^2$이다.

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 직선 $x = 3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 20

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(0) = 0$이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(1-x) = -f(1+x)$를 만족시킨다. 두 곡선 $y = f(x)$와 $y = -6x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 할 때, $4S$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 20

11. 상수 $k(k < 0)$에 대하여 두 함수

$$f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad g(x) = 4|x| + k$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때, 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하자. $30 \times S$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 25

12. 세 집합 A, B, C는

$$A=\left\{(2+2\cos\theta,\ 2+2\sin\theta)\,\middle|\, -\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3}\right\},$$

$$B=\left\{(-2+2\cos\theta,\ 2+2\sin\theta)\,\middle|\, \frac{2\pi}{3}\le\theta\le\frac{4\pi}{3}\right\},$$

$$C=\left\{(a,\ b)\,\middle|\, -3\le a\le 3,\ b=2\pm\sqrt{3}\right\}$$

이다. 좌표평면에서 집합 $A\cup B\cup C$의 모든 원소가 나타내는 도형을 X라 하고, 도형 X와 곡선 $y=-\sqrt{3}x^2+2$가 만나는 점의 y좌표를 c라 하자. 집합 X로 둘러싸인 부분의 넓이를 α, 곡선 $y=-\sqrt{3}x^2+2$와 직선 $y=c$로 둘러싸인 부분의 넓이를 β라 하자. $\alpha-\beta=\dfrac{p\pi+q\sqrt{3}}{3}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 정수이다.)

04 수2 09 정적분의 활용

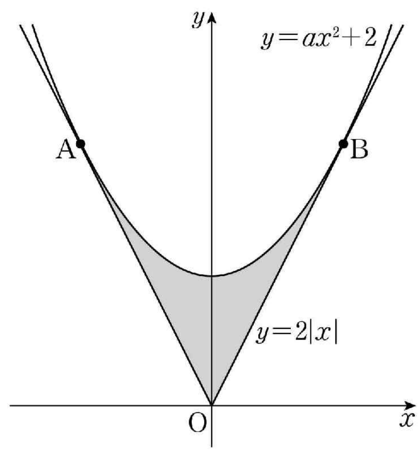
01 정적분과 넓이

09 정적분과 넓이9 (곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 10

13. 그림과 같이 두 함수 $y=ax^2+2$와 $y=2|x|$의 그래프가 두

점 A, B에서 각각 접한다. 두 함수 $y=ax^2+2$와 $y=2|x|$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, a는 상수이다.)



① $\dfrac{13}{6}$ ② $\dfrac{7}{3}$ ③ $\dfrac{5}{2}$

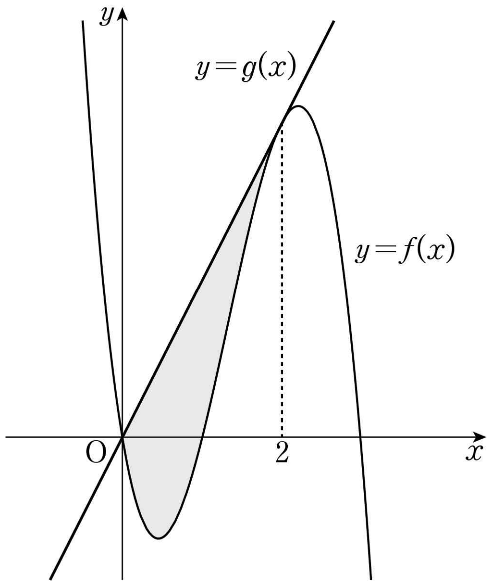
④ $\dfrac{8}{3}$ ⑤ $\dfrac{17}{6}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 9

14. 최고차항의 계수가 -3인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선 $y=g(x)$가 곡선 $y=f(x)$와 원점에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는?

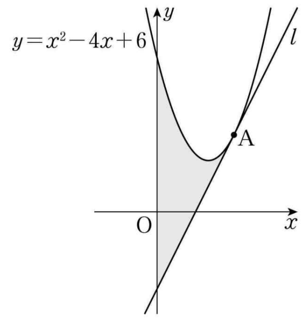
① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4

④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 7

15. 그림과 같이 곡선 $y=x^2-4x+6$ 위의 점 A$(3,\ 3)$에서의 접선을 l이라 할 때, 곡선 $y=x^2-4x+6$과 직선 l및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?



① $\frac{26}{3}$ ② 9 ③ $\frac{28}{3}$

④ $\frac{29}{3}$ ⑤ 10

04 수2 09 정적분의 활용

02 정적분과 넓이의 해석

01 넓이와 해석1 (넓이조건과 관계식)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 20

16. 양의 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{a}x^2 & (-a\le x\le a)\\ 3a & (x\leftarrow a \text{ 또는 } x>a)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 8이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은 S이다. $40S$의 값을 구하시오.

04 수2 09 정적분의 활용

02 정적분과 넓이의 해석

02 넓이와 해석2 (넓이의 Mm)

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 5

17. 곡선 $y=x^2-1$ 위의 점 (t, t^2-1)에서의 접선을 l이라 하자. 곡선 $y=x^2-1$과 직선 l 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이의 최솟값은? (단, $0<t<1$)

① $\dfrac{1}{21}$ ② $\dfrac{1}{18}$ ③ $\dfrac{1}{15}$

④ $\dfrac{1}{12}$ ⑤ $\dfrac{1}{9}$

04 수2 09 정적분의 활용

02 정적분과 넓이의 해석

03 넓이와 해석3 (넓이로 정의된 함수)

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 10

18. 함수

$$f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & (x\le 0)\\ -(x-2)^2+8 & (x>0)\end{cases}$$

이 있다. 실수 $m\ (m<4)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx+4$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $h(m)$이라 할 때, $h(-2)+h(1)$의 값은?

① 75 ② 78 ③ 81
④ 84 ⑤ 87

04 수2 09 정적분의 활용

02 정적분과 넓이의 해석

04 넓이와 해석4 (넓이가 같을 조건)

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 18

19. 두 함수 $f(x)=x^4(x-a)$, $g(x)=k(x-1)(x-b)$의 그래프가 직선 $y=x-1$에 접한다. 함수 $f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 함수 $g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같을 때, 세 상수 a, b, k에 대하여 abk의 값은? (단, $b>1$)

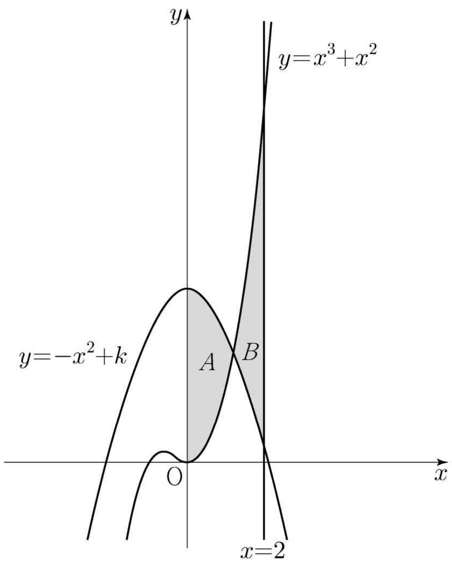
① $-2-\sqrt{5}$ ② $-1-\sqrt{5}$ ③ $-\sqrt{5}$
④ $1-\sqrt{5}$ ⑤ $2-\sqrt{5}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

20. 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 두 곡선 $y=x^3+x^2$, $y=-x^2+k$와 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=B$일 때, 상수 k의 값은? (단, $4<k<5$)

① $\frac{25}{6}$　② $\frac{13}{3}$　③ $\frac{9}{2}$

④ $\frac{14}{3}$　⑤ $\frac{29}{6}$



04 수2　09 정적분의 활용

02 정적분과 넓이의 해석

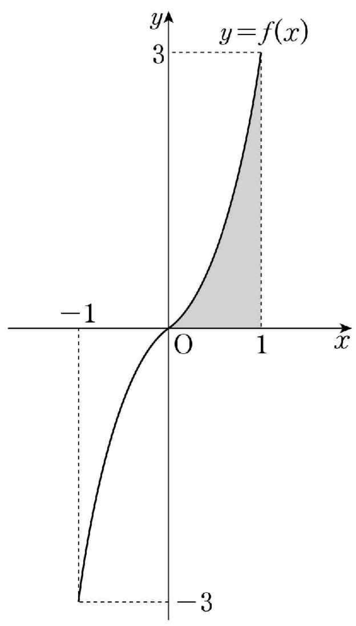
05 넓이와 해석5 (함수의 대칭성)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 30

21. 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 정의된 연속함수 $f(x)$는 정의역에서 증가하고 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$가 성립할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $g(x)=f(x)$이다.
(나) 닫힌구간 $[2n-1, 2n+1]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $2n$만큼, y축의 방향으로 $6n$만큼 평행이동한 그래프이다. (단, n은 자연수이다.)

$f(1)=3$이고 $\int_0^1 f(x)dx=1$일 때, $\int_3^6 g(x)dx$의 값을 구하시오.



[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 8

22. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은?

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$

④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

04 수2 09 정적분의 활용

03 속도와 거리

01 속도와 거리1 (위치, 위치조건)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 15

23. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=-4t+5$$

이다. 시각 $t=3$에서 점 P의 위치가 11일 때, 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는?

① 11 ② 12 ③ 13

④ 14 ⑤ 15

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 12

24. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2t+3,\quad v_2(t)=at(6-t)$$

이다. 시각 $t=3$에서 두 점 P, Q가 만날 때, a의 값은? (단, a는 상수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 10

25. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=4t-10$$

이다. 점 P의 시각 $t=1$에서의 위치와 점 P의 시각 $t=k(k>1)$에서의 위치가 서로 같을 때, 상수 k의 값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 19

26. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=3t^2-4t+k$이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 20

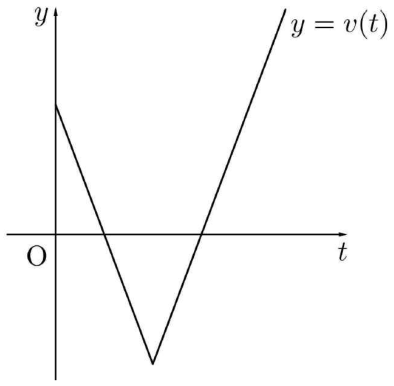
27. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 속도는

$$v(t) = |at - b| - 4\ (a > 0,\ b > 4)$$

이다. 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리를 $s(k)$, 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P의 위치의 변화량을 $x(k)$라 할 때, 두 함수 $s(k)$, $x(k)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq k < 3$이면 $s(k) - x(k) < 8$이다.
(나) $k \geq 3$이면 $s(k) - x(k) = 8$이다.

시간 $t=1$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.)



[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 18

28. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3t^2 + 6t - a$$

이다. 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치가 6일 때, 상수 a의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 10

29. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 3(t-2)(t-a)\ (a > 2\text{인 상수})$$

이다. 점 P의 시각 $t=0$에서의 위치는 0이고, $t > 0$에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간은 한 번뿐이다. $v(8)$의 값은?

① 27　② 36　③ 45　④ 54　⑤ 63

[출처] 2022 모의_공공 경찰대 고3 07월 2

30. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_{\mathrm{P}}(t)=3t^2+2t-4,\ v_{\mathrm{Q}}(t)=6t^2-6t$$

이다. 출발한 후 두 점 P, Q가 처음으로 만나는 위치는?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

04 수2 09 정적분의 활용

03 속도와 거리

02 속도와 거리2 (속도, 가속도 조건)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 14

31. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 가속도가

$$a(t)=3t^2-12t+9\,(t \geq 0)$$

이고, 시각 $t=0$에서의 속도가 k일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 구간 $(3, \infty)$에서 점 P의 속도는 증가한다.
ㄴ. $k=-4$이면 구간 $(0, \infty)$에서 점 P의 운동 방향이 두 번 바뀐다.
ㄷ. 시각 $t=0$에서 시각 $t=5$까지 점 P의 위치의 변화량과 점 P가 움직인 거리가 같도록 하는 k의 최솟값은 0이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 수2 09 정적분의 활용

03 속도와 거리

03 속도와 거리3 (이동거리)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 26

32. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = -4t + 8$$

일 때, $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 27

33. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t) = 3t^2 - 12t + 9$이다. 점 P가 $t=0$일 때 원점을 출발하여 처음으로 운동 방향을 바꾼 순간의 위치를 A라 하자. 점 P가 A에서 방향을 바꾼 순간부터 다시 A로 돌아올 때까지 움직인 거리를 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 14

34. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = 2t - 6$$

이다. 점 P가 시각 $t=3$에서 $t=k(k>3)$까지 움직인 거리가 25일 때, 상수 k의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 13

35. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t) = t^2 - at \quad (a>0)$$

이다. 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 움직이는 방향이 바뀔 때까지 움직인 거리가 $\frac{9}{2}$이다. 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 17

36. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=12-4t$$

일 때, 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 11

37. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=3t^2-6t,\ v_2(t)=2t$$

이다. 두 점 P, Q가 시각 $t=a(a>0)$에서 만날 때, 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는?

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 3

38. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=at^2+bt\ (a,\ b\text{는 상수})$$

이다. 시각 $t=1$, $t=2$일 때, 점 P의 속도가 각각 15, 20이다. 시각 $t=1$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는?

① $\frac{166}{3}$ ② 56 ③ $\frac{170}{3}$
④ $\frac{172}{3}$ ⑤ 58

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 9

39. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=-4t^3+12t^2$$

이다. 시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12일 때, 시각 $t=3k$에서 $t=4k$까지 점 P가 움직인 거리는? (단, k는 상수이다.)

① 23 ② 25 ③ 27
④ 29 ⑤ 31

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 14

40. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\ \ (a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1 |v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0,\ 1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 14

41. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-6t$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 시각 $t=2$에서 점 P가 움직이는 방향이 바뀐다.
ㄴ. 점 P가 출발한 후 움직이는 방향이 바뀔 때 점 P의 위치는 -4이다.
ㄷ. 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 가속도가 12가 될 때까지 움직인 거리는 8이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 9

42. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2+at$$

이다. 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=6$에서의 점 P의 위치가 서로 같을 때, 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는? (단, a는 상수이다.)

① 64 ② 66 ③ 68
④ 70 ⑤ 72

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 11

43. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=2-t, \quad v_2(t)=3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는?

① 16 ② 18 ③ 20
④ 22 ⑤ 24

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 19

44. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=4t^3-48t$$

이다. 시각 $t=k(k>0)$에서 점 P의 가속도가 0일 때, 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. (단, k는 상수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

45. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$와 가속도 $a(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $0 \leq t \leq 2$일 때, $v(t) = 2t^3 - 8t$이다.
(나) $t \geq 2$일 때, $a(t) = 6t + 4$이다.

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 10

46. 수직선 위의 점 A(6)과 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 이 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 시각 $t(t \geq 0)$에서의 점 P의 속도 $v(t)$를

$$v(t) = 3t^2 + at \quad (a > 0)$$

이라 하자. 시각 $t=2$에서 점 P와 점 A사이의 거리가 10일 때, 상수 a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

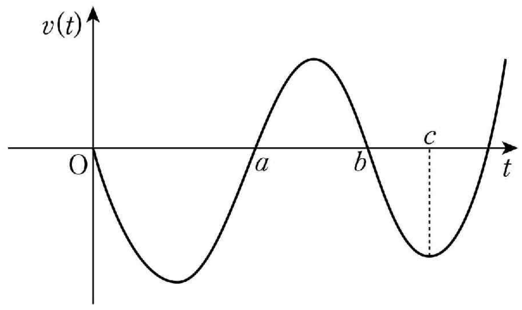
04 수2 09 정적분의 활용

03 속도와 거리

04 속도와 거리4 (그래프)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 15

47. 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$의 그래프가 그림과 같다.



점 P가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꿀 때의 위치는 -8이고 점 P의 시각 $t=c$에서의 위치는 -6이다. $\int_0^b v(t)dt = \int_b^c v(t)dt$일 때, 점 P가 $t=a$부터 $t=b$까지 움직인 거리는?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[수학2] [05정적분의활용] 교사평경 최근 3개년(빠른 정답)

년도별경향 2022.12.28

1. [정답] ②
2. [정답] ①
3. [정답] 32
4. [정답] 10
5. [정답] ③

6. [정답] 36
7. [정답] ④
8. [정답] ②
9. [정답] 17
10. [정답] 2

11. [정답] 80
12. [정답] 34
13. [정답] ④
14. [정답] ③
15. [정답] ②

16. [정답] 290
17. [정답] ④
18. [정답] ③
19. [정답] ②
20. [정답] ④

21. [정답] 41
22. [정답] ①
23. [정답] ④
24. [정답] ①
25. [정답] ③

26. [정답] 6
27. [정답] 14
28. [정답] 16
29. [정답] ②
30. [정답] ④

31. [정답] ④
32. [정답] 10
33. [정답] 8
34. [정답] ③
35. [정답] ③

36. [정답] 20
37. [정답] ②
38. [정답] ③
39. [정답] ③
40. [정답] ③

41. [정답] ⑤
42. [정답] ①
43. [정답] ⑤
44. [정답] 80
45. [정답] 17

46. [정답] ④
47. [정답] ③

[수학2] [05정적분의활용] 교사평경 최근 3개년(해설)

년도별경향 2022.12.28

1) [정답] ②

[해설]

함수 $f(x)=(x-a)(x-b)$에 대하여

곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_a^b |f(x)|dx &= -\int_a^b f(x)dx \\ &= -\left(\int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx\right) \\ &= -\left(-\frac{8}{3}-\frac{11}{6}\right) \\ &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

2) [정답] ①

[해설]

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분에서 $0\le x\le 2$인 부분과 $2\le x\le 4$인 부분의 넓이가 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^4 \{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=2\int_0^2 (-2x^2+6x)dx$$

$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_0^2=\frac{40}{3}$$

3) [정답] 32

[해설]

곡선 $y=-x^2+4x-4$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_0^2 |-x^2+4x-4|dx$$

$$=\int_0^2 (x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_0^2=\frac{8}{3}$$

따라서 $12S=32$

4) [정답] 10

[해설]

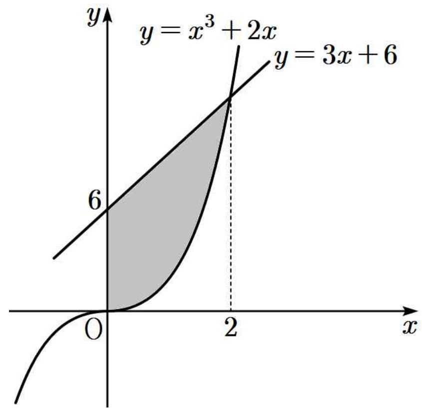
$x^3+2x=3x+6$에서

$x^3-x-6=0$

$(x-2)(x^2+2x+3)=0$

$\therefore x=2$

곡선 $y=x^3+2x$와 직선 $y=3x+6$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2 \{3x+6-(x^3+2x)\}dx$$

$$=\int_0^2 (-x^3+x+6)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_0^2$$

$$=-4+2+12$$

$$=10$$

5) [정답] ③

[해설]

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=ax$의 교점의 좌표는 방정식 $x^2=ax$에서

$(0,\ 0)$, $(a,\ a^2)$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned}\int_0^a |ax-x^2|dx &= \left[\frac{a}{2}x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^a \\ &= \frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3} \\ &= \frac{a^3}{6}\end{aligned}$$

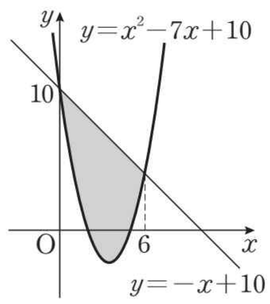
6) [정답] 36

[해설]

곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$이 만나는 점의 x좌표는 $x^2-7x+10=-x+10$에서

$x^2-6x=0,\ x(x-6)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=6$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^6\{(-x+10)-(x^2-7x+10)\}dx$$

$$=\int_0^6(-x^2+6x)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_0^6$$

$$=36$$

7) [정답] ④

[해설]

곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$의 교점을 구하면

$3x^2-x=5x,\ 3x(x-2)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 2

즉 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$으로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_0^2\{5x-(3x^2-x)\}dx$$

$$=\int_0^2(6x-3x^2)dx$$

$$=\left[3x^2-x^3\right]_0^2$$

$$=12-8$$

$$=4$$

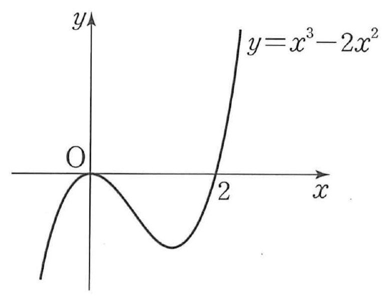
8) [정답] ②

[해설]

$y=x^3-2x^2$

$=x^2(x-2)$

곡선 $y=x^3-2x^2$은 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2|x^3-2x^2|dx$$

$$=\int_0^2(-x^3+2x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$$

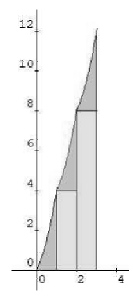
$$=-4+\frac{16}{3}$$

$$=\frac{4}{3}$$

9) [정답] 17

[해설]

연속이므로 $f(1)=\lim_{x\to1}f(x)$즉 $2+a=a^2$에서



$a=2$

$y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$S=3\int_0^1(2x^2+2x)dx+12$$

$$=3\left[\frac{2}{3}x^3+x^2\right]_0^1+12$$

$$=5+12=17$$

10) [정답] 2

[해설]

$f(1-x)=-f(1+x)$에 $x=0,\ x=1$을 각각 대입하면

$f(1)=-f(1)$에서 $f(1)=0,\ f(0)=-f(2)$에서 $f(2)=0$

삼차함수 $f(x)$는 $f(0)=f(1)=f(2)=0$이고 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=x(x-1)(x-2)$

방정식 $f(x)=-6x^2$에서 $x^3+3x^2+2x=0$이므로

$x(x+1)(x+2)=0,\ x=0$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=-2$

$-2\le x\le-1$ 에서 $x^3+3x^2+2x\ge0$이고

$-1 \le x \le 0$ 에서 $x^3+3x^2+2x \le 0$이므로

$S=\int_{-2}^{0}|x^3+3x^2+2x|dx$

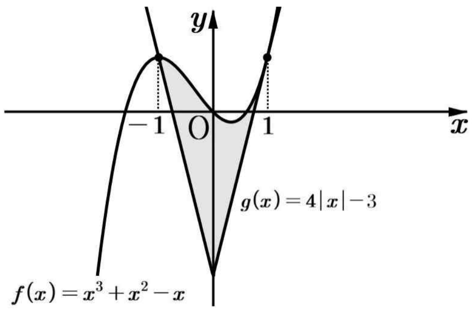
$=\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2+2x)dx+\int_{-1}^{0}\{-(x^3+3x^2+2x)\}dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3+x^2\right]_{-2}^{-1}+\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3-x^2\right]_{-1}^{0}=\frac{1}{2}$

따라서 $4S=2$

11) [정답] 80

[해설]



두 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때,

$x>0$에서 $f(x)$와 $g(x)$는 접하고 $x<0$에서 만난다.

$x \ge 0$일 때, $g(x)=4x+k$이므로

$f'(x)=3x^2+2x-1=4$

$(3x+5)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=1$일 때 $(1, 1)$에서 $f(x)$와 $g(x)$는 접한다.

따라서 $g(x)=4x-3$이고 $k=-3$이다.

$x<0$일 때,

$x^3+x^2-x=-4x-3$

$x^3+x^2+3x+3=0$

$(x^2+3)(x+1)=0$

$\therefore$ $x=-1$일 때 $(-1, 1)$에서 $f(x)$와 $g(x)$는 만난다.

따라서 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$S=\int_{-1}^{0}\{(x^3+x^2-x)-(-4x-3)\}dx$

$+\int_{0}^{1}\{(x^3+x^2-x)-(4x-3)\}dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2+3x+3)dx+\int_{0}^{1}(x^3+x^2-5x+3)dx$

$=\int_{-1}^{1}(x^3+x^2+3)dx+\int_{-1}^{0}3xdx+\int_{0}^{1}-5xdx$

$=2\int_{0}^{1}x^2+3dx+\left[\frac{3}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{5}{2}x^2\right]_{0}^{1}$

$=2\left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_{0}^{1}-\frac{3}{2}-\frac{5}{2}$

$=\frac{8}{3}$

$\therefore$ $30\times S=80$

[다른 풀이]

$x^3+x^2-x=4|x|+k$에서

$x^3+x^2-x-4|x|=k$ ······㉠

$h(x)=x^3+x^2-x-4|x|$라 하면

$h(x)=\begin{cases}x^3+x^2-5x & (x\ge 0)\\ x^3+x^2+3x & (x<0)\end{cases}$에서

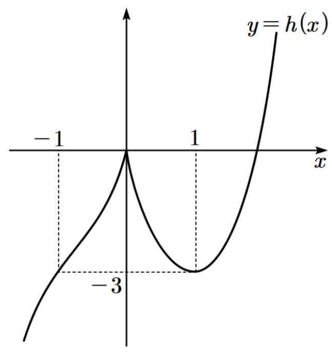
$h'(x)=\begin{cases}3x^2+2x-5 & (x>0)\\ 3x^2+2x+3 & (x<0)\end{cases}$

$3x^2+2x-5=(3x+5)(x-1)$이므로 $h'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$		$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$x=0$에서 극댓값 $h(0)=0$, $x=1$에서 극솟값 $h(1)=-1$을 가지므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음과 같다.



㉠이 서로 다른 두 실근을 가지고 $k<0$이므로 $k=-3$

따라서 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$S=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2+3x+3)dx+\int_{0}^{1}(x^3+x^2-5x+3)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{0}^{1}$

$=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-3\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+3\right)=\frac{8}{3}$

$\therefore$ $30\times S=80$

12) [정답] 34

[해설]

(ⅰ) 집합 $A=\left\{(2+2\cos\theta,\ 2+2\sin\theta)\ \middle|\ -\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3}\right\}$에서

$x=2+2\cos\theta$, $y=2+2\sin\theta$라 하면

$x-2=2\cos\theta$에서 $(x-2)^2=4\cos^2\theta$ ······ ㉠

$y-2=2\sin\theta$에서 $(y-2)^2=4\sin^2\theta$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$(x-2)^2+(y-2)^2=4\left(-\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{3}\right)$

(ⅱ) 집합 $B=\left\{(-2+2\cos\theta,\ 2+2\sin\theta)\ \middle|\ \frac{2\pi}{3}\le\theta\le\frac{4\pi}{3}\right\}$에서

$x=-2+2\cos\theta,\ y=2+2\sin\theta$라 하면

$x+2=2\cos\theta$에서 $(x+2)^2=4\cos^2\theta$ …… ㉢

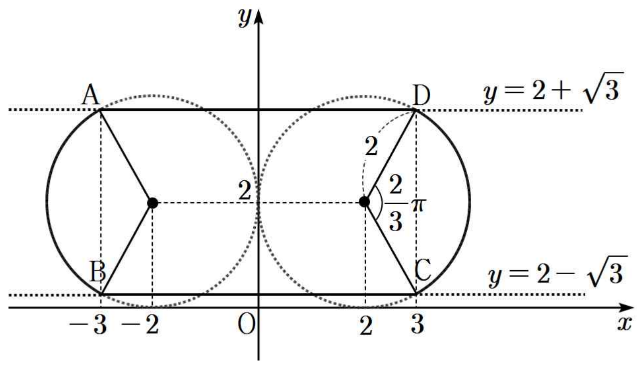
$y-2=2\sin\theta$에서 $(y-2)^2=4\sin^2\theta$ …… ㉣

㉢+㉣을 하면

$(x+2)^2+(y-2)^2=4\left(\dfrac{2\pi}{3}\le\theta\le\dfrac{4\pi}{3}\right)$

(iii) 집합 $C=\{(a,\ b)\mid -3\le a\le 3,\ b=2\pm\sqrt{3}\}$은 $-3\le x\le 3$에서 직선 $y=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$ 위의 점의 자취를 의미한다.

이상에서 나타내는 집합을 나타내면 다음 그림과 같다.



따라서 집합 $A\cup B\cup C$의 모든 원소가 나타내는 도형 X로 둘러싸인 부분의 넓이 α는

$\alpha=2\times$(활꼴 AB의 넓이)+(사각형 ABCD의 넓이)

$=2\times\left(\dfrac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$

$+6\times\{2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})\}$

$=\dfrac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}+12\sqrt{3}$

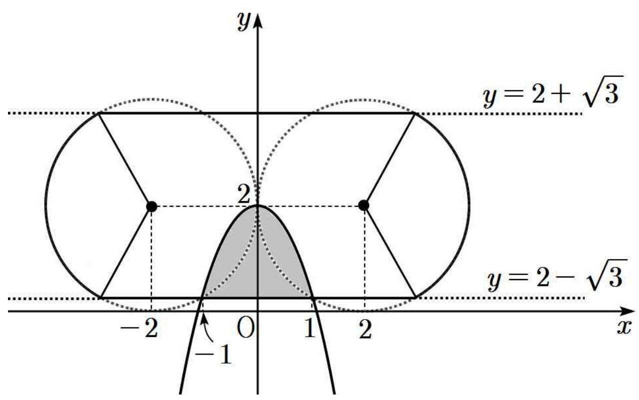
$=\dfrac{8\pi}{3}+10\sqrt{3}$

도형 X와 곡선 $y=-\sqrt{3}x^2+2$가 만나는 점의 y좌표를 c라 하면 $c=2-\sqrt{3}$

$-\sqrt{3}x^2+2=2-\sqrt{3}$에서

$x^2=1 \qquad \therefore x=-1$또는$x=1$

따라서 곡선 $y=-\sqrt{3}x^2+2$와 직선 $y=2-\sqrt{3}$으로 둘러싸인 부분의 넓이 β는 다음 그림과 같다.



넓이 $\beta=\displaystyle\int_{-1}^{1}\{(-\sqrt{3}x^2+2)-(2-\sqrt{3})\}dx$이므로

$\beta=-\sqrt{3}\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx$

$=-2\sqrt{3}\displaystyle\int_{0}^{1}(x^2-1)dx$

$=-2\sqrt{3}\left[\dfrac{1}{3}x^3-x\right]_0^1$

$=-2\sqrt{3}\times\left(\dfrac{1}{3}-1\right)$

$=\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

$\alpha-\beta=\dfrac{8\pi}{3}+10\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\sqrt{3}$

$=\dfrac{8\pi}{3}+\dfrac{26}{3}\sqrt{3}$

따라서 $p=8,\ q=26$이므로

$p+q=8+26=34$

13) [정답] ④

[해설]

$x<0$일 때, 점 A에서 두 함수 $y=ax^2+2$와 $y=-2x$의 그래프가 접하므로 $ax^2+2=-2x$,

즉 $ax^2+2x+2=0$ ……㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-2a=0$

$a=\dfrac{1}{2}$이므로 접점 A의 x좌표는 -2이다.

점 B는 점 A와 y축에 대하여 대칭이므로 접점 B의 x좌표는 2이다.

주어진 두 함수의 그래프가 모두 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$2\times\displaystyle\int_0^2\left(\dfrac{1}{2}x^2+2-2x\right)dx$

$=2\times\left[\dfrac{1}{6}x^3+2x-x^2\right]_0^2=2\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$

14) [정답] ③

[해설]

구하고자 하는 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\displaystyle\int_0^2|f(x)-g(x)|dx$

$=\displaystyle\int_0^2\{g(x)-f(x)\}dx$

$g(x)-f(x)$는 최고차항의 계수가 3이고

삼차방정식 $g(x)-f(x)=0$은 한 실근 0과 중근 2를

가지므로 $g(x)-f(x)=3x(x-2)^2$

따라서 $S=\int_0^2 3x(x-2)^2 dx$

$=\int_0^2 (3x^3-12x^2+12x)dx$

$=\left[\frac{3}{4}x^4-4x^3+6x^2\right]_0^2$

$=12-32+24=4$

15) [정답] ②

[해설]

$f(x)=x^2-4x+6$이라 하면

$f'(x)=2x-4$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A(3, 3)에서의 접선의 기울기가 $f'(3)=2$이므로 접선 l의 방정식은 $y-3=2(x-3)$, $y=2x-3$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^3 \{x^2-4x+6-(2x-3)\}dx$

$=\int_0^3 (x^2-6x+9)dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3=9$

16) [정답] 290

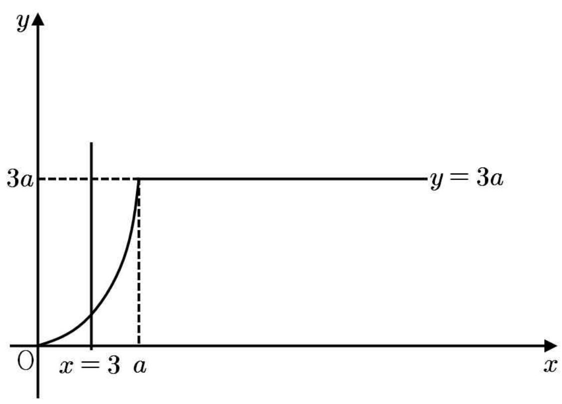
[해설]

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{a}x^2 & (-a \le x \le a) \\ 3a & (x<-a \text{ 또는 } x>a)\end{cases}$$

의 그래프는 y축 대칭함수이므로 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-3$, $x=3$으로 둘러싸인 넓이가 8이면 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 넓이가 4이다.

$x \ge 0$일 때 $y=f(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

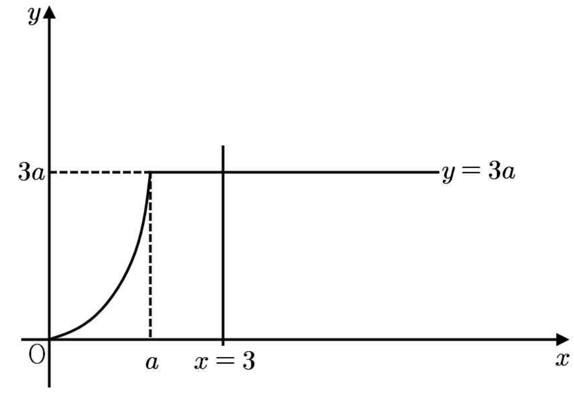
(i) $a \ge 3$일 때



$\int_0^3 \frac{3}{a}x^2 dx=\left[\frac{x^3}{a}\right]_0^3=\frac{27}{a}=4$

$\therefore a=\frac{27}{4}$

(ii) $0<a<3$일 때



$\int_0^a \frac{3}{a}x^2 dx+(3-a)\times 3a$

$=\left[\frac{x^3}{a}\right]_0^a+9a-3a^2$

$=-2a^2+9a$

$=4$

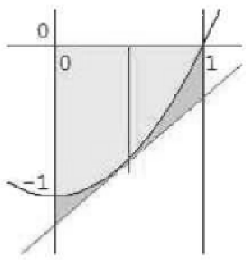
$\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because$ $0<a<3$)

(i), (ii)에 의하여 만족하는 a는 $\frac{27}{4}$, $\frac{1}{2}$이므로 모든 a값의 합 S는 $S=\frac{29}{4}$

$\therefore 40S=40\times\frac{29}{4}=290$

17) [정답] ④

[해설]



그림에서 사다리꼴의 넓이가 최소일 때이므로

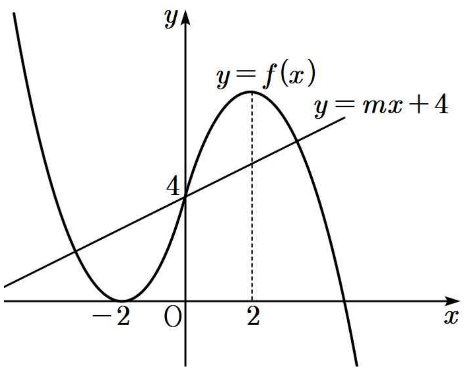
접점이 $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{3}{4}$일 때이다.

따라서 최소 넓이는 $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}=\frac{1}{12}$

18) [정답] ③

[해설]

두 함수 $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & (x \le 0)\\ -(x-2)^2+8 & (x>0)\end{cases}$, $y=mx+4$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



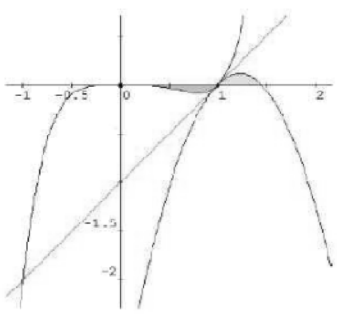
두 함수는 모두 점 $(0, 4)$에 대하여 대칭이므로 $y=mx+4$, $y=(x+2)^2$로 둘러싸인 넓이와 $y=mx+4$, $y=-(x-2)^2+8$로 둘러싸인 넓이가 같다.
따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx+4$로 둘러싸인 부분의 넓이 $h(m)$은 $y=mx+4$, $y=(x+2)^2$로 둘러싸인 넓이의 2배와 같다.
$x^2+4x+4=mx+4$에서
$x^2-(m-4)x=0$
$x=0$ 또는 $x=m-4$
따라서 두 함수 $y=mx+4$, $y=(x+2)^2$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_{m-4}^{0}\{(mx+4)-(x+2)^2\}dx$이므로

$$h(m)=2\times\int_{m-4}^{0}\{(mx+4)-(x+2)^2\}dx$$
$$=2\times\frac{(4-m)^3}{6}$$
$$=\frac{(4-m)^3}{3}$$

$\therefore h(-2)+h(1)=\frac{6^3}{3}+\frac{3^3}{3}=72+9=81$

19) [정답] ②

[해설]



$f(x)$와 $y=x-1$의 접점의 x좌표를 t라 하면
$f'(t)=5t^4-4at^3=1$
$t^5-at^4=t-1$
정리하면
$a=\frac{5t^4-1}{4t^3}=\frac{t^5-t+1}{t^4}$
$t^5+3t-4=0$, $(t-1)(t^4+t^3+t^2+t+4)=0$
$\therefore\ t=1,\ a=1,\ f(x)=x^4(x-1)$
한편 $g(x)$와 $y=x-1$의 접점은 $(1, 0)$이므로
$g'(1)=k(1-b)=1$
이제 두 영역의 넓이에서
$\int_0^1(x^4-x^5)dx=\int_1^b k(x-1)(x-b)dx$
$\frac{1}{30}=\frac{-k(b-1)^3}{6}$, $k(b-1)^3=-\frac{1}{5}$
$k=\frac{1}{1-b}=-\frac{1}{5(b-1)^3}$
$(b-1)^2=\frac{1}{5}$
$\therefore\ b=1+\frac{1}{\sqrt{5}}$, $k=-\sqrt{5}$
따라서 $abk=-1-\sqrt{5}$

20) [정답] ④

[해설]
$A=B$이므로

$$\int_0^2\{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx=0$$

이어야 한다.

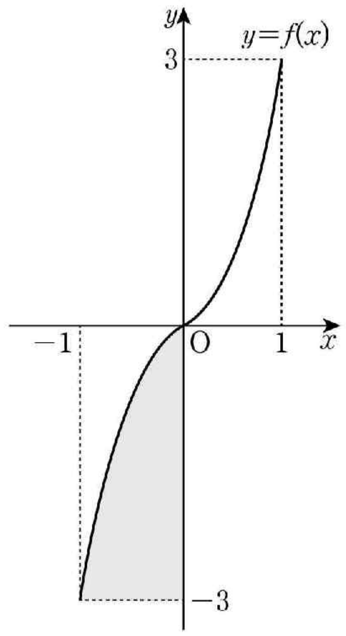
$$\int_0^2\{(x^3+x^2)-(-x^2+k)\}dx=\int_0^2(x^3+2x^2-k)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-kx\right]_0^2$$
$$=4+\frac{16}{3}-2k$$
$$=\frac{28}{3}-2k$$

따라서 $\frac{28}{3}-2k=0$에서

$2k=\frac{28}{3}$, $\quad k=\frac{14}{3}$

21) [정답] 41

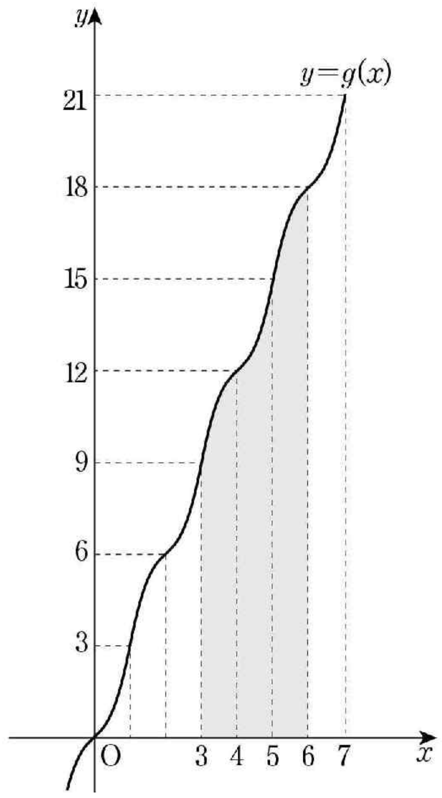
[해설]
문제에서 $\int_0^1 f(x)dx=1$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



그러므로 그림에서 색칠된 영역의 넓이는 $3-1=2$

닫힌구간 $[3,\ 6]$에서 $\int_3^6 g(x)dx=\int_3^6 |g(x)|dx$는

곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=3$, $x=6$으로 둘러싸인 도형의 넓이이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 구하는 영역을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



닫힌구간 $[3,\ 5]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동하고 y축의 방향으로 12만큼 평행이동한 그래프이므로

$\int_3^5 g(x)dx=2\times12=24$

닫힌구간 $[5,\ 7]$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼 평행이동하고 y축의 방향으로 18만큼 평행이동한 그래프이므로

$\int_5^6 g(x)dx=15\times1+2=17$

따라서 $\int_3^6 g(x)dx=\int_3^5 g(x)dx+\int_5^6 g(x)dx=41$

22) [정답] ①

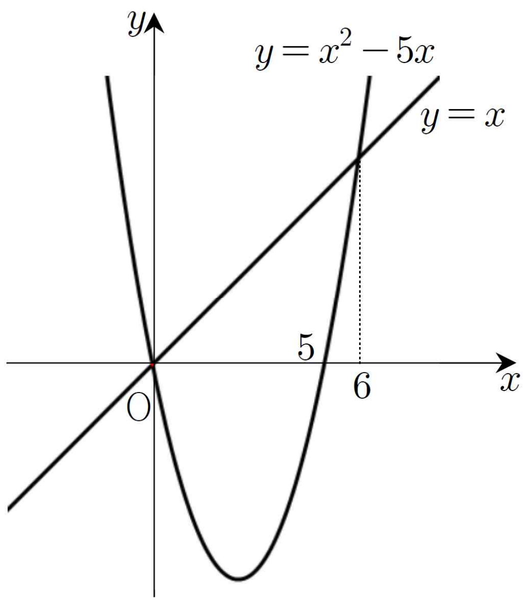
[해설]

$x^2-5x=x$에서

$x(x-6)=0$

$x=0$ 또는 $x=6$

곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$가 만나는 점은 원점과 $(6,\ 6)$이다.



곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_0^6 \{x-(x^2-5x)\}dx=\int_0^6 (6x-x^2)dx$

$=\left[3x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^6$

$=36$

따라서 직선 $x=k$가 넓이를 이등분하므로

$18=\int_0^k \{x-(x^2-5x)\}dx$

$=\int_0^k (6x-x^2)dx$

$=\left[3x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^k$

$=3k^2-\frac{1}{3}k^3$

정리하면

$k^3-9k^2+54=0$

$(k-3)(k^2-6k-18)=0$

즉, $0<k<6$이므로 $k=3$

23) [정답] ④

[해설]

$v(t)=-4t+5$

이므로

점 P의 시각 t에서의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(t)=-2t^2+5t+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $x(3)=11$이므로

$-2\times9+5\times3+C=11$ 에서

$C=14$

따라서

$x(0)=C=14$

24) [정답] ①

[해설]

두 점의 위치는 각각

$x_1(t)=t^2+3t,\ x_2(t)=a\left(3t^2-\frac{1}{3}t^3\right)$

$t=3$일 때 같은 위치이므로 $9+9=a(27-9)$

$\therefore\ a=1$

25) [정답] ③

[해설]

점 P의 시각 $t=1$에서의 위치와

점 P의 시각 $t=k(k>1)$에서의 위치가 서로 같으므로

시각 $t=1$에서 $t=k$까지 점 P의 위치의 변화량은

0이다.

$$\int_1^k v(t)dt=\int_1^k(4t-10)dt$$

$$=\left[2t^2-10t\right]_1^k$$

$$=(2k^2-10k)-(2-10)$$

$$=2k^2-10k+8$$

$$=2(k-1)(k-4)=0$$

따라서 $k=4$

26) [정답] 6

[해설]

시각 t에서의 점 P의 위치를 $S(t)$라 하자.

$v(t)=3t^2-4t+k$이므로

$$S(t)=S(0)+\int_0^t v(t)dt$$

$$=S(0)+\int_0^t(3t^2-4t+k)dt$$

$$=S(0)+\left[t^3-2t^2+kt\right]_0^t$$

$$=S(0)+t^3-2t^2+kt \qquad \cdots\cdots ㉠$$

시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이므로 $S(0)=0,\ S(1)=-3$이다.

㉠에서 $t=1$을 대입하면 $-3=-1+k,\ k=-2$

$\therefore v(t)=3t^2-4t-2$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3 v(t)dt=\int_1^3(3t^2-4t-2)dt$$

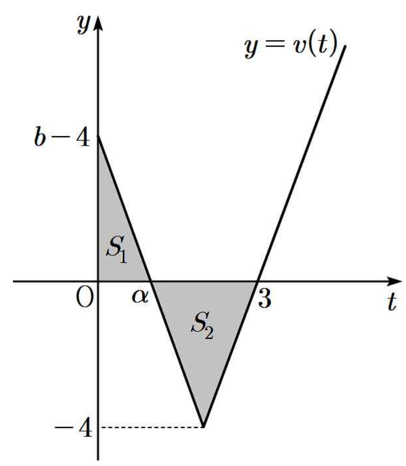
$$=\left[t^3-2t^2-2t\right]_1^3$$

$$=3-(-3)$$

$$=6$$

27) [정답] 14

[해설]



조건 (가), (나)에서 $v(3)=0$이고, 그림과 같이 색칠한 부분의 넓이를 각각 $S_1,\ S_2$라 하면

$s(3)=S_1+S_2,\ x(3)=S_1-S_2$

조건 (나)에서 $s(3)-x(3)=8$이므로

$(S_1+S_2)-(S_1-S_2)=8$

$\therefore S_2=4$

위의 그림에서

$S_2=\frac{1}{2}\times(3-\alpha)\times4=4$

$\therefore \alpha=1$

$v(2)=-4$이므로 $v(t)=|at-b|-4$에서

$v(2)=|2a-b|-4=-4,\ b=2a$

$v(1)=v(3)=0$이므로

$v(1)=|a-b|-4=0$, $|-a|=4$

$\therefore a=4\ (\because\ a>0)$, $b=8$

$v(t)=|4t-8|-4$이므로 $t=1$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^6 v(t)\,dt=-S_2+\int_3^6(4t-12)\,dt$$

$$=-4+\left[2t^2-12t\right]_3^6$$

$$=-4+18=14$$

28) [정답] 16

[해설]

시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

시각 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$x(3)=x(0)+\int_0^3 v(t)dt=\int_0^3(3t^2+6t-a)dt$$

$$=\left[t^3+3t^2-at\right]_0^3=54-3a=6$$

따라서 $a=16$

29) [정답] ②

[해설]

점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 위치를 $x(t)$라 하면

점 P의 시각 $t=0$에서의 위치는 0이므로 $x(0)=0$

$$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)dt$$

$$=\int_0^t 3(t-2)(t-a)dt$$

$$=\int_0^t\{3t^2-3(a+2)t+6a\}dt$$

$$=t^3-\frac{3}{2}(a+2)t^2+6at$$

점 P가 $0<t<2$, $t>a$에서 양의 방향으로,

$2<t<a$에서 음의 방향으로 움직이고

$t>0$에서 점 P의 위치가 0이 되는 순간이

한 번뿐이므로 $x(a)=0$

$a^3-\frac{3}{2}(a+2)a^2+6a^2=0$에서 $a>2$이므로 $a=6$

따라서 $v(8)=3\times 6\times 2=36$

30) [정답] ④

[해설]

두 점 P, Q가 처음으로 만나는 시각을 a라 하면

$t=a(a>0)$에서 두 점의 위치가 같으므로

$$\int_0^a(3t^2+2t-4)\,dt=\int_0^a(6t^2-6t)\,dt$$

$$\left[t^3+t^2-4t\right]_0^a=\left[2t^3-3t^2\right]_0^a$$

$a^3+a^2-4a=2a^3-3a^2$

$a^3-4a^2+4a=0$

$a(a-2)^2=0$

$a>0$이므로 $a=2$일 때 두 점 P, Q가 처음으로 만나고 그 위치는 4이다.

31) [정답] ④

[해설]

$a(t)=3t^2-12t+9$, $v(t)=t^3-6t^2+9t+k$

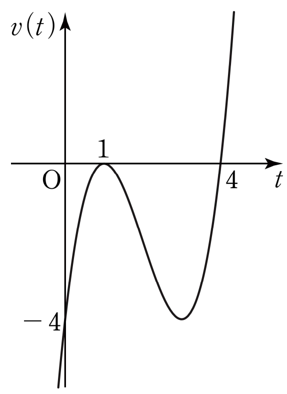
ㄱ. $t>3$이면

$a(t)=3(t-1)(t-3)>0$이므로 $v(t)$는 증가한다. ∴ 참

ㄴ. $k=-4$이면 $v(1)=0$(극댓값)이므로

$v(t)=0$은 그림과 같다.

따라서 점 P의 운동 방향은 한 번 바뀐다. ∴ 거짓



ㄷ. $0\leq t\leq 5$에서 $v(t)\geq 0$이면 된다.

이 구간에서 최솟값은

$v(3)=k$이므로 $k\geq 0$

따라서 k의 최솟값은 0이다.

∴ 참

32) [정답] 10

[해설]

$$\int_0^3|v(t)|dt=\int_0^3|-4t+8|dt$$

$$=\int_0^2(-4t+8)dt+\int_2^3(4t-8)dt$$

$$=\left[-2t^2+8t\right]_0^2+\left[2t^2-8t\right]_2^3$$

$$=8+2=10$$

33) [정답] 8

[해설]

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 속도는 0이므로

$v(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)=0$, $t=1$ 또는 $t=3$

$0\leq t<1$에서 $v(t)>0$

$1<t<3$에서 $v(t)<0$,

$t>3$에서 $v(t)>0$
이므로 점 P는 $t=1$일 때 처음으로 운동 방향을 바꾸고
$t=3$일 때 다시 운동 방향을 바꾼다.
그러므로 점 P가 A에서 방향을 바꾼 순간부터 다시 A로 돌아올 때까지 움직인 거리는 점 P가 $t=1$부터 $t=3$까지 이동한 거리의 2배이다.
따라서 구하는 값은

$$2\int_1^3 |v(t)|dt = 2\int_1^3 (-3t^2+12t-9)dt$$

$$=2\left[-t^3+6t^2-9t\right]_1^3$$

$=8$

[다른 풀이]
점 P가 다시 A로 돌아올 때의 시각을 $t=a$(단, $a>1$)라 하면

$\int_1^a v(t)dt=0$이므로

$$\int_1^a v(t)dt = \int_1^a (3t^2-12t+9)dt$$

$$=\left[t^3-6t^2+9t\right]_1^a$$

$=a^3-6a^2+9a-4$

$=(a-1)^2(a-4)=0$

그러므로 $t=4$일 때 점 P가 다시 A로 돌아온다.
따라서

$$\int_1^4 |v(t)|dt = -\int_1^3 v(t)dt + \int_3^4 v(t)dt$$

$$=-\int_1^3 (3t^2-12t+9)dt + \int_3^4 (3t^2-12t+9)dt$$

$$=-\left[t^3-6t^2+9t\right]_1^3 + \left[t^3-6t^2+9t\right]_3^4$$

$=8$

34) [정답] ③

[해설]
점 P가 시각 $t=3$에서 $t=k(k>3)$까지 움직인 거리는

$\int_3^k |v(t)|dt$이므로

$$\int_3^k |v(t)|dt = \int_3^k |2t-6|dt$$

$$=\int_3^k (2t-6)dt \ (\because k>3)$$

$$=\left[t^2-6t\right]_3^k$$

$$=k^2-9-6(k-3)$$

$$=k^2-6k+9$$

즉, 조건에서 움직인 거리가 25이므로

$k^2-6k+9=25$, $k^2-6k-16=0$,

$(k-8)(k+2)=0$

$\therefore k=8(\because k>3)$

35) [정답] ③

[해설]
점 P가 움직이는 방향을 바꾸는 시각을 $k(k>0)$이라 하면
$v(k)=k^2-ak=0$에서 $k=a$
따라서 점 P가 시각 $t=0$일 때부터 시각 $t=a$일 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^a |v(t)|dt$$

$$=\int_0^a (-t^2+at)dt$$

$$=\left[-\frac{t^3}{3}+\frac{at^2}{2}\right]_0^a$$

$$=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^3}{2}$$

$$=\frac{a^3}{6}$$

이므로 $\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2}$에서
$a^3=27$
따라서 $a=3$

36) [정답] 20

[해설]
$0\le t\le 3$일 때, $v(t)\ge 0$, $3\le t\le 4$일 때 $v(t)\le 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4 |v(t)|dt = \int_0^3 |v(t)|dt + \int_3^4 |v(t)|dt$$

$$=\int_0^3 (12-4t)dt + \int_3^4 (4t-12)dt$$

$=18+2$

$=20$

37) [정답] ②

[해설]

$\begin{cases} x_1(t)=t^3-3t^2 \\ x_2(t)=t^2 \end{cases}$ 이므로 $a^3-3a^2=a^2$

$\therefore\ a=4(\because\ a>0)$

또한, $\{x_1(t)\}'=3t^2-6t$이므로 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^4 |3t^2-6t|dt$$
$$=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^4(3t^2-6t)dt$$
$$=\frac{3\times(2-0)^3}{6}+x_1(4)-x_1(2)$$
$$=4+20$$
$$=24$$

따라서 움직인 거리는 24이다.

38) [정답] ③

[해설]

$v(1)=a+b=15,\ v(2)=4a+2b=20$에서

$a=-5,\ b=20$

$v(4)=0$이므로 $t=1$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^4(-5t^2+20t)dt+\int_4^5(5t^2-20t)dt$$
$$=\left[-\frac{5}{3}t^3+10t^2\right]_1^4+\left[\frac{5}{3}t^3-10t^2\right]_4^5$$
$$=-\frac{5}{3}\times63+10\times15+\frac{5}{3}\times61-10\times9$$
$$=\frac{170}{3}$$

39) [정답] ③

[해설]

점 P의 시각 $t(t>0)$에서의 가속도를 $a(t)$라 하면

$v(t)=-4t^3+12t^2$이므로

$a(t)=v'(t)=-12t^2+24t$

시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 12이므로

$-12k^2+24k=12,\ k^2-2k+1=0$

$(k-1)^2=0$

$\therefore k=1$

한편, $v(t)=-4t^3+12t^2=-4t^2(t-3)$이므로 $3\le t\le 4$일 때 $v(t)\le 0$이다.

따라서 $t=3$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_3^4|v(t)|dt$$
$$=\int_3^4|-4t^3+12t^2|dt$$
$$=\int_3^4(4t^3-12t^2)dt$$
$$=\left[t^4-4t^3\right]_3^4$$
$$=0-(-27)=27$$

40) [정답] ③

[해설]

$x(0)=0,\ x(1)=0$이므로 점 P의 위치는 $t=0$일 때 수직선의 원점이고, $t=1$일 때도 수직선의 원점이다.

또, $\int_0^1|v(t)|dt=2$이므로 점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2이다.

ㄱ. 점 P의 $t=0$에서 $t=1$까지 위치의 변화량이 0이므로

$\int_0^1 v(t)dt=0$ (참)

ㄴ. $|x(t_1)|>1$이면 점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 큰 시각 t_1이 존재하므로 점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2보다 크다. (거짓)

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 시각 t에서 점 P와 원점 사이의 거리가 1보다 작고, 점 P가 $t=0$에서 $t=1$까지 움직인 거리가 2이므로 점 P는 $0<t<1$에서 적어도 한 번 원점을 지나간다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

41) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $v(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$

$t<2$일 때, $v(t)<0$

$t=2$일 때, $v(2)=0$

$t>2$일 때, $v(t)>0$

$t=2$에서 점 P의 움직이는 방향이 바뀐다. (참)

ㄴ. 시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$$x(2)=0+\int_0^2(3t^2-6t)dt=\left[t^3-3t^2\right]_0^2=-4$$

(참)

ㄷ. 시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=6t-6$

$6t-6=12,\ t=3$

$t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_0^3|3t^2-6t|dt$$

$= -\int_0^2 (3t^2-6t)dt + \int_2^3 (3t^2-6t)dt$

$= 4 + \left[t^3-3t^2\right]_2^3 = 8$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

42) [정답] ①

[해설]

시각 $t=0$에서의 점 P의 위치와 시각 $t=6$에서의 점 P의 위치가 서로 같으므로 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량이 0이다. 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가 $v(t)=3t^2+at$이므로

$\int_0^6 v(t)dt = \int_0^6 (3t^2+at)dt$

$= \left[t^3 + \frac{a}{2}t^2\right]_0^6$

$= 36\left(6+\frac{a}{2}\right) = 0$

$a = -12$

$v(t) = 3t^2-12t$이므로 점 P가 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 움직인 거리는

$\int_0^6 |v(t)|dt = \int_0^6 |3t^2-12t|dt$

$= \int_0^4 (-3t^2+12t)dt + \int_4^6 (3t^2-12t)dt$

$= \left[-t^3+6t^2\right]_0^4 + \left[t^3-6t^2\right]_4^6$

$= 32+32 = 64$

43) [정답] ⑤

[해설]

점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 위치를 $x_1(t)$라 하면

$x_1(t) = \int_0^t (2-t)dt$

$= \left[2t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^t$

$= 2t - \frac{1}{2}t^2$

따라서, 출발 후 점 P가 다시 원점으로 돌아온 시각은

$2t - \frac{1}{2}t^2 = 0,\ t^2-4t=0$

$t(t-4)=0$

$t=4$

이므로

출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아

올 때까지 점 Q가 움직인 거리는

$\int_0^4 |3t|dt = \int_0^4 3tdt$

$= \left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^4$

$= 24$

44) [정답] 80

[해설]

점 P의 시각 t에서의 가속도 $a(t)$는 $a(t) = v'(t) = 12t^2-48$

$a(k) = 12(k^2-4) = 0$에서 $k>0$이므로 $k=2$이다.

$0 \leq t \leq 2$일 때 $v(t) \leq 0$이므로

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^2 |v(t)|dt = \int_0^2 (-4t^3+48t)dt$

$= \left[-t^4+24t^2\right]_0^2 = -16+96 = 80$

45) [정답] 17

[해설]

$t \geq 2$일 때

$v(t) = 3t^2+4t+C$ (단, C는 적분상수)

$t=2$일 때 속도가 같아야 하므로 $v(2)=0$에서

$12+8+C=0,\quad C=-20$

즉, $0 \leq t \leq 3$에서

$$v(t) = \begin{cases} 2t^3-8t & (0 \leq t \leq 2) \\ 3t^2+4t-20 & (2 \leq t \leq 3) \end{cases}$$

따라서 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$s = \int_0^3 |v(t)|dt$

$= \int_0^2 |v(t)|dt + \int_2^3 |v(t)|dt$

$= -\int_0^2 v(t)dt + \int_2^3 v(t)dt$

$= -\int_0^2 (2t^3-8t)dt + \int_2^3 (3t^2+4t-20)dt$

$= -\left[\frac{1}{2}t^4-4t^2\right]_0^2 + \left[t^3+2t^2-20t\right]_2^3$

$= 17$

46) [정답] ④

[해설]

시각 t에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라고 하면

$x(t)=t^3+\frac{a}{2}t^2$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 위치 $x(2)=8+2a$이다.

점 P와 점 A사이의 거리가 10이므로

$|8+2a-6|=10$

$|2a+2|=10$

$2a+2=10$ 또는 $2a+2=-10$

$a=4$ 또는 $a=-6$

$a>0$이므로 $a=4$이다.

47) [정답] ③

[해설]

$\int_0^a |v(t)|dt=s_1$, $\int_a^b |v(t)|dt=s_2$

$\int_b^c |v(t)|dt=s_3$이라 하자.

점 P는 출발한 후 시각 $t=a$에서 처음으로 운동 방향을

바꾸므로 $-8=\int_0^a v(t)dt=-s_1$에서 $s_1=8$점 P의 시각

$t=c$에서의 위치가 -6이므로

$-6=\int_0^c v(t)dt=(-8)+s_2-s_3$에서 $s_2-s_3=2\cdots\cdots$㉠

$\int_0^b v(t)dt=\int_b^c v(t)dt$이므로

$-8+s_2=-s_3$, 즉 $s_2+s_3=8\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $s_2=5$, $s_3=3$

따라서 구하는 거리는 5이다.