[미적] [01극한,급수] 교사평경 최근 3개년

06 미적 01 수열의 극한

01 수열의 극한의 성질 및 계산

01 부정형의 계산1 (무한대

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 2

1. $\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2-3}{2n^2+7n-9}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 1

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{n(9n-5)}{3n^2+1}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 2

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 23

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 23

5. $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06 미적

01 수열의 극한

01 수열의 극한의 성질 및 계산

02 부정형의 계산2 (무한대-무한대)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 3

6. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+2n+1}-\sqrt{4n^2-2n-1}\right)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 2

7. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2+12n}-3n\right)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 2

8. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2+2n+1}-2n}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 2

9. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+5n}-n}$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 23

10. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 23

11. $\lim_{n \to \infty} \left(\sqrt{n^4+5n^2+5}-n^2\right)$의 값은?

① $\frac{7}{4}$ ② 2 ③ $\frac{9}{4}$
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{11}{4}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 23

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$ 의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

06 미적

01 수열의 극한

01 수열의 극한의 성질 및 계산

04 부정형의 계산4 (수열과 일반항)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 27

13. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}=\frac{3}{(n+2)!}$$

을 만족시킨다. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+n^2a_n)$의 값은?

① $-\frac{7}{2}$ ② -3 ③ $-\frac{5}{2}$

④ -2 ⑤ $-\frac{3}{2}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 23

14. 첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3n+1}$의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$ ② 1 ③ $\dfrac{4}{3}$

④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ 2

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 26

15. 첫째항이 1인 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=3,\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}=n^2$$

을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$의 값은?

① $\dfrac{7}{6}$ ② $\dfrac{4}{3}$ ③ $\dfrac{3}{2}$

④ $\dfrac{5}{3}$ ⑤ $\dfrac{11}{6}$

06 미적

01 수열의 극한

01 수열의 극한의 성질 및 계산

06 극한식의 해석2 (무한대-무한대)

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 23

16. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+bn}-\sqrt{2n^2+1})=1$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$

④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 25

17. $\lim_{n \to \infty}\left(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an}\right)=\frac{5}{4}$를 만족시키는 모든 양수 a의 값의 합은?

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{15}{4}$ ③ 4

④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 23

18. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{an^2+bn}-\sqrt{n^2-1}}=4$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

06 미적 01 수열의 극한

01 수열의 극한의 성질 및 계산

10 극한의 성질3 (극한식의 변형)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 25

19. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = 3, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=5$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} na_n(b_n+2n)$의 값을 구하시오. [3점]

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 24

20. 수열 $\{a_n\}$이 $\lim_{n\to\infty}(3a_n-5n)=2$를 만족시킬 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{4n^2}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 25

21. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

06 미적 01 수열의 극한

01 수열의 극한의 성질 및 계산

11 극한의 성질4 (수열의 극한의 대소 관계)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 3

22. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{3n-1}{n^2+1}<a_n<\frac{3n+2}{n^2+1}$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}na_n$의 값은? [2점]

① 3 ② 4 ③ 5

④ 6 ⑤ 7

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 26

23. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2n^2-3<a_n<2n^2+4$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{6}$

④ 1 ⑤ $\frac{7}{6}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 27

24. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n^2<4na_n+n-4n^2$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3n}{2n+4}$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$

④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

06 미적 01 수열의 극한

02 등비수열의 극한의 성질 및 계산

01 등비수열의 극한의 수렴 조건

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 24

25. 수열 $\{(x^2-6x+9)^n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 8

26. 수열 $\left\{\frac{(4x-1)^n}{2^{3n}+3^{2n}}\right\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 미적분 24

27. 정수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$$a_n=\left(\frac{|k|}{3}-2\right)^n$$

이라 하자. 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 k의 개수는? [3점]

① 4 ② 8 ③ 12

④ 16 ⑤ 20

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 24

28. 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n=\left(\frac{x^2-4x}{5}\right)^n$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$이 수렴하도록 하는 모든 정수 x의 개수는?

① 7 ② 8 ③ 9

④ 10 ⑤ 11

06 미적

01 수열의 극한

02 등비수열의 극한의 성질 및 계산

02 부정형의 계산1 (기본 계산)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 23

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^{n+1}}{3^n+1}$의 값은?

① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$

④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 3

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 23

30. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\times3^{n+1}+5}{3^n+2^{n+1}}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 23

31. $\lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{(-2)^n+3^n}$의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1

④ 3 ⑤ 9

06 미적 01 수열의 극한

02 등비수열의 극한의 성질 및 계산

08 극한식의 해석3 (공비가 미지수인 극한식의 해석)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 25

32. 자연수 r에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \frac{3^n+r^{n+1}}{3^n+7 \times r^n}=1$이 성립하도록 하는 모든 r의 값의 합은?

① 7 ② 8 ③ 9

④ 10 ⑤ 11

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 25

33. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_1a_n$$

을 만족시킨다. $\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1}=12$일 때, a_1의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 미적분 25

34. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=3$일 때, a_2의 값은?

① 16 ② 18 ③ 20

④ 22 ⑤ 24

06 미적

01 수열의 극한

03 수열의 극한의 활용

03 수열의 극한의 활용3 (평면좌표 또는 함수)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 26

35. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}_n(n,\ 0)$, $\mathrm{B}_n(n,\ 3)$이 있다. 점 $\mathrm{P}(1,\ 0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 직선 OB_n과 만나는 점을 C_n이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{PC}_n}}{\overline{\mathrm{OB}_n}-\overline{\mathrm{OA}_n}}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 29

36. 자연수 n에 대하여 삼차함수

$f(x)=x(x-n)(x-3n^2)$이 극대가 되는 x를 a_n이라 하자. x에 대한 방정식 $f(x)=f(a_n)$의 근 중에서 a_n이 아닌 근을 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^3}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 28

37. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 A_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) A_1은 원점이다.
> (나) n이 홀수이면 A_{n+1}은 점 A_n을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 점이다.
> (다) n이 짝수이면 A_{n+1}은 점 A_n을 y축의 방향으로 $a+1$만큼 평행이동한 점이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{2n}}}{n}=\frac{\sqrt{34}}{2}$일 때, 양수 a의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2

④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

06 미적

01 수열의 극한

03 수열의 극한의 활용

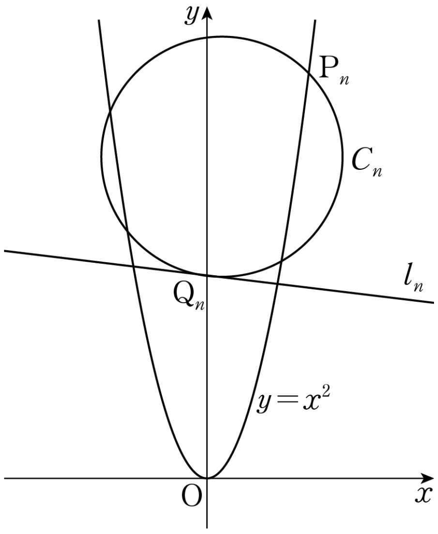
04 수열의 극한의 활용4 (원 관련)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 27

38. 자연수 n에 대하여 점 $(1,\ 0)$을 지나고 점 $(n,\ n)$에서 직선 $y=x$와 접하는 원의 중심의 좌표를 $(a_n,\ b_n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n^2}$의 값을 구하시오. [4점]

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 29

39. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(2n,\ 4n^2)$에서의 접선과 수직이고 점 $\mathrm{Q}_n(0,\ 2n^2)$을 지나는 직선을 l_n이라 하자. 점 P_n을 지나고 점 Q_n에서 직선 l_n과 접하는 원을 C_n이라 할 때, 원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값을 구하시오.

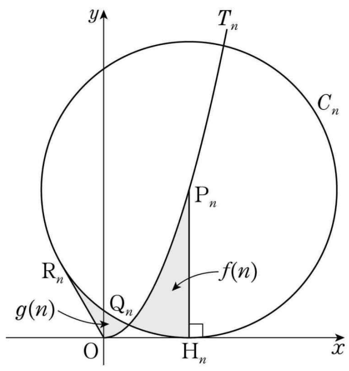


[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 30

40. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 곡선

$$T_n : y=\frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2\ (x\geq 0)$$

위에 있고 원점 O와의 거리가 $2n+2$인 점을 P_n이라 하고, 점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.
중심이 P_n이고 점 H_n을 지나는 원을 C_n이라 할 때, 곡선 T_n과 원 C_n의 교점 중 원점에 가까운 점을 Q_n, 원점에서 원 C_n에 그은 두 접선의 접점 중 H_n이 아닌 점을 R_n이라 하자.
점 R_n을 포함하지 않는 호 $\mathrm{Q}_n\mathrm{H}_n$과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n$, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(n)$, 점 H_n을 포함하지 않는 호 $\mathrm{R}_n\mathrm{Q}_n$과 선분 OR_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{n^2}=\frac{\pi}{2}+k$이다. $60k^2$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)



06 미적 01 수열의 극한

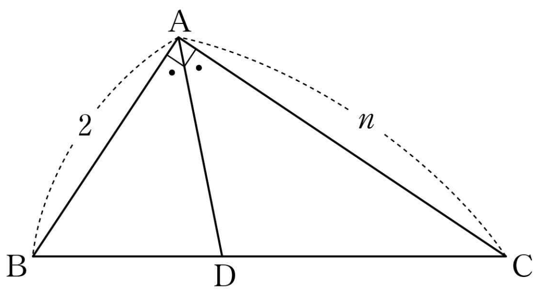
03 수열의 극한의 활용

05 수열의 극한의 활용5 (도형)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 28

41. 자연수 n에 대하여 $\angle A = 90°$, $\overline{AB} = 2$, $\overline{CA} = n$인 삼각형 ABC에서 $\angle A$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. 선분 CD의 길이를 a_n이라 할 때, $\lim\limits_{n \to \infty}(n - a_n)$의 값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4



06 미적 01 수열의 극한

03 수열의 극한의 활용

09 극한으로 정의된 함수1 (기본)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 18

42. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{(a-2)x^{2n+1} + 2x}{3x^{2n} + 1}$$

라 하자. $(f \circ f)(1) = \frac{5}{4}$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 7

43. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}+3}$$

에 대하여 $f(k)=-\frac{1}{3}$을 만족시키는 정수 k의 개수는? [3점]

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 26

44. 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}$$

에 대하여 $f(k)=k$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은?

① -6 ② -5 ③-4
④ -3 ⑤ -2

06 미적 01 수열의 극한

03 수열의 극한의 활용

10 극한으로 정의된 함수2 (연속성)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 29

45. 실수 t에 대하여 직선 $y=tx-2$가 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1}$$

의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 a_1, a_2, $\cdots$, a_m(m은 자연수)라 할 때, $m\times a_m$의 값을 구하시오.

06 미적

02 급수

01 급수의 성질 및 계산

05 소거형 급수3 (부분분수)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 4

46. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2

④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 15

47. 첫째항이 양수이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_1의 값은? [4점]

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$\log a_n + \log a_{n+1} + \log b_n = 0$

(나) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{12}$

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3

④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

06 미적

02 급수

01 급수의 성질 및 계산

08 급수의 수렴과 발산2 (수렴조건)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 6

48. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} a_n = 3$이고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + 2b_n - 7)$이 수렴할 때, $\lim_{n \to \infty} b_n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 27

49. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

06 미적

02 급수

01 급수의 성질 및 계산

09 급수의 수렴과 발산3 (수렴조건. 모양 맞추기)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 5

50. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}=10$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2a_n^2+3n^2}{a_n^2+n^2}$의 값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4

④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 25

51. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2\right)=5$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3na_n}{n^2+4}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 24

52. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-4n}{n}=1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+a_n}{3n-1}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

06 미적 02 급수

02 등비급수의 성질 및 계산

04 등비급수의 계산2 (등비수열의 일반항)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 8

53. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n}=6$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06 미적 02 급수

02 등비급수의 성질 및 계산

07 등비급수의 계산5 (합의 해석)

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 25

54. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3,\ \sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2=6$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

06 미적

02 급수

03 급수의 활용

03 일반급수의 활용2 (함수 및 도형)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 30

55. 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+bx^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}\ (a,\ b\text{는 양의 상수})$$

라 하자. 자연수 m에 대하여 방정식 $f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수를 c_m이라 할 때, $c_k=5$인 자연수 k가 존재한다. $k+\sum_{m=1}^{\infty}(c_m-1)$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 27

56. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2-2nx-2n$이 직선 $y=x+1$과 만나는 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$을 대각선으로 하는 정사각형의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{6}$
④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{7}{30}$

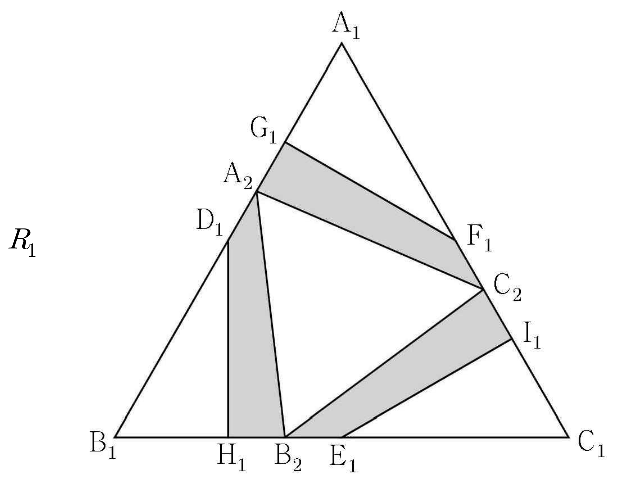
06 미적 02 급수

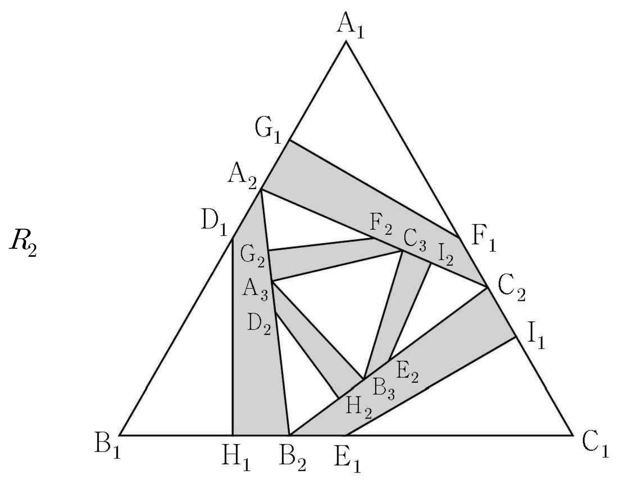
03 급수의 활용

10 등비급수와 도형3 (넓이)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 18

57. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 세 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1의 중점을 각각 D_1, E_1, F_1이라 하고, 세 선분 A_1D_1, B_1E_1, C_1F_1의 중점을 각각 G_1, H_1, I_1이라 하고, 세 선분 G_1D_1, H_1E_1, I_1F_1의 중점을 각각 A_2, B_2, C_2라 하자. 세 사각형 $A_2C_2F_1G_1$, $B_2A_2D_1H_1$, $C_2B_2E_1I_1$에 모두 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 삼각형 $A_2B_2C_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 사각형 $A_3C_3F_2G_2$, $B_3A_3D_2H_2$, $C_3B_3E_2I_2$에 모두 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



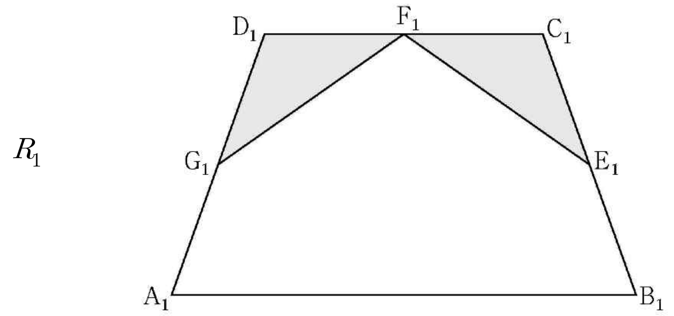


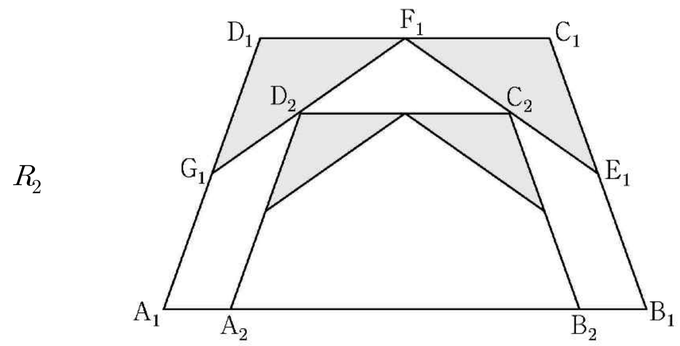
⋮ ⋮

① $\dfrac{109\sqrt{3}}{15}$ ② $\dfrac{112\sqrt{3}}{15}$ ③ $\dfrac{23\sqrt{3}}{3}$
④ $\dfrac{118\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\dfrac{121\sqrt{3}}{15}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 18

58. 그림과 같이 두 선분 A_1B_1, C_1D_1이 서로 평행하고 $\overline{A_1B_1}=10$, $\overline{B_1C_1}=\overline{C_1D_1}=\overline{D_1A_1}=6$인 사다리꼴 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 세 선분 B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1의 중점을 각각 E_1, F_1, G_1이라 하고 두 개의 삼각형 $C_1F_1E_1$, $D_1G_1F_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 A_1B_1 위의 두 점 A_2, B_2와 선분 E_1F_1 위의 점 C_2, 선분 F_1G_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하고 두 선분 A_2B_2, C_2D_2가 서로 평행하며 $\overline{B_2C_2}=\overline{C_2D_2}=\overline{D_2A_2}$, $\overline{A_2B_2} : \overline{B_2C_2}=5:3$인 사다리꼴 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다.
그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 사다리꼴 $A_2B_2C_2D_2$에 두 개의 삼각형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?





⋮ ⋮

① $\dfrac{234}{19}\sqrt{2}$ ② $\dfrac{236}{19}\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{238}{19}\sqrt{2}$
④ $\dfrac{240}{19}\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{242}{19}\sqrt{2}$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 20

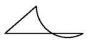
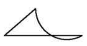
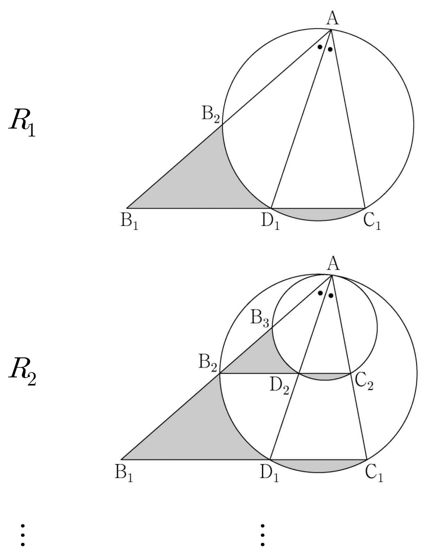
59. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=3$, $\overline{AC_1}=2$이고 $\angle B_1AC_1=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 AB_1C_1이 있다. $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 D_1, 세 점 A, D_1, C_1을 지나는 원이 선분 AB_1과 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_2라 할 때, 두 선분 B_1B_2, B_1D_1과 호 B_2D_1로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 호 C_1D_1로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1C_1에 평행한 직선이 두 선분 AD_1, AC_1과 만나는 점을 각각 D_2, C_2라 하자.

세 점 A, D_2, C_2를 지나는 원이 선분 AB_2와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B_3이라 할 때, 두 선분 B_2B_3, B_2D_2와 호 B_3D_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 호 C_2D_2로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?

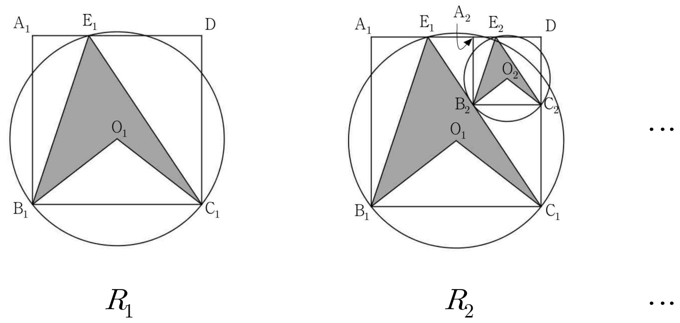


① $\frac{27\sqrt{3}}{46}$ ② $\frac{15\sqrt{3}}{23}$ ③ $\frac{33\sqrt{3}}{46}$

④ $\frac{18\sqrt{3}}{23}$ ⑤ $\frac{39\sqrt{3}}{46}$

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 19

60. 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 $A_1B_1C_1D$에서 선분 A_1D를 $1:2$로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 세 점 B_1, C_1, E_1을 지나는 원의 중심을 O_1이라 하자. 삼각형 $E_1B_1C_1$의 내부와 삼각형 $O_1B_1C_1$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 선분 E_1D 위의 점 A_2, 선분 E_1C_1 위의 점 B_2, 선분 C_1D 위의 점 C_2와 점 D를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $A_2B_2C_2D$를 그린다. 정사각형 $A_2B_2C_2D$에서 선분 A_2D를 $1:2$로 내분하는 점을 E_2라 하고, 세 점 B_2, C_2, E_2를 지나는 원의 중심을 O_2라 하자. 삼각형 $E_2B_2C_2$의 내부와 삼각형 $O_2B_2C_2$의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim S_n$의 값은?



① $\frac{90}{7}$ ② $\frac{275}{21}$ ③ $\frac{40}{3}$

④ $\frac{95}{7}$ ⑤ $\frac{290}{21}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 18

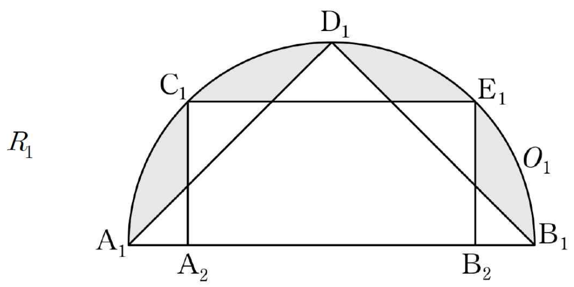
61. 그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 반원 O_1의 호 A_1B_1을 4등분하는 점을 점 A_1에서 가까운 순서대로 각각 C_1, D_1, E_1이라 하고, 두 점 C_1, E_1에서 선분 A_1B_1에 내린 수선의 발을 각각 A_2, B_2라 하자.

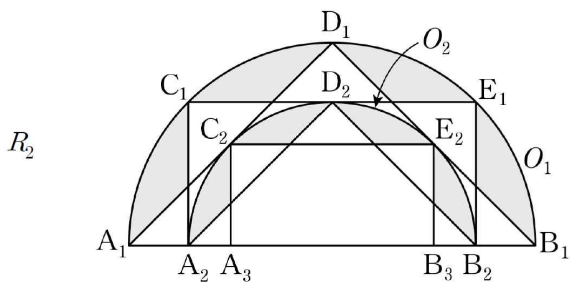
사각형 $C_1A_2B_2E_1$의 외부와 삼각형 $D_1A_1B_1$의 외부의 공통부분 중 반원 O_1의 내부에 있는 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 A_2B_2를 지름으로 하는 반원 O_2를 반원 O_1의 내부에 그리고, 반원 O_2의 호 A_2B_2를 4등분하는 점을 점 A_2에서 가까운 순서대로 각각 C_2, D_2, E_2라 하고, 두 점 C_2, E_2에서 선분 A_2B_2에 내린 수선의 발을 각각 A_3, B_3이라 하자.

사각형 $C_2A_3B_3E_2$의 외부와 삼각형 $D_2A_2B_2$의 외부의 공통부분 중 반원 O_2의 내부에 있는 모양의 도형에 색칠을 하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은?





⋮ ⋮

① $4\pi+4\sqrt{2}-16$ ② $4\pi+16\sqrt{2}-32$

③ $4\pi+8\sqrt{2}-20$ ④ $2\pi+16\sqrt{2}-24$

⑤ $2\pi+8\sqrt{2}-12$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 27

62. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다.

$\angle AD_1C_1$을 삼등분하는 두 직선이 선분 B_1C_1과 만나는 점 중 점 B_1에 가까운 점을 E_1, 점 C_1에 가까운 점을 F_1이라 하자.

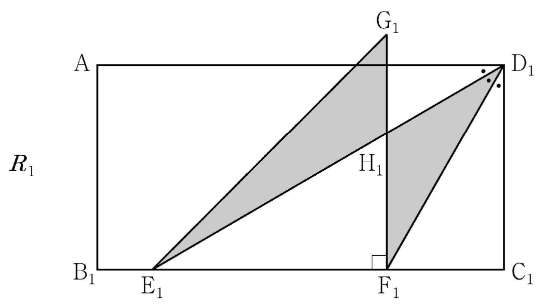
$\overline{E_1F_1}=\overline{F_1G_1}$, $\angle E_1F_1G_1=\frac{\pi}{2}$이고 선분 AD_1과 선분 F_1G_1이 만나도록 점 G_1을 잡아 삼각형 $E_1F_1G_1$을 그린다.

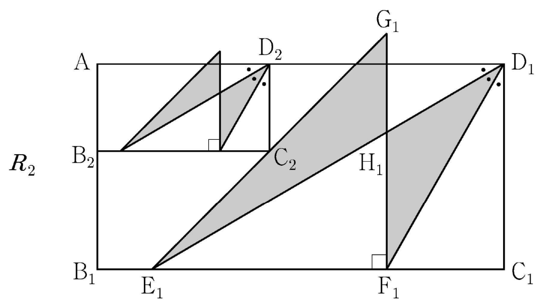
선분 E_1D_1과 선분 F_1G_1이 만나는 점을 H_1이라 할 때, 두 삼각형 $G_1E_1H_1$, $H_1F_1D_1$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 선분 AB_1 위의 점 B_2, 선분 E_1G_1 위의 점 C_2, 선분 AD_1 위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}$: $\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다.

직사각형 $AB_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은?





⋮ ⋮

① $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{5\sqrt{3}}{18}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

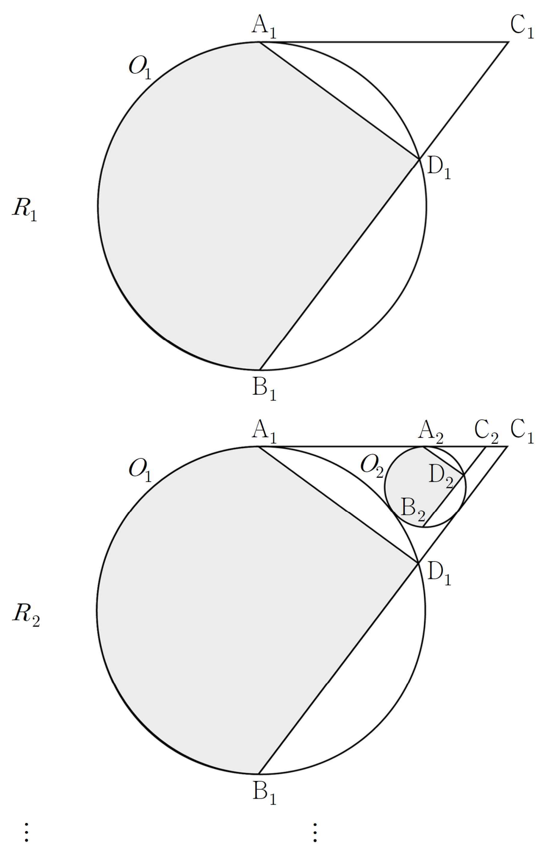
④ $\frac{7\sqrt{3}}{18}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{3}}{9}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 28

63. 그림과 같이 길이가 4인 선분 A_1B_1을 지름으로 하는 원 O_1이 있다. 원 O_1의 외부에 $\angle B_1A_1C_1=\frac{\pi}{2}$, $\overline{A_1B_1}:\overline{A_1C_1}=4:3$이 되도록 점 C_1을 잡고 두 선분 A_1C_1, B_1C_1을 그린다. 원 O_1과 선분 B_1C_1의 교점 중 B_1이 아닌 점을 D_1이라 하고, 점 D_1을 포함하지 않는 호 A_1B_1과 두 선분 A_1D_1, B_1D_1로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 호 A_1D_1과 두 선분 A_1C_1, C_1D_1에 동시에 접하는 원 O_2를 그리고 선분 A_1C_1과 원 O_2의 교점을 A_2, 점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1과 평행한 직선이 원 O_2와 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 그림 R_1에서 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 C_2, D_2를 잡고, 점 D_2를 포함하지 않는 호 A_2B_2와 두 선분 A_2D_2, B_2D_2로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?



① $\frac{32}{15}\pi+\frac{256}{125}$ ② $\frac{9}{4}\pi+\frac{54}{25}$

③ $\frac{32}{15}\pi+\frac{512}{125}$ ④ $\frac{9}{4}\pi+\frac{108}{25}$

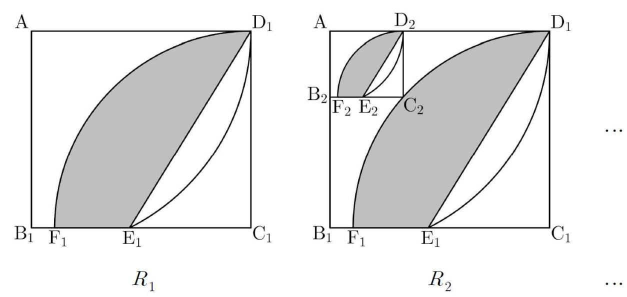
⑤ $\frac{8}{3}\pi+\frac{128}{25}$

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 26

64. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=\sqrt{5}$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD_1}$인 원과 선분 B_1C_1의 교점을 E_1, 중심이 C_1이고 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$인 원과 선분 B_1C_1의 교점을 F_1이라 하자. 호 D_1F_1과 두 선분 D_1E_1, F_1E_1로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 AB_1위의 점 B_2, 호 D_1F_1위의 점 C_2, 선분 AD_1위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}:\overline{AD_2}=2:\sqrt{5}$인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다. 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{AD_2}$인 원과 선분 B_2C_2의 교점을 E_2, 중심이 C_2이고 반지름의 길이가 $\overline{C_2D_2}$인 원과 선분 B_2C_2의 교점을 F_2라 하자. 호 D_2F_2와 두 선분 D_2E_2, F_2E_2로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?



① $\frac{8\pi+8-8\sqrt{5}}{7}$ ② $\frac{8\pi+8-7\sqrt{5}}{7}$

③ $\frac{9\pi+9-9\sqrt{5}}{8}$ ④ $\frac{9\pi+9-8\sqrt{5}}{8}$

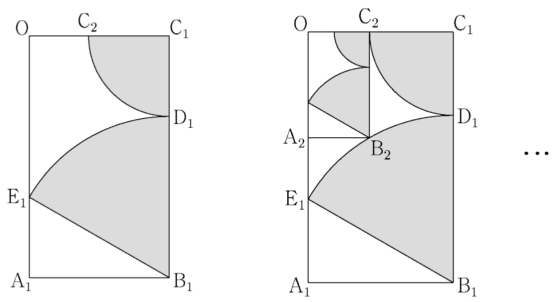
⑤ $\frac{10\pi+10-10\sqrt{5}}{9}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 미적분 26

65. 그림과 같이 $\overline{OA_1}=\sqrt{3}$, $\overline{OC_1}=1$인 직사각형 $OA_1B_1C_1$이 있다. 선분 B_1C_1 위의 $\overline{B_1D_1}=2\overline{C_1D_1}$인 점 D_1에 대하여 중심이 B_1이고 반지름의 길이가 $\overline{B_1D_1}$인 원과 선분 OA_1의 교점을 E_1, 중심이 C_1이고 반지름의 길이가 $\overline{C_1D_1}$인 원과 선분 OC_1의 교점을 C_2라 하자. 부채꼴 $B_1D_1E_1$의 내부와 부채꼴 $C_1C_2D_1$의 내부로 이루어진 ◁ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2, 호 D_1E_1 위의 점 B_2와 점 C_2, 점 O를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리고, 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $OA_2B_2C_2$에 ◁ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1 R_2 …

① $\frac{5+2\sqrt{3}}{12}\pi$ ② $\frac{2+\sqrt{3}}{6}\pi$ ③ $\frac{3+2\sqrt{3}}{12}\pi$

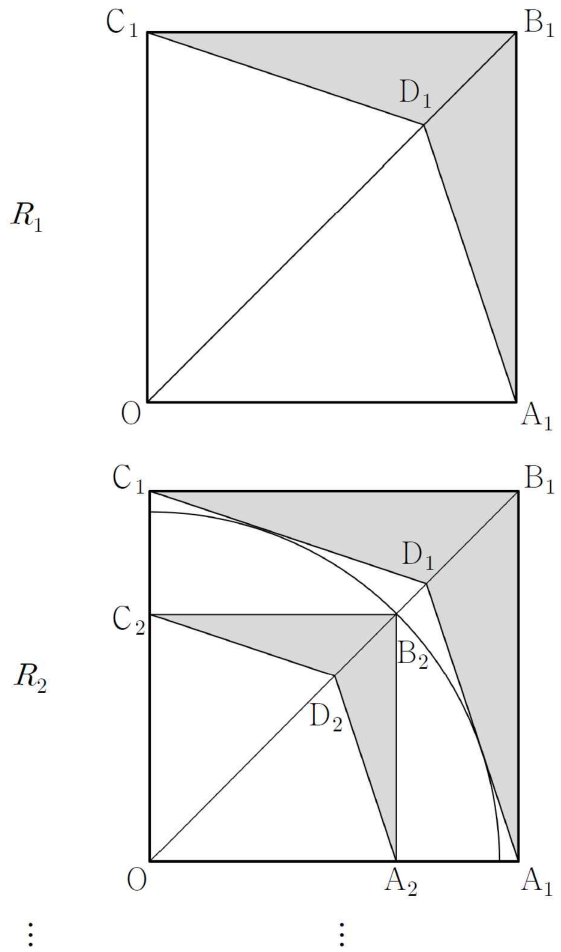
④ $\frac{1+\sqrt{3}}{6}\pi$ ⑤ $\frac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 26

66. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정사각형 $OA_1B_1C_1$의 대각선 OB_1을 3 : 1로 내분하는 점을 D_1이라 하고, 네 선분 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1로 둘러싸인 ㄱ모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 중심이 O이고 두 직선 A_1D_1, C_1D_1에 동시에 접하는 원과 선분 OB_1이 만나는 점을 B_2라 하자. 선분 OB_2를 대각선으로 하는 정사각형 $OA_2B_2C_2$를 그리고 정사각형 $OA_2B_2C_2$에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 ㄱ모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



① $\frac{70}{11}$ ② $\frac{75}{11}$ ③ $\frac{80}{11}$

④ $\frac{80}{9}$ ⑤ $\frac{85}{9}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 26

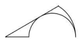
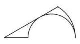
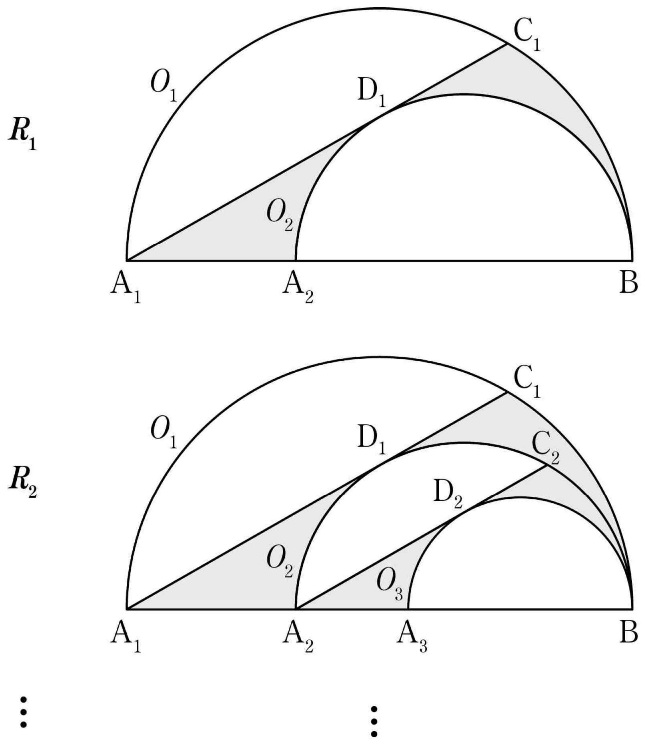
67. 그림과 같이 길이가 2인 선분 A_1B를 지름으로 하는 반원 O_1이 있다. 호 BA_1 위에 점 C_1을 $\angle BA_1C_1=\frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 선분 A_2B를 지름으로 하는 반원 O_2가 선분 A_1C_1과 접하도록 선분 A_1B 위에 점 A_2를 잡는다. 반원 O_2와 선분 A_1C_1의 접점을 D_1이라 할 때, 두 선분 A_1A_2, A_1D_1과 호 D_1A_2로 둘러싸인 부분과 선분 C_1D_1과 두 호 BC_1, BD_1로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 호 BA_2 위에 점 C_2를 $\angle BA_2C_2=\frac{\pi}{6}$가 되도록 잡고, 선분 A_3B를 지름으로 하는 반원 O_3이 선분 A_2C_2와 접하도록 선분 A_2B 위에 점 A_3을 잡는다. 반원 O_3와 선분 A_2C_2의 접점을 D_2라 할 때, 두 선분 A_2A_3, A_2D_2와 호 D_2A_3으로 둘러싸인 부분과 선분 C_2D_2와 두 호 BC_2, BD_2로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?



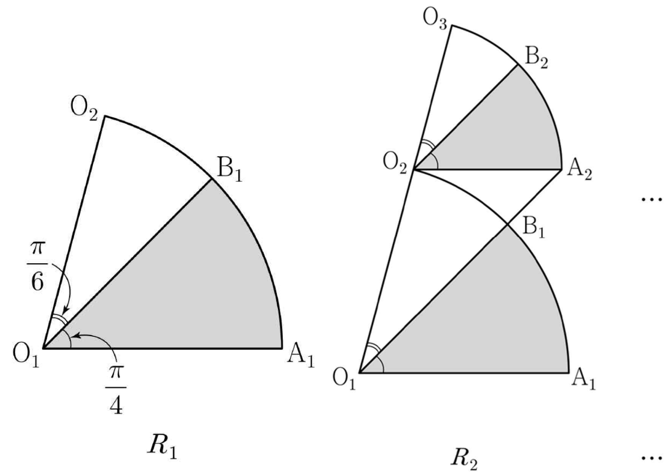
① $\frac{4\sqrt{3}-\pi}{10}$ ② $\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$ ③ $\frac{8\sqrt{3}-\pi}{20}$
④ $\frac{5\sqrt{3}-\pi}{10}$ ⑤ $\frac{9\sqrt{3}-\pi}{20}$

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 26

68. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_1A_1O_2$가 있다. 호 A_1O_2위에 점 B_1을 $\angle A_1O_1B_1=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_1A_1B_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 O_2를 지나고 선분 O_1A_1에 평행한 직선이 직선 O_1B_1과 만나는 점을 A_2라 하자. 중심이 O_2이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_2A_2O_3$을 부채꼴 $O_1A_1B_1$과 겹치지 않도록 그린다. 호 A_2O_3 위에 점 B_2를 $\angle A_2O_2B_2=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_2A_2B_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?

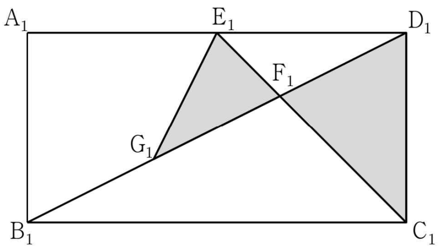


① $\frac{3\pi}{16}$ ② $\frac{7\pi}{32}$ ③ $\frac{\pi}{4}$
④ $\frac{9\pi}{32}$ ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

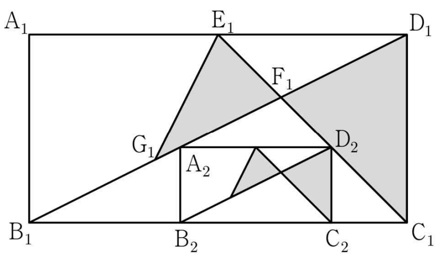
[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 미적분 27

69. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1의 중점 E_1에 대하여 두 선분 B_1D_1, C_1E_1이 만나는 점을 F_1이라 하자. $\overline{G_1E_1}=\overline{G_1F_1}$이 되도록 선분 B_1D_1 위에 점 G_1을 잡아 삼각형 $G_1F_1E_1$을 그린다. 두 삼각형 $C_1D_1F_1$, $G_1F_1E_1$로 만들어진  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 B_1F_1 위의 점 A_2, 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2, 선분 C_1F_1 위의 점 D_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=1:2$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다. 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1



R_2

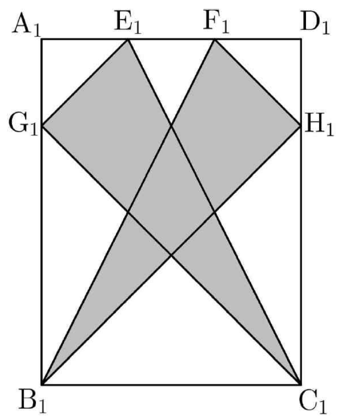


⋮ ⋮

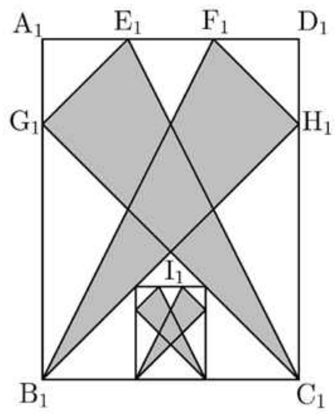
① $\frac{23}{42}$ ② $\frac{25}{42}$ ③ $\frac{9}{14}$
④ $\frac{29}{42}$ ⑤ $\frac{31}{42}$

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 미적분 27

70. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_1D_1}=3$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1을 $1:2$, $2:1$로 내분하는 점을 각각 E_1, F_1이라 하고, 두 선분 A_1B_1, D_1C_1을 $1:3$으로 내분하는 점을 각각 G_1, H_1이라 하자. 두 삼각형 $C_1E_1G_1$, $B_1H_1F_1$로 만들어진  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 두 선분 B_1H_1, C_1G_1이 만나는 점을 I_1이라 하자.
선분 B_1I_1 위의 점 A_2, 선분 C_1I_1 위의 점 D_2, 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 $\overline{A_2B_2}:\overline{A_2D_2}=4:3$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$가 되도록 잡는다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1

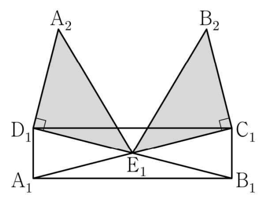


R_2

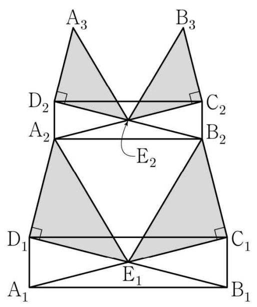
① $\frac{347}{64}$ ② $\frac{351}{64}$ ③ $\frac{355}{64}$
④ $\frac{359}{64}$ ⑤ $\frac{363}{64}$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 미적분 27

71. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=4$, $\overline{\mathrm{A_1D_1}}=1$인 직사각형 $\mathrm{A_1B_1C_1D_1}$에서 두 대각선의 교점을 $\mathrm{E_1}$이라 하자.
$\overline{\mathrm{A_2D_1}}=\overline{\mathrm{D_1E_1}}$, $\angle \mathrm{A_2D_1E_1}=\frac{\pi}{2}$이고 선분 $\mathrm{D_1C_1}$과 선분 $\mathrm{A_2E_1}$이 만나도록 점 $\mathrm{A_2}$를 잡고, $\overline{\mathrm{B_2C_1}}=\overline{\mathrm{C_1E_1}}$, $\angle \mathrm{B_2C_1E_1}=\frac{\pi}{2}$이고 선분 $\mathrm{D_1C_1}$과 선분 $\mathrm{B_2E_1}$이 만나도록 점 $\mathrm{B_2}$를 잡는다. 두 삼각형 $\mathrm{A_2D_1E_1}$, $\mathrm{B_2C_1E_1}$을 그린 후 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 $\overline{\mathrm{A_2B_2}}:\overline{\mathrm{A_2D_2}}=4:1$이고 선분 $\mathrm{D_2C_2}$가 두 선분 $\mathrm{A_2E_1}$, $\mathrm{B_2E_1}$과 만나지 않도록 직사각형 $\mathrm{A_2B_2C_2D_2}$를 그린다. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 세 점 $\mathrm{E_2}$, $\mathrm{A_3}$, $\mathrm{B_3}$을 잡고 두 삼각형 $\mathrm{A_3D_2E_2}$, $\mathrm{B_3C_2E_2}$를 그린 후 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?



R_1



R_2

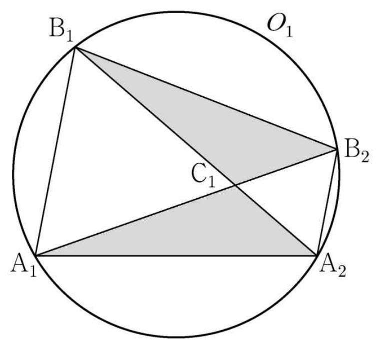
⋯

① $\frac{68}{5}$ ② $\frac{34}{3}$ ③ $\frac{68}{7}$
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{68}{9}$

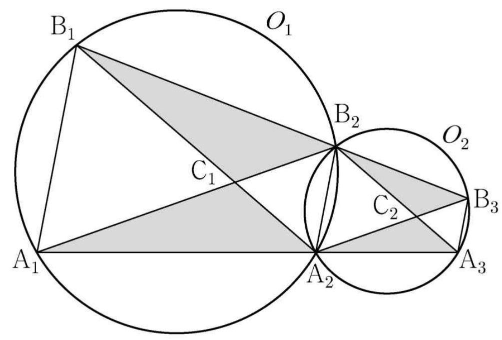
[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 미적분 26

72. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{A_1B_1}}=2$, $\overline{\mathrm{B_1A_2}}=3$이고 $\angle \mathrm{A_1B_1A_2}=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $\mathrm{A_1A_2B_1}$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다.
점 $\mathrm{A_2}$를 지나고 직선 $\mathrm{A_1B_1}$에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 $\mathrm{A_2}$가 아닌 점을 $\mathrm{B_2}$라 하자. 두 선분 $\mathrm{A_1B_2}$, $\mathrm{B_1A_2}$가 만나는 점을 $\mathrm{C_1}$이라 할 때, 두 삼각형 $\mathrm{A_1A_2C_1}$, $\mathrm{B_1C_1B_2}$로 만들어진 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 점 $\mathrm{B_2}$를 지나고 직선 $\mathrm{B_1A_2}$에 평행한 직선이 직선 $\mathrm{A_1A_2}$와 만나는 점을 $\mathrm{A_3}$이라 할 때, 삼각형 $\mathrm{A_2A_3B_2}$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{C_2}$를 잡아 원 O_2에 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

R_1



R_2

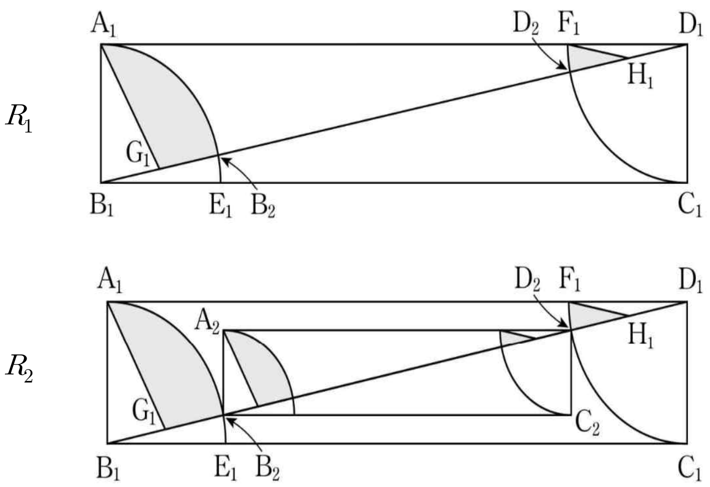


⋮ ⋮

① $\frac{11\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{13\sqrt{3}}{9}$
④ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 27

73. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=1$, $\overline{B_1C_1}=2\sqrt{6}$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 중심이 B_1이고 반지름의 길이가 1인 원이 선분 B_1C_1과 만나는 점을 E_1이라 하고, 중심이 D_1이고 반지름의 길이가 1인 원이 선분 A_1D_1과 만나는 점을 F_1이라 하자. 선분 B_1D_1이 호 A_1E_1, 호 C_1F_1과 만나는 점을 각각 B_2, D_2라 하고, 두 선분 B_1B_2, D_1D_2의 중점을 각각 G_1, H_1이라 하자. 두 선분 A_1G_1, G_1B_2와 호 B_2A_1로 둘러싸인 부분인 모양의 도형과 두 선분 D_2H_1, H_1F_1과 호 F_1D_2로 둘러싸인 부분인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 B_2D_2가 대각선이고 모든 변이 선분 A_1B_1 또는 선분 B_1C_1에 평행한 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다.
직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 도형과 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

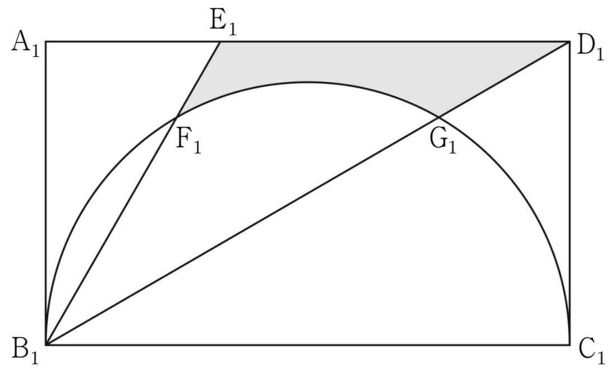


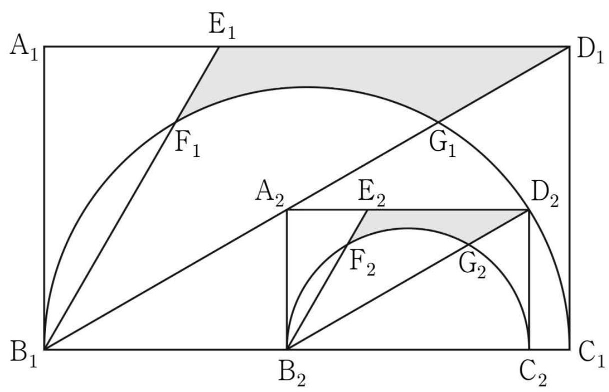
⋮ ⋮

① $\dfrac{25\pi-12\sqrt{6}-5}{64}$ ② $\dfrac{25\pi-12\sqrt{6}-4}{64}$
③ $\dfrac{25\pi-10\sqrt{6}-6}{64}$ ④ $\dfrac{25\pi-10\sqrt{6}-5}{64}$
⑤ $\dfrac{25\pi-10\sqrt{6}-4}{64}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 28

74. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1C_1}=2\sqrt{3}$인 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 선분 A_1D_1을 $1:2$로 내분하는 점을 E_1이라 하고 선분 B_1C_1을 지름으로 하는 반원의 호 B_1C_1이 두 선분 B_1E_1, B_1D_1과 만나는 점 중 점 B_1이 아닌 점을 각각 F_1, G_1이라 하자. 세 선분 F_1E_1, E_1D_1, D_1G_1과 호 F_1G_1로 둘러싸인 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에 선분 B_1G_1 위의 점 A_2, 호 G_1C_1 위의 점 D_2와 선분 B_1C_1 위의 두 점 B_2, C_2를 꼭짓점으로 하고 $\overline{A_2B_2}:\overline{B_2C_2}=1:\sqrt{3}$인 직사각형 $A_2B_2C_2D_2$를 그린다.
직사각형 $A_2B_2C_2D_2$에 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?

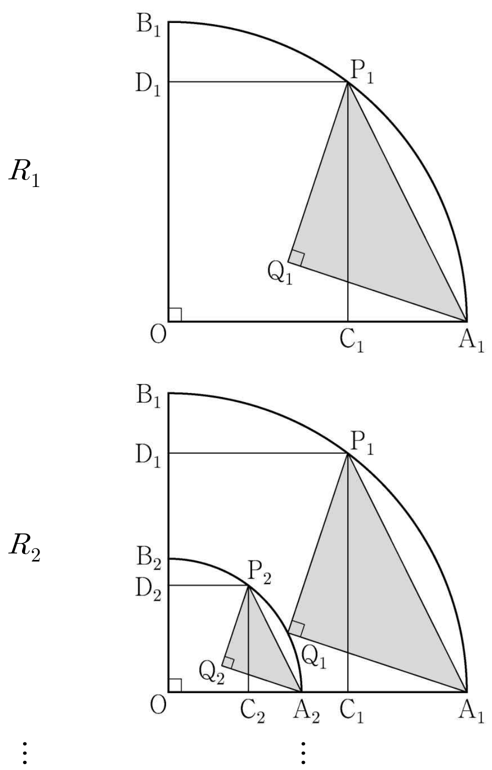




① $\dfrac{169}{864}(8\sqrt{3}-3\pi)$ ② $\dfrac{169}{798}(8\sqrt{3}-3\pi)$
③ $\dfrac{169}{720}(8\sqrt{3}-3\pi)$ ④ $\dfrac{169}{864}(16\sqrt{3}-3\pi)$
⑤ $\dfrac{169}{798}(16\sqrt{3}-3\pi)$

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월 미적분 27

75. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_1B_1이 있다. 호 A_1B_1 위에 점 P_1, 선분 OA_1 위에 점 C_1, 선분 OB_1 위에 점 D_1을 사각형 $OC_1P_1D_1$이 $\overline{OC_1} : \overline{OD_1} = 3 : 4$인 직사각형이 되도록 잡는다. 부채꼴 OA_1B_1의 내부에 점 Q_1을 $\overline{P_1Q_1} = \overline{A_1Q_1}$, $\angle P_1Q_1A_1 = \frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고, 이등변삼각형 $P_1Q_1A_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 선분 OA_1 위의 점 A_2와 선분 OB_1 위의 점 B_2를 $\overline{OQ_1} = \overline{OA_2} = \overline{OB_2}$가 되도록 잡고, 중심이 O, 반지름의 길이가 $\overline{OQ_1}$, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OA_2B_2를 그린다.
그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 네 점 P_2, C_2, D_2, Q_2를 잡고, 이등변삼각형 $P_2Q_2A_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} S_n$의 값은?



① $\frac{9}{40}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{11}{40}$
④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{13}{40}$

[미적] [01극한,급수] 교사평경 최근 3개년(빠른 정답)

미적 3개년 2022.12.29

1. [정답] ④
2. [정답] ③
3. [정답] ④
4. [정답] ⑤
5. [정답] ⑤

6. [정답] ①
7. [정답] ②
8. [정답] ②
9. [정답] ②
10. [정답] ②

11. [정답] ④
12. [정답] ①
13. [정답] ③
14. [정답] ①
15. [정답] ③

16. [정답] ⑤
17. [정답] ④
18. [정답] ②
19. [정답] **21**
20. [정답] ⑤

21. [정답] ⑤
22. [정답] ①
23. [정답] ②
24. [정답] ①
25. [정답] **9**

26. [정답] ②
27. [정답] ③
28. [정답] ①
29. [정답] ⑤
30. [정답] ③

31. [정답] ②
32. [정답] ④
33. [정답] ④
34. [정답] ⑤
35. [정답] **5**

36. [정답] 5
37. [정답] ①
38. [정답] **2**
39. [정답] 12
40. [정답] 80

41. [정답] ③
42. [정답] ③
43. [정답] ②
44. [정답] ④
45. [정답] 28

46. [정답] ②
47. [정답] ⑤
48. [정답] ②
49. [정답] ③
50. [정답] ①

51. [정답] ④
52. [정답] ③
53. [정답] ③
54. [정답] 2
55. [정답] 13

56. [정답] ②
57. [정답] ②
58. [정답] ⑤
59. [정답] ①
60. [정답] ②

61. [정답] ②
62. [정답] ③
63. [정답] ③
64. [정답] ③
65. [정답] ⑤

66. [정답] ③
67. [정답] ②
68. [정답] ③
69. [정답] ②
70. [정답] ⑤

71. [정답] ③

72. [정답] ②
73. [정답] ④
74. [정답] ②
75. [정답] ②

[미적] [01극한,급수] 교사평경 최근 3개년(해설)

미적 3개년 2022.12.29

1) [정답] ④

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2-3}{2n^2+7n-9}=\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{7}{n}-\frac{9}{n^2}}=4$$

2) [정답] ③

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(9n-5)}{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{9-\frac{5}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}=3$$

3) [정답] ④

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{2n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n)\cdot 2}{2n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n}{2n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{2+\frac{5}{n}}$$

$$=4$$

4) [정답] ⑤

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n^3-1}{(n+2)(2n^2+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{10-\frac{1}{n^3}}{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{3}{n^2}\right)}=5$$

5) [정답] ⑤

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}\right)\times n}{\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}\right)\times n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}$$

$$=\frac{5+0}{1-0}=5$$

6) [정답] ①

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+2n+1}-\sqrt{4n^2-2n-1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2+2n+1)-(4n^2-2n-1)}{\sqrt{4n^2+2n+1}+\sqrt{4n^2-2n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+2}{\sqrt{4n^2+2n+1}+\sqrt{4n^2-2n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{4-\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=1$$

7) [정답] ②

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{9n^2+12n}-3n\right)\left(\sqrt{9n^2+12n}+3n\right)}{\left(\sqrt{9n^2+12n}+3n\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9n^2+12n-9n^2}{\sqrt{9n^2+12n}+3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12n}{\sqrt{9n^2+12n}+3n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{\sqrt{9+\frac{12}{n}}+3}$$

$$=\frac{12}{\sqrt{9}+3}=2$$

8) [정답] ②

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+2n+1}-2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}{4n^2+2n+1-4n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}{2n+1}$$
$$=\frac{2+2}{2}=2$$

9) [정답] ②

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+5n}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+5n}+n}{5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1}{5}=\frac{2}{5}$$

10) [정답] ②

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}+n}{n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}{1+\frac{1}{n}}$$
$$=\frac{1+1}{1}=2$$

11) [정답] ④

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^4+5n^2+5}-n^2\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^4+5n^2+5}-n^2\right)\left(\sqrt{n^4+5n^2+5}+n^2\right)}{\sqrt{n^4+5n^2+5}+n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+5}{\sqrt{n^4+5n^2+5}+n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{5}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{5}{n^2}+\frac{5}{n^4}}+1}=\frac{5}{2}$$

12) [정답] ①

[해설]
주어진 식의 분자와 분모에
$\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}$
을 각각 곱하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{(n^2+3n)-(n^2+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2}$$
$$=\frac{1+1}{2}=1$$

13) [정답] ③

[해설]

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}=\frac{3}{(n+2)!}$ 이므로

$n=1$ 일 때, $\dfrac{a_1}{0!}=\dfrac{3}{3!}$ 에서 $a_1=\dfrac{1}{2}$

$n\geq 2$ 일 때,

$$\frac{a_n}{(n-1)!}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{(k-1)!}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{(k-1)!}$$
$$=\frac{3}{(n+2)!}-\frac{3}{(n+1)!}$$

$$a_n=\frac{3(n-1)!}{(n+2)!}-\frac{3(n-1)!}{(n+1)!}$$
$$=\frac{3}{(n+2)(n+1)n}-\frac{3}{(n+1)n}$$
$$=\frac{-3n-3}{(n+2)(n+1)n}$$
$$=\frac{-3}{n(n+2)}$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+n^2a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{3n}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$$

14) [정답] ①

[해설]

$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}=\frac{2}{3}$$

15) [정답] ③

[해설]

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times 3=3n-2$

수열 $\{b_n\}$은 $n\geq 2$일 때,

$$\frac{1}{b_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{b_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{b_k}=n^2-(n-1)^2=2n-1$$

에서 $b_n=\dfrac{1}{2n-1}$이고 $b_1=1$이므로

모든 자연수 n에 대하여 $b_n=\dfrac{1}{2n-1}$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{2-\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}$

16) [정답] ⑤

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+bn}-\sqrt{2n^2+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)n^2+bn-1}{\sqrt{an^2+bn}+\sqrt{2n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)n+b-\frac{1}{n}}{\sqrt{a+\frac{b}{n}}+\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}}$$

이때 극한값이 존재하므로 $a=2$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}=\frac{b}{2\sqrt{2}}=1$$

$\therefore b=2\sqrt{2}$

17) [정답] ④

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(an^2+n)-(an^2-an)}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)n}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+1}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a-\frac{a}{n}}}=\frac{a+1}{2\sqrt{a}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an}\right)=\frac{5}{4}$에서 $\dfrac{a+1}{2\sqrt{a}}=\dfrac{5}{4}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4a^2-17a+4=0$, $(4a-1)(a-4)=0$,

$a=\dfrac{1}{4}$ 또는 $a=4$

따라서 모든 양수 a의 값의 합은 $\dfrac{1}{4}+4=\dfrac{17}{4}$

18) [정답] ②

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{an^2+bn}-\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an^2+bn}+\sqrt{n^2-1}}{(a-1)n^2+bn+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a+\frac{b}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}{(a-1)n+b+\frac{1}{n}}$$

위의 값이 수렴하려면 $a-1=0$, 즉 $a=1$이고 이때 수렴하는 값은 $\dfrac{a+1}{b}=\dfrac{2}{b}$이므로 $\dfrac{2}{b}=4$에서 $b=\dfrac{1}{2}$

$\therefore ab=\dfrac{1}{2}$

19) [정답] **21**

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}na_n(b_n+2n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(na_nb_n+2n^2a_n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(n^2a_n\right)\times\left(\frac{b_n}{n}\right)+2n^2a_n\right\}$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}n^2a_n\right)\times\left(\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}\right)+2\lim_{n\to\infty}n^2a_n$$

$=3\times5+2\times3=21$

20) [정답] ⑤

[해설]

$b_n=3a_n-5n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}b_n=2,\ a_n=\frac{b_n+5n}{3}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{4n^2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{4n^2}\times\frac{b_n+5n}{3}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(b_n\times\frac{1}{n}+5\right)}{12}$

$=\frac{(2+0)(2\times0+5)}{12}=\frac{5}{6}$

21) [정답] ⑤

[해설]

$\frac{a_n+2}{2}=b_n$라 하면 $\lim_{n\to\infty}b_n=6$이고 $a_n=2b_n-2$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2b_n-2)+1}{(2b_n-2)+2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2b_n-2)n+1}{2n+2b_n-2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n-2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2b_n-2}{n}}$

$=\frac{2\times6-2}{2}$

$=5$

22) [정답] ①

[해설]

$\frac{3n^2-n}{n^2+1}<na_n<\frac{3n^2+2n}{n^2+1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{n^2+1}\le\lim_{n\to\infty}na_n\le\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2+1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{n^2+1}=3,\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n}{n^2+1}=3$

따라서 $\lim_{n\to\infty}na_n=3$

23) [정답] ②

[해설]

$2n^2-3<a_n<2n^2+4$에서

$\sum_{k=1}^{n}(2k^2-3)<S_n<\sum_{k=1}^{n}(2k^2+4)$

이때

$\sum_{k=1}^{n}(2k^2-3)=2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-3n$

$=\frac{n(2n^2+3n-8)}{3}$

$\sum_{k=1}^{n}(2k^2+4)=2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+4n$

$=\frac{n(2n^2+3n+13)}{3}$

$\frac{n(2n^2+3n-8)}{3n^3}<\frac{S_n}{n^3}<\frac{n(2n^2+3n+13)}{3n^3}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n^2+3n-8)}{3n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n^2+3n+13)}{3n^3}=\frac{2}{3}$

이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}=\frac{2}{3}$

24) [정답] ①

[해설]

$a_n^2<4na_n+n-4n^2$에서 $a_n^2-4na_n+4n^2<n$

$(a_n-2n)^2<n,\ 2n-\sqrt{n}<a_n<2n+\sqrt{n}$

$2-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{a_n}{n}<2+\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3n}{2n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n}+3}{2+\frac{4}{n}}=\frac{2+3}{2+0}=\frac{5}{2}$

25) [정답] 9

[해설]

수열 $\{(x^2-6x+9)^n\}$이 수렴하므로 $-1<x^2-6x+9\le 1$

즉, $(x-3)^2\le 1$에서 $2\le x\le 4$

따라서 만족하는 정수 x는 $x=2,\ 3,\ 4$이므로 합은

$2+3+4=9$

26) [정답] ②

[해설]

$$\frac{(4x-1)^n}{2^{3n}+3^{2n}}=\frac{(4x-1)^n}{8^n+9^n}=\frac{\left(\frac{4x-1}{9}\right)^n}{\left(\frac{8}{9}\right)^n+1}$$ 에서 $n\to\infty$일 때,

$\left(\frac{8}{9}\right)^n\to 0$이므로 주어진 수열이 수렴하려면 등비수열 $\left\{\left(\frac{4x-1}{9}\right)^n\right\}$이 수렴해야 한다.

$-1<\frac{4x-1}{9}\le 1$에서 $-2<x\le\frac{5}{2}$이므로 수열 $\left\{\frac{(4x-1)^n}{2^{3n}+3^{2n}}\right\}$이 수렴하기 위한 모든 정수 x의 개수는 4이다.

27) [정답] ③

[해설]

$-1<\frac{|k|}{3}-2\le 1,\ 3<|k|\le 9$

$k=\pm4,\ \pm5,\ \cdots,\ \pm9,$ 12 개

28) [정답] ①

[해설]

수열 $\{a_n\}$이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2-4x}{5}\le 1$에서

$$\begin{cases} x^2-4x+5>0 \\ x^2-4x-5\le 0 \end{cases}$$

$x^2-4x+5>0$에서 $(x-2)^2+1>0$이므로 모든 정수 x에 대하여 부등식이 성립한다.

$x^2-4x-5\le 0$에서

$(x+1)(x-5)\le 0,\ -1\le x\le 5$

따라서 모든 정수 x의 개수는 7이다.

29) [정답] ⑤

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^{n+1}}{3^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+3}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\frac{0+3}{1+0}=3$$

30) [정답] ③

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^{n+1}+5}{3^n+2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+5\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{6+5\times0}{1+2\times0}$$

$$=6$$

31) [정답] ②

[해설]

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{(-2)^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}=\frac{2\times0+\frac{1}{3}}{0+1}=\frac{1}{3}$$

32) [정답] ④

[해설]

(ⅰ) $1\le r<3$일 때

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{3}\right)^n=0$이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+r^{n+1}}{3^n+7\times r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\times r\times\left(\frac{r}{3}\right)^n}{1+7\times\left(\frac{r}{3}\right)^n}=1$$

이므로 r는 1, 2

(ⅱ) $r=3$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3^{n+1}}{3^n+7\times3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times3^n}{8\times3^n}=\frac{1}{2}$$

이므로 주어진 식은 성립하지 않는다.

(ⅲ) $r>3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{r}\right)^n=0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+r^{n+1}}{3^n+7\times r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{r}\right)^n+r}{\left(\frac{3}{r}\right)^n+7}=\frac{r}{7}=1$$

이므로 r는 7

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 주어진 식이 성립하도록 하는 자연수 r는 1, 2, 7

따라서 모든 r의 값의 합은 $1+2+7=10$

33) [정답] ④

[해설]

$a_{n+1}=a_1a_n$ 이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a_1, 공비가 a_1 인 등비수열이다.

그러므로 $a_n=a_1^{\,n}(a_1>0)$

(ⅰ) $0<a_1<1$ 인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1}=-5\neq12$$

(ⅱ) $a_1=1$ 인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1}=-\frac{2}{3}\neq12$$

(ⅲ) $a_1>1$ 인 경우

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_{n+3}-5}{2a_n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3a_1^{\,3}-\frac{5}{a_n}}{2+\frac{1}{a_n}}=\frac{3}{2}a_1^{\,3}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

$\frac{3}{2}a_1^{\,3}=12,\ a_1^{\,3}=8$

따라서 $a_1=2$

34) [정답] ⑤

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$a_n=ar^{n-1}$$

이때, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a\times\frac{r^{n-1}}{4^n}+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{2}}$이고 극한값이 3으로 존재하므로

$r=4$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{a}{4}+0}{0+\frac{1}{2}}=\frac{a}{2}$$

$\frac{a}{2}=3$ 에서 $a=6$

$\therefore\ a_2=ar=24$

35) [정답] 5

[해설]

$A_n(n,\ 0)$, $B_n(n,\ 3)$에서 $\overline{OA_n}=n$, $\overline{OB_n}=\sqrt{n^2+9}$

직선 OB_n의 방정식은 $y=\frac{3}{n}x$이므로

점 C_n의 좌표는 $\left(1,\ \frac{3}{n}\right)$이고 $\overline{PC_n}=\frac{3}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{PC_n}}{\overline{OB_n}-\overline{OA_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}}{\sqrt{n^2+9}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+\frac{9}{n^2}}+1\right)=\frac{2}{3}$$

$p=3,\ q=2$이므로 $p+q=5$

36) [정답] 5

[해설]

$f(x)=x(x-n)(x-3n^2)$
$=x^3-(3n^2+n)x^2+3n^3x$

$f'(x)=3x^2-2(3n^2+n)x+3n^3$

$f'(x)=0$ 에서

$x=\dfrac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

또는 $x=\dfrac{3n^2+n+\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$x=\dfrac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$ 에서 극댓값을 갖는다.

즉 $a_n=\dfrac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3n}$

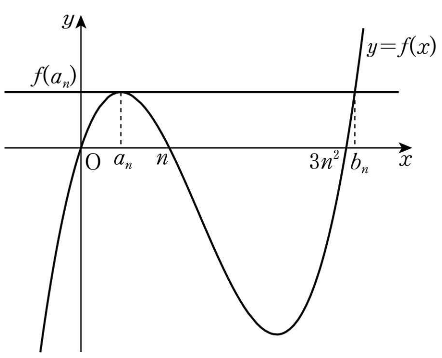
$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1-\sqrt{9n^2-3n+1}}{3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+1)^2-(9n^2-3n+1)}{3\left(3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1}\right)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{3+\dfrac{1}{n}+\sqrt{9-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}$

$=\dfrac{1}{2}$



방정식 $f(x)-f(a_n)=0$은 $x=a_n$을 중근으로 가지고, a_n이 아닌 근이 b_n이므로

$f(x)-f(a_n)=(x-a_n)^2(x-b_n)$

$x=0$을 대입하면 $f(0)=0$이므로 $f(a_n)=a_n^2b_n$에서

$a_n^2b_n=a_n^3-(3n^2+n)a_n^2+3n^3a_n$

양변을 n^3a_n으로 나누면

$\dfrac{a_nb_n}{n^3}=\dfrac{a_n^2-(3n^2+n)a_n+3n^3}{n^3}$

이때

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_nb_n}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2-(3n^2+n)a_n+3n^3}{n^3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{n}\times\left(\dfrac{a_n}{n}\right)^2-\dfrac{3n^2+n}{n^2}\times\dfrac{a_n}{n}+3\right\}$

$=0-3\times\dfrac{1}{2}+3=\dfrac{3}{2}$

$p=2,\ q=3$ 이므로

$p+q=5$

37) [정답] ①

[해설]

점 A_n의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라 하면

규칙 (나)에서 $x_{2n}=x_{2n-1}+a,\ y_{2n}=y_{2n-1}$

규칙 (다)에서 $x_{2n+1}=x_{2n},\ y_{2n+1}=y_{2n}+(a+1)$

$x_{2n+2}=x_{2n+1}+a=x_{2n}+a$

$y_{2n+2}=y_{2n+1}=y_{2n}+(a+1)$

즉 두 수열 $\{x_{2n}\},\ \{y_{2n}\}$은 공차가 각각 $a,\ a+1$인 등차수열이고, 규칙 (가)에서

$x_2=x_1+a=a,\ y_2=y_1=0$이므로

$x_{2n}=a+(n-1)a=an,$

$y_{2n}=0+(n-1)(a+1)=(a+1)(n-1)$

그러므로

$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{2n}}^2=x_{2n}{}^2+y_{2n}{}^2$

$=a^2n^2+(a+1)^2(n-1)^2$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{2n}}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{a^2n^2+(a+1)^2(n-1)^2}}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a^2+(a+1)^2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2}$

$=\sqrt{2a^2+2a+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_{2n}}}{n}=\dfrac{\sqrt{34}}{2}$에서 $\sqrt{2a^2+2a+1}=\dfrac{\sqrt{34}}{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4a^2+4a-15=0,\ (2a+5)(2a-3)=0,$

$a=-\dfrac{5}{2}$ 또는 $a=\dfrac{3}{2}$

따라서 양수 a의 값은 $\dfrac{3}{2}$이다.

38) [정답] **2**

[해설]

점 $(n,\ n)$에서 직선 $y=x$와 접하는 원의 중심은 직선 $y=-x+2n$ 위에 있으므로 $b_n=-a_n+2n$

원의 중심이 두 점 $(n,\ n)$, $(1,\ 0)$으로부터 같은 거리만큼 떨어져 있으므로

$$(a_n-n)^2+\{(-a_n+2n)-n\}^2=(a_n-1)^2+(-a_n+2n)^2$$

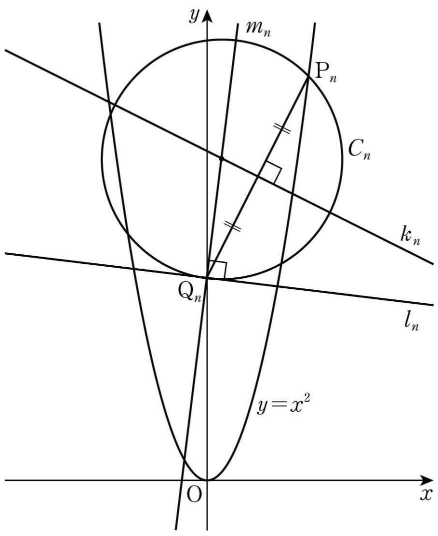
$$a_n=\frac{2n^2+1}{2},\ b_n=-\frac{2n^2+1}{2}+2n$$

$$a_n-b_n=2n^2-2n+1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-b_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-2n+1}{n^2}=2$$

39) [정답] 12

[해설]



점 Q_n을 지나고 직선 l_n에 수직인 직선을 m_n이라 하면 원 C_n의 중심은 직선 m_n 위에 존재한다. 직선 m_n은 곡선 $y=x^2$ 위의 점 P_n에서의 접선과 평행하고 $y'=2x$이므로 직선 m_n의 기울기는 $4n$이다. 직선 m_n이 점 Q_n을 지나므로 직선 m_n의 방정식은

$$y=4nx+2n^2$$

선분 P_nQ_n의 수직이등분선을 k_n이라 하면 원 C_n의 중심은 직선 k_n 위에 존재한다.
직선 P_nQ_n의 기울기는 n, 선분 P_nQ_n의 중점의 좌표는 $(n,\ 3n^2)$이므로 직선 k_n의 방정식은

$$y=-\frac{1}{n}(x-n)+3n^2$$

$$y=-\frac{1}{n}x+3n^2+1$$

원 C_n의 중심은 두 직선 m_n, k_n의 교점이므로 원 C_n의 중심의 좌표를 $(x_n,\ y_n)$이라 하면

$$4nx_n+2n^2=-\frac{1}{n}x_n+3n^2+1\text{에서}$$

$$\left(4n+\frac{1}{n}\right)x_n=n^2+1$$

$$x_n=\frac{n^3+n}{4n^2+1}$$

$$y_n=4n\times\frac{n^3+n}{4n^2+1}+2n^2=\frac{12n^4+6n^2}{4n^2+1}$$

원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선은 이 원의 중심을 지나야 하므로

$$a_n=\frac{y_n}{x_n}=\frac{12n^4+6n^2}{n^3+n}=\frac{12n^3+6n}{n^2+1}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+6}{n^2+1}=12$$

40) [정답] 80

[해설]

점 P_n의 x좌표를 t라 하면 y좌표는 $\frac{\sqrt{3}}{n+1}t^2$

$\overline{OP_n}=2n+2$이므로 $\sqrt{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{n+1}t^2\right)^2}=2n+2$에서

$t=n+1$

직각삼각형 P_nOH_n에서 $\overline{OH_n}:\overline{P_nH_n}=1:\sqrt{3}$이므로

$\tan(\angle P_nOH_n)=\sqrt{3}$즉 $\angle P_nOH_n=\frac{\pi}{3}$

$\angle R_nP_nH_n=2\times\angle OP_nH_n=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

점 R_n을 포함하지 않는 호 Q_nH_n과 선분 OH_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $h(n)$이라 하자.
(i) 곡선 T_n과 x축 및 선분 P_nH_n으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $f(n)+h(n)$이므로

$$f(n)+h(n)=\int_0^{n+1}\frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2dx$$

$$=\left[\frac{\sqrt{3}}{3(n+1)}x^3\right]_0^{n+1}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}(n+1)^2\ \cdots\cdots\ ㉠$$

(ii) 점 Q_n을 포함하는 호 R_nH_n과 두 선분 OR_n, OH_n으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $g(n)+h(n)$이고, 이 값은 사각형 $OH_nP_nR_n$의 넓이에서 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴

$P_nR_nH_n$의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$$g(n)+h(n)=2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{OH_n}\times\overline{P_nH_n}\right)-\frac{1}{2}\times\overline{P_nH_n}^2\times\frac{\pi}{3}$$

$$=\sqrt{3}(n+1)^2-\frac{\pi(n+1)^2}{2}$$

$$=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)(n+1)^2 \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$f(n)-g(n)=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)(n+1)^2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)(n+1)^2}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

그러므로 $k=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 $60k^2=60\times\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=80$

41) [정답] ③

[해설]

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2=4+n^2$$

$$\overline{BC}=\sqrt{n^2+4}$$

선분 AD가 $\angle A$의 이등분선이므로

$$\overline{BD}:\overline{CD}=2:n$$

즉 $a_n=\overline{CD}=\frac{n}{n+2}\times\overline{BC}=\frac{n\sqrt{n^2+4}}{n+2}$

$$\lim_{n\to\infty}(n-a_n)=\lim_{n\to\infty}\left(n-\frac{n\sqrt{n^2+4}}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n+2-\sqrt{n^2+4}\right)}{n+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{n+2}\times\frac{(n+2)^2-(n^2+4)}{n+2+\sqrt{n^2+4}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\times\frac{4n}{n+2+\sqrt{n^2+4}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}}\times\frac{4}{1+\frac{2}{n}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}\right)$$

$$=2$$

42) [정답] ③

[해설]

(i) $|x|>1$일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x+\frac{2}{x^{2n-1}}}{3+\frac{1}{x^{2n}}}$$

$$=\frac{a-2}{3}x$$

(ii) $|x|<1$일 때

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}=2x$$

(iii) $x=1$일 때

$$f(1)=\frac{a}{4}$$

(iv) $x=-1$일 때

$$f(-1)=-\frac{a}{4}$$

(i)~(iv)에서 $f(1)=\frac{a}{4}$이므로

$$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{5}{4}$$

㉠ $\left|\frac{a}{4}\right|>1$, 즉 $|a|>4$일 때

$f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a-2}{3}\times\frac{a}{4}=\frac{5}{4}$에서

$$a^2-2a-15=0$$

$$(a-5)(a+3)=0$$

$|a|>4$이므로 $a=5$

㉡ $\left|\frac{a}{4}\right|<1$, 즉 $|a|<4$일 때

$f\left(\frac{a}{4}\right)=2\times\frac{a}{4}=\frac{5}{4}$에서 $a=\frac{5}{2}$

㉢ $\frac{a}{4}=1$, 즉 $a=4$일 때

$$f\left(\frac{a}{4}\right)=f(1)=1\neq\frac{5}{4}$$

㉣ $\frac{a}{4}=-1$, 즉 $a=-4$일 때

$$f\left(\frac{a}{4}\right)=f(-1)=1\neq\frac{5}{4}$$

따라서 모든 a의 값은 $a=5$ 또는 $a=\frac{5}{2}$이고, 그 합은

$$5+\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$$

43) [정답] ②

[해설]

(ⅰ) $\left|\dfrac{x}{4}\right|>1$ 즉, $|x|>4$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x}{4}\right)^{2n}=\infty$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}+3}=\frac{2\times\frac{x}{4}-0}{1+0}=\frac{x}{2}$$

(ⅱ) $\left|\dfrac{x}{4}\right|<1$ 즉, $|x|<4$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x}{4}\right)^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}+3}=\frac{0-1}{0+3}=-\frac{1}{3}$$

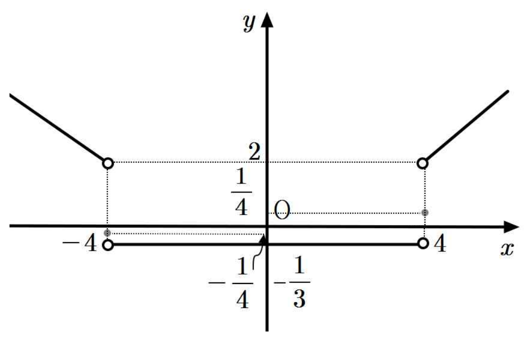
(ⅲ) $x=4$일 때,

$$f(4)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}+3}=\frac{2\times1-1}{1+3}=\frac{1}{4}$$

(ⅳ) $x=-4$일 때,

$$f(-4)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{x}{4}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{4}\right)^{2n}+3}=\frac{2\times(-1)-1}{1+3}=-\frac{1}{4}$$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여 그래프를 그리면 다음과 같다.



따라서 위의 그래프에서 $f(k)=-\dfrac{1}{3}$을 만족시키는 k는 $|k|<4$인 경우이므로 만족하는 정수 k의 값은

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

즉, 7개다.

44) [정답] ④

[해설]

$|x|>2$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{x}\right)^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}x-\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}$$

$$=\frac{\frac{3}{2}x-0}{1+0}=\frac{3}{2}x$$

$x=2$일 때, $f(2)=\dfrac{3-1}{1+1}=1$

$x=-2$일 때, $f(-2)=\dfrac{-3-1}{1+1}=-2$

$|x|<2$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

그러므로

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x & (|x|>2)\\ 1 & (x=2)\\ -2 & (x=-2)\\ -1 & (|x|<2)\end{cases}$$

$|k|>2$이면 $f(k)=\dfrac{3}{2}k$이므로 $|k|>2$에서

$f(k)=k$를 만족시키지 않는다.

$k=2$이면 $f(2)=1$이므로 $k=2$에서

$f(k)=k$를 만족시키지 않는다.

$k=-2$이면 $f(-2)=-2$이므로 $k=-2$에서

$f(k)=k$를 만족시킨다.

$|k|<2$이면 $f(k)=-1$이므로 $k=-1$에서

$f(k)=k$를 만족시킨다.

따라서 $f(k)=k$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $-2+(-1)=-3$

45) [정답] 28

[해설]

함수 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $|x|<1$이면 $\lim x^n=0$이므로 $f(x)=-1$

(ⅱ) $x=1$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=1$이므로 $f(x)=\dfrac{1}{2}$

(ⅲ) $x=-1$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=1$

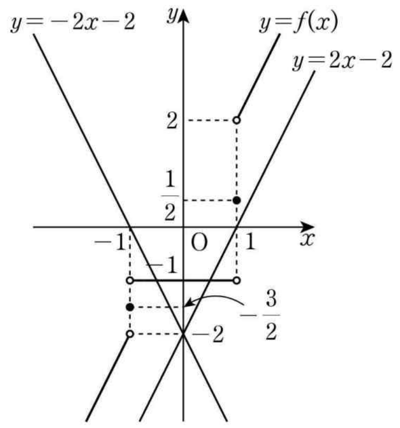
이므로 $f(x)=-\frac{3}{2}$

(iv) $|x|>1$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x-\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}=2x$$

그러므로 $f(x)=\begin{cases}-1 & (-1<x<1)\\ \frac{1}{2} & (x=1)\\ -\frac{3}{2} & (x=-1)\\ 2x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=tx-2$는 점 $(0,\ -2)$를 지나므로 기울기 t의 값에 따른 교점의 개수 $g(t)$를 구해 보면

$-1\le t<-\frac{1}{2}$ 또는 $-\frac{1}{2}<t\le 0$일 때 $g(t)=0$

$t<-1$ 또는 $t=-\frac{1}{2}$ 또는 $0<t\le 1$ 또는 $t=2$

또는 $t\ge 4$일 때 $g(t)=1$

$1<t<2$ 또는 $2<t<\frac{5}{2}$ 또는 $\frac{5}{2}<t<4$일 때 $g(t)=2$

$t=\frac{5}{2}$일 때 $g(t)=3$

즉 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값은

$-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1,\ 2,\ \frac{5}{2},\ 4$

이므로 $m=7,\ a_m=4$

따라서 $m\times a_m=7\times 4=28$

46) [정답] ②

[해설]

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}$$

47) [정답] ⑤

[해설]

$$\log a_n+\log a_{n+1}+\log b_n=0$$

$$\log a_n a_{n+1} b_n=0,\ a_n a_{n+1} b_n=1$$

$$b_n=\frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

$$=\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{3n+a_1}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{a_1}=\frac{1}{12}$$

따라서 $a_1=4$

48) [정답] ②

[해설]

$a_n+2b_n-7=c_n$이라 하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}c_n=0$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{c_n - a_n + 7}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} c_n - \lim_{n\to\infty} a_n + 7\right) = 2$$

49) [정답] ③

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 4이므로 공차를 d라 하면

$a_n = 4 + (n-1)d$

이때, 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4+(n-1)d}{n} - \frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{d+\frac{4-d}{n}}{1} - \frac{3+\frac{7}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)$$

$=d-3=0$

그러므로

$d=3$

이때, $a_n = 3n+1$이므로 주어진 급수에 대입하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n} - \frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n} - \frac{3n+7}{n+2}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(3+\frac{1}{n}\right) - \left(3+\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}$$

50) [정답] ①

[해설]

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n} = 10$에서 급수가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 0$

…… ㉠

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n + 2a_n^2 + 3n^2}{a_n^2 + n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n + 2a_n^2 + 3n^2)\times\frac{1}{n^2}}{(a_n^2+n^2)\times\frac{1}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n^2} + 2\left(\frac{a_n}{n}\right)^2 + 3}{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2 + 1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{n^2} + 2\left(\frac{a_n}{n}\right)^2 + 3}{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2 + 1} \quad (\because ㉠)$$

$$=\frac{3}{1}=3$$

51) [정답] ④

[해설]

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n} - 2\right)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = 2$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2 + 3na_n}{n^2+4} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+3\times\frac{a_n}{n}}{1+\frac{4}{n^2}}$

$$=\frac{2+3\times 2}{1+0} = 8$$

52) [정답] ③

[해설]

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - 4n}{n} = 1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n} - 4\right) = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{a_n}{n}-4\right)+4\right\} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-4\right) + \lim_{n\to\infty}4$$

$0+4=4$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+a_n}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{a_n}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{5+4}{3-0}=3$$

53) [정답] ③

[해설]

$\{a_n\}$이 등비수열이므로 $a_n=a\times r^n$으로 놓으면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a\times r^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a\times\left(\frac{r}{3}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a\times\left(\frac{r}{3}\right)^n=\frac{1}{6}$이어야 한다.

즉, $a=\frac{1}{6}$, $r=3$

따라서 $a_n=\frac{1}{6}\times 3^n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=6\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$$

54) [정답] 2

[해설]

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$a_{2n-1}-a_{2n}=a_{2n-1}-r\times a_{2n-1}=(1-r)a_{2n-1}$

이므로 수열 $\{a_{2n-1}-a_{2n}\}$은 첫째항이 $a_1-a_2=(1-r)a$,

공비가 r^2인 등비수열이다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3$이므로 $r^2<1$, 즉 $-1<r<1$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=\frac{(1-r)a}{1-r^2}=3$$

$r\neq 1$이므로 $\frac{a}{1+r}=3\cdots\cdots$ ㉠

수열 $\{a_n^2\}$은 첫째항이 $a_1^2=a^2$, 공비가 r^2인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{a^2}{1-r^2}=6\cdots\cdots \text{ ㉡}$$

㉠에 의하여 $\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{a}{1+r}\times\frac{a}{1-r}=3\times\frac{a}{1-r}$이므로 ㉡에서

$3\times\frac{a}{1-r}=6$, $\frac{a}{1-r}=2$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a}{1-r}=2$

55) [정답] 13

[해설]

$|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{b}{x}+\frac{1}{x^{2n-1}}}{1+\frac{2}{x^{2n}}}=a+\frac{b}{x}$$

$x=1$일 때, $f(1)=\frac{a+b+1}{3}$

$x=-1$일 때, $f(-1)=\frac{a-b-1}{3}$

$|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n}+bx^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}=\frac{0+0+x}{0+2}=\frac{x}{2}$$

따라서

$$f(x)=\begin{cases}a+\frac{b}{x} & (|x|>1)\\ \frac{a+b+1}{3} & (x=1)\\ \frac{a-b-1}{3} & (x=-1)\\ \frac{x}{2} & (|x|<1)\end{cases}$$

함수 $g(x)=2(x-1)+m$이라 하면

방정식 $f(x)=2(x-1)+m$의 실근의 개수는

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수와 같다.

$x<-1$에서 $f(x)$는 감소하고 $x>1$에서 $f(x)$는 감소하므로

$|x|>1$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수의 최댓값은 2이고,

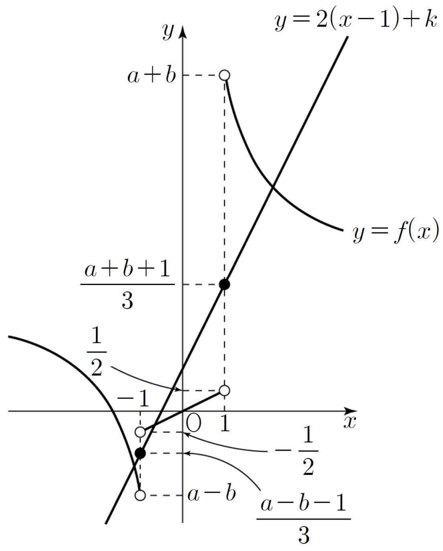
$|x|<1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인

일차함수이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수의 최댓값은 1이다.

그러므로 $c_k=5$인 자연수 k가 존재하려면

$f(1)=g(1)$, $f(-1)=g(-1)$이어야 하고,

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같아야 한다.



즉, 직선 $y=2(x-1)+k$는

두 점 $\left(1,\ \frac{a+b+1}{3}\right)$, $\left(-1,\ \frac{a-b-1}{3}\right)$을 지나므로

$\frac{a+b+1}{3}=k$, $\frac{a-b-1}{3}=k-4$에서

$b=5$

$k=\frac{a}{3}+2$가 자연수이므로 a는 3의 배수이다. …… ㉠

$\lim_{x\to-1-}f(x)<f(-1)<\lim_{x\to-1+}f(x)$이어야 하므로

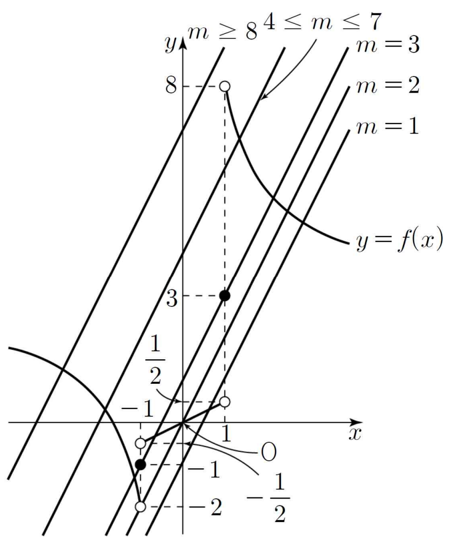
$a-5<\frac{a}{3}-2<-\frac{1}{2}$에서 $a<\frac{9}{2}$

…… ㉡

$a>0$이므로 $\frac{1}{2}<\frac{a}{3}+2<a+5$가 성립하며

$\lim_{x\to1-}f(x)<f(1)<\lim_{x\to1+}f(x)$를 만족시킨다.

㉠, ㉡에 의해 $0<a<\frac{9}{2}$이므로 $a=3$, $k=3$



(ⅰ) $m=1$일 때

$g(-1)=-3$, $g(1)=1$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $-1<x<1$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.

그러므로 $c_1=2$

(ⅱ) $m=2$일 때

$g(-1)=-2$, $g(1)=2$이므로 $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x=0$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.

그러므로 $c_2=2$

(ⅲ) $m=3$일 때

$m=k=3$이므로 $c_3=5$

(ⅳ) $4\le m\le7$일 때

$g(-1)>\lim_{x\to-1+}f(x)=-\frac{1}{2}$,

$g(1)<\lim_{x\to1+}f(x)=8$이므로

$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x<-1$, $x>1$에서 각각 1개씩 교점을 갖는다.

그러므로 $c_m=2$

(ⅴ) $m\ge8$일 때

$g(-1)>\lim_{x\to-1+}f(x)=-\frac{1}{2}$,

$g(1)\ge\lim_{x\to1+}f(x)=8$이므로

$y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 $x<-1$에서 1개의 교점을 갖는다.

그러므로 $c_m=1$

(ⅰ)~(ⅴ)에 의해

$$k+\sum_{m=1}^{\infty}(c_m-1)=3+1+1+4+1\times4=13$$

56) [정답] ②

[해설]

직선 $y=x+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로 선분 P_nQ_n을 대각선으로 하는 정사각형의 각 변은 x축 또는 y축과 평행하다.

점 P_n의 x좌표를 α_n, 점 Q_n의 x좌표를 β_n이라 하면 정사각형의 한 변의 길이는 $|\alpha_n-\beta_n|$이므로

$a_n=(\alpha_n-\beta_n)^2$……㉠

α_n, β_n은 이차방정식

$x^2-2nx-2n=x+1$

$x^2-(2n+1)x-(2n+1)=0$

의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에

의하여 $\alpha_n+\beta_n=2n+1,\ \alpha_n\beta_n=-2n-1$

㉠에서

$a_n=(\alpha_n-\beta_n)^2$
$=(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n$
$=(2n+1)^2-4(-2n-1)$
$=4n^2+12n+5$
$=(2n+1)(2n+5)$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+5)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+5}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+5}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{8}{15}=\frac{2}{15}$$

57) [정답] ②

[해설]

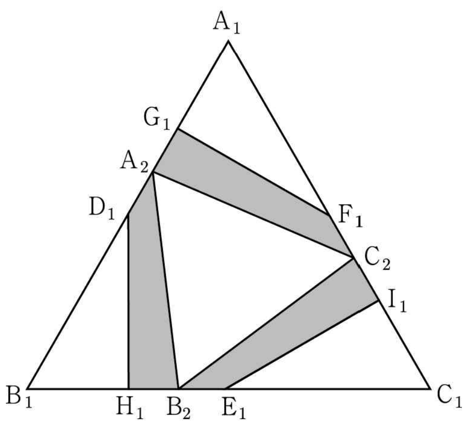


그림 R_1에서 사각형 $A_2C_2F_1G_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times3\times\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\times4\times2\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{7\sqrt{3}}{4}$세 사각형

$A_2C_2F_1G_1$, $B_2A_2D_1H_1$, $C_2B_2E_1I_1$의 넓이는 모두 같으므로

$S_1=\frac{21\sqrt{3}}{4}$

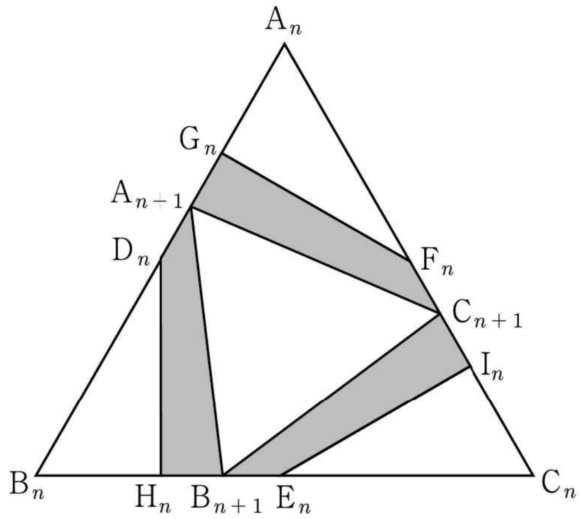


그림 R_n에서 세 사각형 $A_{n+1}C_{n+1}F_nG_n$, $B_{n+1}A_{n+1}D_nH_n$, $C_{n+1}B_{n+1}E_nI_n$의 넓이의 합을 T_n이라 하자.

삼각형 $A_nB_nC_n$과 삼각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$이

닮음이므로 정삼각형 $A_nB_nC_n$의 한 변의 길이는

l_n이라 하면 $\overline{A_nC_{n+1}}=\frac{5}{8}l_n$, $\overline{A_nA_{n+1}}=\frac{3}{8}l_n$

삼각형 $A_nA_{n+1}C_{n+1}$에서 코사인법칙을

이용하여 $\overline{A_{n+1}C_{n+1}}$의 길이 l_{n+1}을 구하면 $(l_{n+1})^2$

$=\left(\frac{5}{8}l_n\right)^2+\left(\frac{3}{8}l_n\right)^2-2\times\frac{5}{8}l_n\times\frac{3}{8}l_n\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{19}{64}(l_n)^2$

$l_{n+1}=\frac{\sqrt{19}}{8}l_n$이고 $l_n:l_{n+1}=1:\frac{\sqrt{19}}{8}$

$T_n:T_{n+1}=1:\frac{19}{64}$이고 $T_{n+1}=\frac{19}{64}T_n$

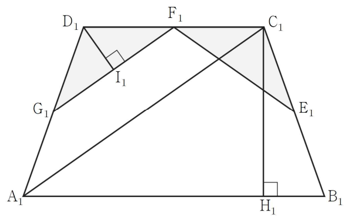
$\{T_n\}$은 첫째항이 $T_1=S_1=\frac{21\sqrt{3}}{4}$이고

공비가 $\frac{19}{64}$인 등비수열이다.

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\frac{21\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{19}{64}}=\frac{112\sqrt{3}}{15}$$

58) [정답] ⑤

[해설]



점 C_1에서 선분 A_1B_1에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면

직각삼각형 $C_1H_1B_1$에서 $\overline{B_1H_1}=2$이므로

$\overline{C_1H_1}=\sqrt{6^2-4^2}=4\sqrt{2}$이고,

직각삼각형 $A_1H_1C_1$에서

$$\overline{A_1C_1}=\sqrt{8^2+(4\sqrt{2})^2}=4\sqrt{6}$$

삼각형 $A_1C_1D_1$과 삼각형 $G_1F_1D_1$은 서로 닮음이고

닮음비가 $2:1$이므로 $\overline{G_1F_1}=2\sqrt{6}$

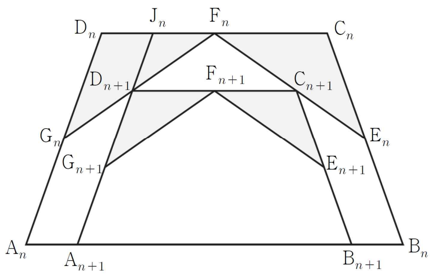
점 D_1에서 선분 G_1F_1에 내린 수선의 발을 I_1이라 하면

직각삼각형 $D_1I_1F_1$에서

$$\overline{D_1I_1}=\sqrt{3^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{3}$$

$$S_1=2\times\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times\sqrt{3}=6\sqrt{2}$$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



사다리꼴 $A_nB_nC_nD_n$에서 $\overline{A_nB_n}:\overline{A_nD_n}=5:3$이고, 사다리꼴 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$에서

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}:\overline{A_{n+1}D_{n+1}}=5:3$이므로 두 선분 A_nD_n과 $A_{n+1}D_{n+1}$이 서로 평행하다.

직선 $A_{n+1}D_{n+1}$이 선분 C_nD_n과 만나는 점을 J_n이라 하자.

두 삼각형 $G_nF_nD_n$, $D_{n+1}F_nJ_n$은 서로 닮음이고,

$\angle D_nF_nG_n=\angle C_{n+1}D_{n+1}F_n$이므로 두 삼각형 $G_nF_nD_n$, $D_{n+1}C_{n+1}F_n$은 서로 닮음이다.

$\overline{D_nC_n}=a_n$, $\overline{D_{n+1}C_{n+1}}=a_{n+1}$이라 하면 이등변삼각형

$D_{n+1}C_{n+1}F_n$에서 $\overline{D_{n+1}C_{n+1}}:\overline{D_{n+1}F_n}=2\sqrt{6}:3$이므로

$\overline{D_{n+1}F_n}=\dfrac{3}{2\sqrt{6}}\overline{D_{n+1}C_{n+1}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}a_{n+1}$이고, 이등변삼각형

$D_{n+1}F_nJ_n$에서 $\overline{D_{n+1}F_n}:\overline{D_{n+1}J_n}=2\sqrt{6}:3$이므로

$$\overline{D_{n+1}J_n}=\frac{3}{2\sqrt{6}}\overline{D_{n+1}F_n}=\frac{3}{8}a_{n+1}$$

$\overline{A_{n+1}J_n}=\overline{A_{n+1}D_{n+1}}+\overline{D_{n+1}J_n}$이므로

$$a_n=\overline{A_{n+1}J_n}=a_{n+1}+\frac{3}{8}a_{n+1}=\frac{11}{8}a_{n+1}$$

$a_{n+1}=\dfrac{8}{11}a_n$이므로 두 사다리꼴 $A_nB_nC_nD_n$과

$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가 $11:8$이므로 넓이의 비는

$121:64$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $6\sqrt{2}$이고 공비가 $\dfrac{64}{121}$인 등비수열의

첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{6\sqrt{2}}{1-\frac{64}{121}}=\frac{242}{19}\sqrt{2}$$

59) [정답] ①

[해설]

그림 R_n에서 $\angle B_{n+1}AD_n=\angle D_nAC_n$이므로

$\overset{\frown}{B_{n+1}D_n}=\overset{\frown}{D_nC_n}$ 이다.

따라서, $\overline{B_{n+1}D_n}=\overline{D_nC_n}$이므로 두 선분 B_nB_{n+1}, B_nD_n과

호 $B_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 부분과 선분 C_nD_n과 호 C_nD_n으로

둘러싸인 부분의 넓이의 합은 삼각형 $B_nD_nB_{n+1}$의 넓이와

같다.

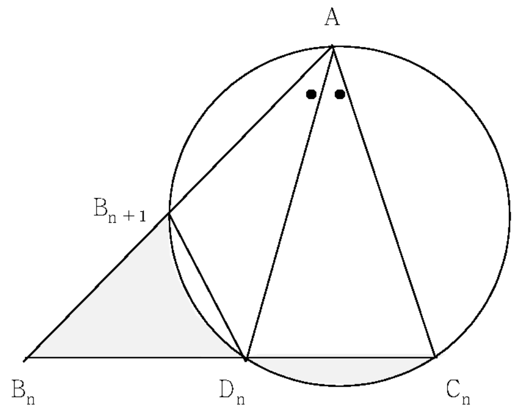


그림 R_1의 삼각형 AB_1C_1에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{B_1C_1}^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=7$$

즉, $\overline{B_1C_1}=\sqrt{7}$

또한, $\angle B_1AC_1$의 이등분선이 선분 B_1C_1과 만나는 점이

D_1이므로 $\overline{AB_1}:\overline{AC_1}=\overline{B_1D_1}:\overline{D_1C_1}=3:2$

따라서,

$$\overline{B_1D_1}=\frac{3\sqrt{7}}{5},\quad \overline{D_1C_1}=\frac{2\sqrt{7}}{5}$$

또한, 삼각형 AD_1C_1의 외접원의 중심을 O라 하면

$\angle D_1OC_1=\angle B_2OD_1=\dfrac{\pi}{3}$이므로 두 삼각형 D_1OC_1, B_2OD_1은

모두 정삼각형이고 $\angle B_2D_1C_1=\dfrac{2}{3}\pi$이다.

따라서, $\angle B_2D_1B_1=\dfrac{\pi}{3}$이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{7}}{5}\times\frac{2\sqrt{7}}{5}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{21\sqrt{3}}{50}$$

또한, 삼각형 $B_1D_1B_2$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{B_1B_2}^2=\left(\frac{3\sqrt{7}}{5}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{7}}{5}\right)^2-2\times\frac{3\sqrt{7}}{5}\times\frac{2\sqrt{7}}{5}\times\cos\frac{\pi}{3}=\frac{91}{25}-\frac{42}{25}=\frac{49}{25}$$

이므로 $\overline{B_1B_2}=\dfrac{7}{5}$

따라서, $\overline{\mathrm{AB}_2}=3-\frac{7}{5}=\frac{8}{5}$이므로

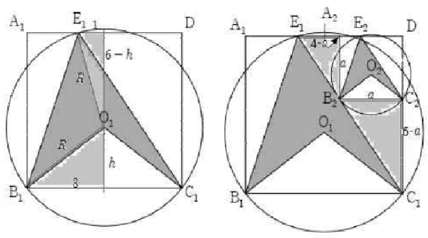
$\overline{\mathrm{AB}_1}:\overline{\mathrm{AB}_2}=3:\frac{8}{5}=1:\frac{8}{15}$

이때, 넓이의 비는 $1:\frac{64}{225}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{21\sqrt{3}}{50}}{1-\frac{64}{225}}=\frac{27\sqrt{3}}{46}$$

60) [정답] ②

[해설]



$R^2=9+h^2=1+(6-h)^2,\ h=\frac{7}{3}$

$S_1=\frac{1}{2}\times(6-h)\times 6=11$

$\frac{a}{4-a}=\frac{6-a}{a}$이므로 $a=\frac{12}{5}$ㄴ

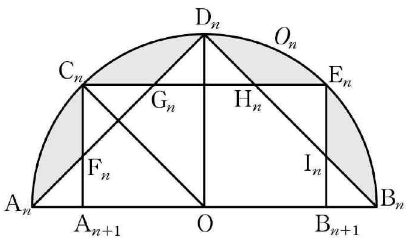
닮음비는 $r=\frac{\frac{12}{5}}{6}=\frac{2}{5}$

$\therefore\ S=\frac{11}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{275}{21}$

61) [정답] ②

[해설]

선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 중점을 O, 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n$이 두 선분 $\mathrm{C}_n\mathrm{A}_{n+1}$, $\mathrm{C}_n\mathrm{E}_n$과 만나는 점을 각각 F_n, G_n이라 하고, 선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n$이 두 선분 $\mathrm{C}_n\mathrm{E}_n$, $\mathrm{E}_n\mathrm{B}_{n+1}$과 만나는 점을 각각 H_n, I_n이라 하자.



반원 O_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, n번째 색칠되는 모양의 도형의 넓이를 a_n이라 하자.

두 점 C_n, D_n이 호 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 4등분점이므로

$\angle \mathrm{C}_n\mathrm{OA}_{n+1}=45°$, $\angle \mathrm{A}_n\mathrm{OD}_n=90°$,

$\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{A}_n}=\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{B}_n}$, $\angle \mathrm{C}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{O}=90°$

이므로 $\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}=\frac{r_n}{\sqrt{2}}$

삼각형 $\mathrm{D}_n\mathrm{G}_n\mathrm{H}_n$은 $\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{A}_n}=\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{H}_n}$인 직각삼각형이고,

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{G}_n}^2&=2\left(\overline{\mathrm{OD}_n}-\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}\right)^2\\&=2\left(r_n-\frac{r_n}{\sqrt{2}}\right)^2\\&=(\sqrt{2}-1)^2r_n^2\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{G}_n}=(\sqrt{2}-1)r_n$

(삼각형 $\mathrm{D}_n\mathrm{G}_n\mathrm{H}_n$의 넓이)

$=2\times$(삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{F}_n$의 넓이)

두 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{F}_n$, $\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{I}_n$이 합동이므로

$a_n=$(반원 O_n의 넓이)

$-$(사각형 $\mathrm{C}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{E}_n$의 넓이)

$-2\times$(삼각형 $\mathrm{D}_n\mathrm{G}_n\mathrm{H}_n$의 넓이)

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}\pi{r_n}^2-\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}\times\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}-\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{G}_n}^2\\&=\frac{1}{2}\pi{r_n}^2-\frac{2r_n}{\sqrt{2}}\times\frac{r_n}{\sqrt{2}}-(\sqrt{2}-1)^2{r_n}^2\\&=\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right)r_n^2\end{aligned}$$

$r_{n+1}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}=\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}=\frac{r_n}{\sqrt{2}}$이므로

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right)r_{n+1}^2\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-4\right)r_n^2\end{aligned}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2\pi+8\sqrt{2}-16$이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\\&=\frac{2\pi+8\sqrt{2}-16}{1-\frac{1}{2}}\\&=4\pi+16\sqrt{2}-32\end{aligned}$$

62) [정답] ③

[해설]

직각삼각형 $C_1D_1F_1$에서 $\angle C_1D_1F_1=\frac{\pi}{6}$, $\overline{C_1D_1}=1$이므로

$$\overline{C_1F_1}=\overline{C_1D_1}\times\tan\frac{\pi}{6}=1\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

직각삼각형 $C_1D_1E_1$에서 $\angle C_1D_1E_1=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\overline{C_1E_1}=\overline{C_1D_1}\times\tan\frac{\pi}{3}=1\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

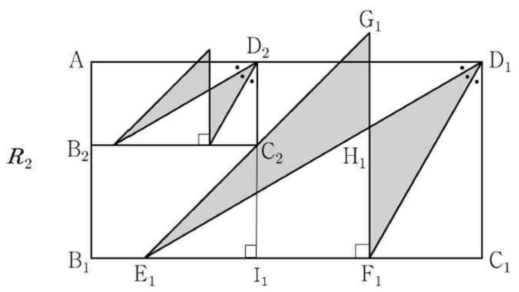
이때, $\overline{E_1F_1}=\overline{C_1E_1}-\overline{C_1F_1}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

직각삼각형 $E_1F_1H_1$에서 $\angle H_1E_1F_1=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\overline{F_1H_1}=\overline{E_1F_1}\times\tan\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}S_1&=\triangle E_1F_1G_1+\triangle E_1F_1D_1-2\times\triangle E_1F_1H_1\\&=\frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{F_1G_1}+\frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{C_1D_1}\\&\qquad-2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{F_1H_1}\right)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times1\\&\qquad-2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{2}{3}\right)\\&=\frac{6-\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

한편, $\overline{AB_2}$: $\overline{B_2C_2}=1$: 2이므로 $\overline{AB_2}=k$, $\overline{B_2C_2}=2k(k>0)$이라 하자.



점 C_2에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 I_1이라 하면

$\overline{E_1I_1}=\overline{C_2I_1}=1-k$, $\overline{I_1C_1}=2-2k$이므로

$$(1-k)+(2-2k)=\sqrt{3}$$

$$\therefore k=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

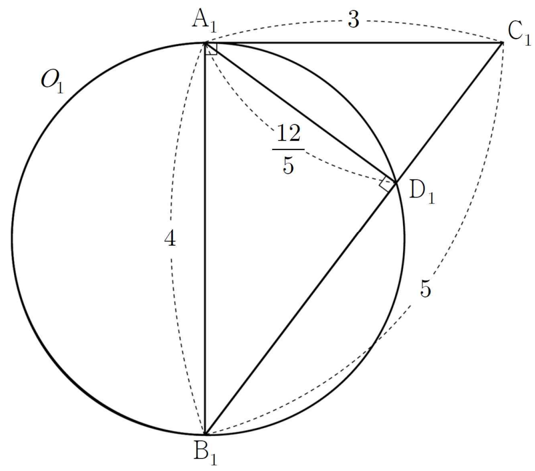
그림 R_1에 색칠되어 있는 도형과 그림 R_2에 새로 색칠되어 있는 도형의 닮음비가 1 : $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$이므로 넓이의 비는 1 : $\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 구하는 극한값은 첫째항이 $\frac{6-\sqrt{3}}{9}$이고, 공비가 $\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{6-\sqrt{3}}{9}}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

63) [정답] ③

[해설]



원 O_1의 반지름의 길이가 2이므로

반원의 넓이는 2π

직각삼각형 $C_1A_1B_1$에서 $\overline{A_1C_1}=3$, $\overline{A_1B_1}=4$이므로

$\overline{B_1C_1}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

선분 A_1B_1은 원 O_1의 지름이므로 $\angle A_1D_1B_1=\frac{\pi}{2}$

삼각형 $C_1A_1B_1$에서

$\frac{1}{2}\times\overline{A_1B_1}\times\overline{A_1C_1}=\frac{1}{2}\times\overline{B_1C_1}\times\overline{A_1D_1}$이므로

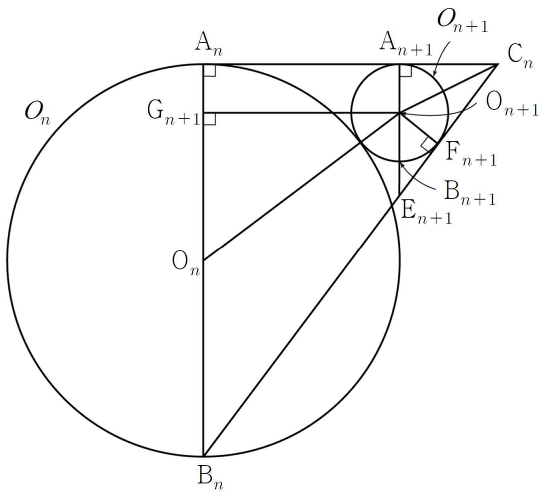
$\overline{A_1D_1}=\frac{12}{5}$

직각삼각형 $B_1D_1A_1$에서 $\overline{B_1D_1}=\sqrt{4^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{16}{5}$

삼각형 $B_1D_1A_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{12}{5}\times\frac{16}{5}=\frac{96}{25}$

그러므로 $S_1=2\pi+\frac{96}{25}$이다.

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



두 원 O_n과 O_{n+1}의 중심을 각각 O_n과 O_{n+1}이라 하고 반지름의 길이를 각각 r_n과 r_{n+1}이라 하자.

직선 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$이 선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$과 만나는 점을 E_{n+1}이라 하고, 원 O_{n+1}과 직선 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$이 접하는 점을 F_{n+1}이라 하자.

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}=a_n$이라 하면 $\overline{\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{C}_n}=a_n$이고

삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$과 삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n$은 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}:\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n}=3:5$에서 $\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n}=\dfrac{5}{3}a_n$이고

$\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{F}_{n+1}}=\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n}-\overline{\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{C}_n}=\dfrac{2}{3}a_n$이다.

삼각형 $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{C}_n$과 삼각형 $\mathrm{F}_{n+1}\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{O}_{n+1}$은 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{F}_{n+1}}:\overline{\mathrm{E}_{n+1}\mathrm{F}_{n+1}}=3:4$에서 $a_n=2r_{n+1}$이다.

점 O_{n+1}에서 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{O}_n$에 내린 수선의 발을 G_{n+1}이라 하면

$\overline{\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{G}_{n+1}}=\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{C}_n}-\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{C}_n}=\dfrac{3}{2}r_n-2r_{n+1}$

$\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{G}_{n+1}}=r_n-r_{n+1}$, $\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}=r_n+r_{n+1}$이므로

직각삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{G}_{n+1}\mathrm{O}_{n+1}$에서

$$(r_n+r_{n+1})^2=(r_n-r_{n+1})^2+\left(\frac{3}{2}r_n-2r_{n+1}\right)^2$$

$$16{r_{n+1}}^2-40r_{n+1}r_n+9{r_n}^2=0$$

$$(4r_{n+1}-r_n)(4r_{n+1}-9r_n)=0$$

$r_n>r_{n+1}$이므로 $r_{n+1}=\dfrac{1}{4}r_n$

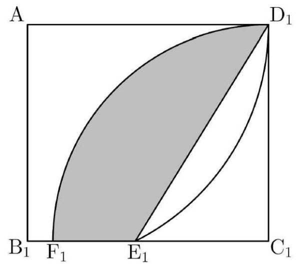
원 O_n과 원 O_{n+1}의 닮음비가 $4:1$이면 넓이의 비는 $16:1$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $2\pi+\dfrac{96}{25}$이고 공비가 $\dfrac{1}{16}$인 등비수열의 첫째항부터 제n항까지의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{2\pi+\frac{96}{25}}{1-\frac{1}{16}}=\frac{32}{15}\pi+\frac{512}{125}$$

64) [정답] ③

[해설]



R_1

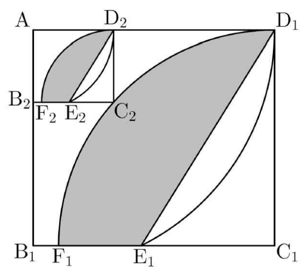
$\overline{\mathrm{AB}_1}=2$, $\overline{\mathrm{AD}_1}=\sqrt{5}$이고 중심이 A이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AD}_1}$인 원과 선분 $\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$의 교점을 E_1이기 때문에 $\overline{\mathrm{AE}_1}=\sqrt{5}$이다.

이때 $\triangle\mathrm{AB}_1\mathrm{E}_1$는 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해서 $\overline{\mathrm{B}_1\mathrm{E}_1}=1$이고 $\overline{\mathrm{E}_1\mathrm{C}_1}=\sqrt{5}-1$이다.

색칠된 부분의 넓이는 부채꼴 $\mathrm{F}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$의 넓이에서 삼각형 $\mathrm{E}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$의 넓이를 뺀 것이므로

$$S_1=\frac{1}{4}\cdot 2^2\cdot\pi-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(\sqrt{5}-1)$$
$$=\pi-\sqrt{5}-1$$

한편,



R_2

$\overline{\mathrm{AB}_2}=2\mathrm{k}$, $\overline{\mathrm{AD}_2}=\sqrt{5}\mathrm{k}$라 두면 $\overline{\mathrm{AC}_2}=3\mathrm{k}$이다.

이때 $\square\mathrm{AB}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2\backsim\square\mathrm{AB}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$이므로 점 A와 점 C_2와 점 C_1는 일직선상에 있다.

$$\overline{\mathrm{AC}_1}=\overline{\mathrm{AC}_2}+\overline{\mathrm{C}_2\mathrm{C}_1}$$
$$3=3k+2$$
$$\therefore k=\frac{1}{3}$$

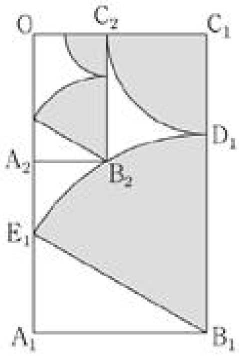
따라서 $\square\mathrm{AB}_2\mathrm{C}_2\mathrm{D}_2$와 $\square\mathrm{AB}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$의 닮음비는 $1:3$이고

넓이의 비는 1 : 9이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\pi-\sqrt{5}-1}{1-\frac{1}{9}}$$
$$= \frac{9\pi - 9\sqrt{5}+9}{8}$$

65) [정답] ⑤

[해설]



$\overline{C_1D_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\overline{B_1D_1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\angle E_1B_1D_1 = \frac{\pi}{3}$

$S_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 \frac{\pi}{3}$

$= \frac{11}{36}\pi$

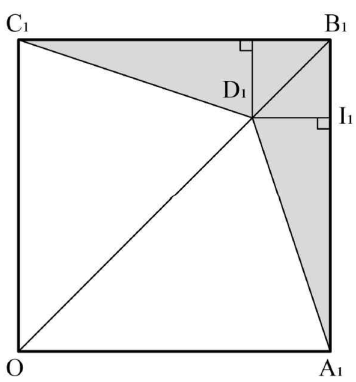
$\overline{OC_2} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$이므로

$r = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4-2\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{11}{36}\pi}{1-\frac{4-2\sqrt{3}}{3}} = \frac{1+2\sqrt{3}}{12}\pi$$

66) [정답] ③

[해설]



$\overline{OB_1} = 4\sqrt{2}$이므로 $\overline{D_1B_1} = \sqrt{2}$

점 D_1에서 직선 A_1B_1에 내린 수선의 발을 I_1이라 하면

$\overline{D_1I_1} = 1$

두 삼각형 $A_1B_1D_1$, $B_1C_1D_1$의 넓이는 모두 2이므로 $S_1 = 4$

네 선분 A_nB_n, B_nC_n, C_nD_n, D_nA_n으로 둘러싸인 ㄱ모양의 도형의 넓이를 T_n이라 하자.

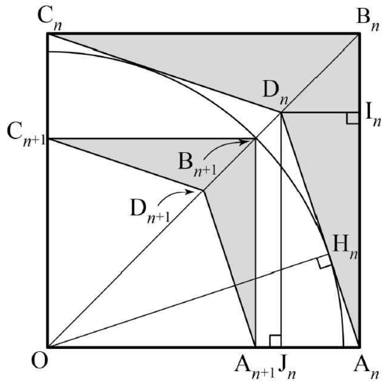


그림 R_n에서 중심이 O이고, 두 직선 A_nB_n, C_nD_n에 동시에 접하는 원과 직선 A_nD_n이 접하는 점을 H_n이라 하고, 점 D_n에서 두 직선 A_nB_n, OA_n에 내린 수선의 발을 각각 I_n, J_n이라 하자.

$\overline{A_nI_n} = \overline{D_nJ_n} = \frac{3}{4}\overline{OA_n}$, $\overline{D_nI_n} = \frac{1}{4}\overline{OA_n}$이므로

$\overline{A_nD_n} = \frac{\sqrt{10}}{4}\overline{OA_n}$

삼각형 OA_nD_n에서

$\frac{1}{2} \times \overline{A_nD_n} \times \overline{OH_n} = \frac{1}{2} \times \overline{OA_n} \times \overline{D_nJ_n}$

$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{4}\overline{OA_n} \times \overline{OH_n} = \frac{1}{2} \times \overline{OA_n} \times \frac{3}{4}\overline{OA_n}$

$\overline{OH_n} = \frac{3\sqrt{10}}{10}\overline{OA_n}$,

$\overline{OA_{n+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OB_{n+1}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{OH_n}$

$= \frac{3\sqrt{5}}{10}\overline{OA_n}$

두 정사각형 $OA_nB_nC_n$과 $OA_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 닮음비는

$\overline{OA_n} : \overline{OA_{n+1}} = 1 : \frac{3\sqrt{5}}{10}$

즉, $T_n : T_{n+1} = 1 : \frac{9}{20}$이므로 $T_{n+1} = \frac{9}{20}T_n$

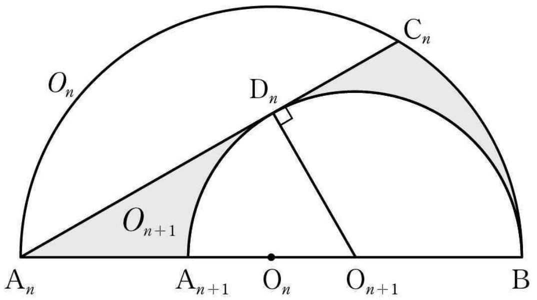
그러므로 수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 $T_1 = S_1 = 4$이고, 공비가 $\frac{9}{20}$인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{4}{1-\frac{9}{20}} = \frac{80}{11}$

67) [정답] ②

[해설]

반원 O_n의 중심을 O_n, 반지름을 r_n이라 하자.



삼각형 $O_{n+1}A_nD_n$은 $\angle O_{n+1}A_nD_n=\frac{\pi}{6}$인 직각삼각형이므로

$\sin(\angle O_{n+1}A_nD_n)=\frac{1}{2}$

$\frac{\overline{D_nO_{n+1}}}{\overline{A_nO_{n+1}}}=\frac{1}{2}$, $\frac{r_{n+1}}{2r_n-r_{n+1}}=\frac{1}{2}$

$r_{n+1}=\frac{2}{3}r_n$ …… ㉠

$r_1=1$이므로 $r_2=\frac{2}{3}$

$\angle A_1O_1C_1=\frac{2\pi}{3}$, $\overline{A_1O_1}=\overline{C_1O_1}=1$이므로

삼각형 $A_1O_1C_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{A_1O_1}\times\overline{C_1O_1}\times\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\angle BO_1C_1=\frac{\pi}{3}$, $\overline{C_1O_1}=\overline{BO_1}=1$이므로

부채꼴 O_1BC_1의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

반원 O_2의 넓이는 $\frac{1}{2}\times(r_2)^2\times\pi=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\pi=\frac{2\pi}{9}$

S_1=(삼각형 $A_1O_1C_1$의 넓이)+(부채꼴 O_1BC_1의 넓이)−(반원 O_2의 넓이)

$=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi}{9}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}$이고 공비가 $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{18}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{9\sqrt{3}-2\pi}{20}$

68) [정답] ③

[해설]

$S_1=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$

그림 R_2에서 $\angle O_1A_2O_2=\frac{\pi}{4}$이므로

삼각형 $O_1A_2O_2$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\overline{O_1O_2}}{\sin\frac{\pi}{4}}$

$\frac{\overline{O_2A_2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$에서 $\overline{O_2A_2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

즉, 부채꼴 $O_1A_1O_2$와 부채꼴 $O_2A_2O_3$은 서로 닮음이고

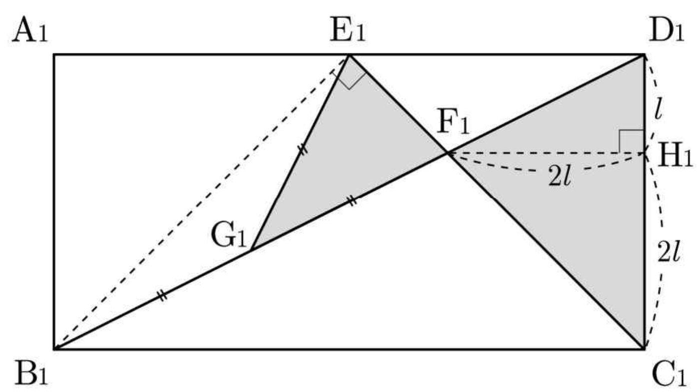
닮음비는 $1:\frac{1}{\sqrt{2}}$이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n$은 첫째항이 $\frac{\pi}{8}$이고 공비가 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$인 등비급수의 합이므로

$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{4}$

69) [정답] ②

[해설]



점 F_1에서 선분 C_1D_1에 내린 수선의 발을 H_1이라 하자.

$\overline{D_1H_1}=l(l>0)$이라 하면 $\overline{F_1H_1}=\overline{C_1H_1}=2lC_1D_1=3l=1$

$l=\frac{1}{3}$이므로 $\overline{D_1H_1}=\frac{1}{3}$, $\overline{F_1H_1}=\frac{2}{3}$

삼각형 $C_1D_1F_1$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

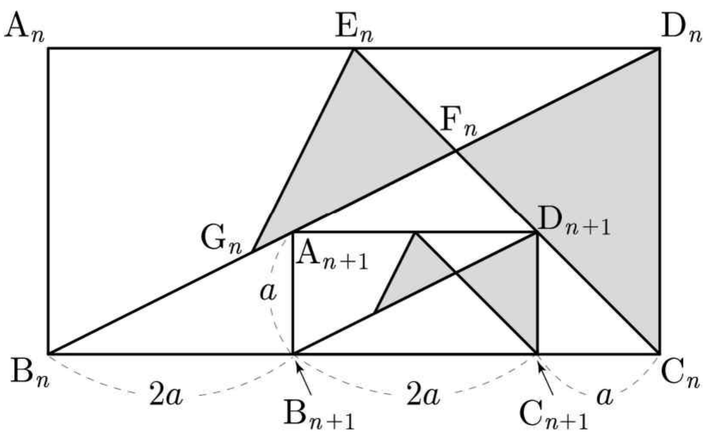
$\angle B_1E_1F_1=\frac{\pi}{2}$이고, $\overline{G_1E_1}=\overline{G_1F_1}$이므로 점 G_1은 삼각형 $B_1F_1E_1$의 외접원의 중심이다.

$\overline{B_1G_1}=\overline{G_1F_1}$이므로 삼각형 $G_1F_1E_1$의 넓이는 삼각형 $B_1F_1E_1$의 넓이의 $\frac{1}{2}$이다.

$\overline{B_1E_1}=\sqrt{2}$, $\overline{E_1F_1}=\frac{\sqrt{2}}{3}$이므로 삼각형 $G_1F_1E_1$의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{B_1E_1}\times\overline{E_1F_1}\right)=\frac{1}{4}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{1}{6}$

$S_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$



두 삼각형 $C_nD_nF_n$, $G_nF_nE_n$으로 만들어진 모양의 도형의 넓이를 T_n이라 하자.

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}} = a(a>0)$이라 하면

$\overline{B_nB_{n+1}} = 2a$, $\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = 2a$,

$\overline{C_{n+1}C_n} = a\overline{B_nC_n} = 5a\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = \frac{2}{5}\overline{B_nC_n}$

두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비는

$1 : \frac{2}{5}$이므로 넓이의 비는 $1^2 : \left(\frac{2}{5}\right)^2$이다.

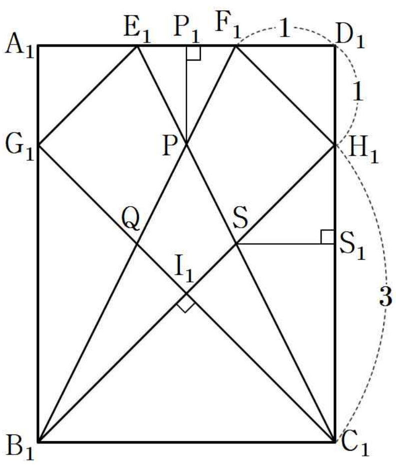
$T_{n+1} = \frac{4}{25}T_n$

수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 $T_1 = S_1 = \frac{1}{2}$이고 공비가 $\frac{4}{25}$인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{4}{25}} = \frac{25}{42}$

70) [정답] ⑤

[해설]



두 점 E_1, F_1은 변 A_1D_1의 삼등분점이므로

$\overline{A_1E_1} = \overline{E_1F_1} = \overline{F_1D_1} = 1$

점 P에서 변 A_1D_1에 내린 수선의 발을 P_1이라 하면

$\triangle A_1B_1F_1 \backsim \triangle P_1PF_1$이고 $\overline{A_1F_1} : \overline{A_1B_1} = 1:2$이므로

$\overline{P_1F_1} : \overline{P_1P} = 1:2$, $\overline{P_1P} = 1$

$\therefore \triangle A_1E_1G_1 = \triangle E_1F_1P = \triangle F_1D_1H_1 = \frac{1}{2}$ …… ㉠

$\overline{B_1C_1} = \overline{C_1H_1} = 3$이므로 삼각형 $B_1C_1H_1$은 직각이등변삼각형이다.

따라서 삼각형 SS_1H_1도 직각이등변삼각형이므로 점 S에서 변 C_1D_1에 내린 수선의 발을 S_1, $\overline{SS_1} = a$라 하면

$\overline{S_1H_1} = a$, $\overline{S_1C_1} = 3-a$

$\triangle E_1C_1D_1 \backsim \triangle SC_1S_1$이므로

$\overline{SS_1} : \overline{S_1C_1} = 1:2$, $a:(3-a) = 1:2$, $a=1$

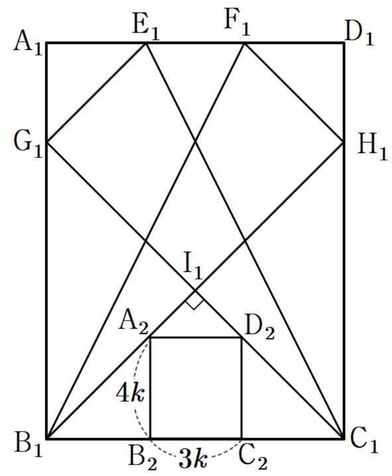
$\therefore \triangle GB_1G_1 = \triangle SC_1H_1 = \frac{1}{2}\times 3\times 1 = \frac{3}{2}$ …… ㉡

삼각형 $I_1B_1C_1$은 직각이등변삼각형이고 $\overline{B_1C_1} = 3$이므로

$\triangle I_1B_1C_1 = \frac{9}{4}$ …… ㉢

따라서 색칠한 부분의 넓이는 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 넓이에서 ㉠, ㉡, ㉢의 넓이를 제외하면 되므로

$S_1 = 12 - \left(3\times\frac{1}{2} + 2\times\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) = \frac{21}{4}$



위의 그림과 같이 $\overline{A_2B_2} = 4k$라 하면

$\overline{B_2C_2} = 3k$, $\overline{B_1B_2} = \frac{3-3k}{2}$

삼각형 $A_2B_1B_2$는 직각이등변삼각형이므로

$4k = \frac{3-3k}{2}$, $k = \frac{3}{11}$

따라서 $\overline{A_2B_2} = \frac{12}{11}$이다.

두 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$는 닮음이고 닮음비는

$4 : \frac{12}{11} = 11 : 3$이다.

이상에서 S_n은 첫째항이 $\frac{21}{4}$, 공비가 $\left(\frac{3}{11}\right)^2 = \frac{9}{121}$인 등비수열의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{21}{4}}{1-\frac{9}{121}} = \frac{363}{64}$$

71) [정답] ③

[해설]

그림 R_1에서 $\overline{E_1C_1} = \sqrt{2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$ 이고, 삼각형 $E_1C_1B_2$는 직각이등변삼각형이므로

$$S_1 = 2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

삼각형 $E_1B_1C_1$에서 $\overline{E_1B_1} = \overline{E_1C_1} = \frac{\sqrt{17}}{2}$, $\overline{B_1C_1} = 1$이므로

$\angle B_1E_1C_1 = \theta$라 하면 코사인법칙에 의해

$$\cos\theta = \frac{\frac{17}{4}+\frac{17}{4}-1}{2\times\frac{\sqrt{17}}{2}\times\frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{15}{17} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

삼각형 $A_2E_1B_2$에서 $\angle A_2E_1D_1 = \angle B_2E_1C_1 = \frac{\pi}{4}$이므로

$\angle A_2E_1B_2 = \frac{\pi}{2} - \theta$이고,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{8}{17} \quad (\because \text{㉠})$$

또한 $\overline{A_2E_1} = \overline{B_2E_1} = \sqrt{\frac{17}{2}}$ 이므로 코사인법칙에 의해

$$\overline{A_2B_2}^2 = \frac{17}{2}+\frac{17}{2}-2\times\sqrt{\frac{17}{2}}\times\sqrt{\frac{17}{2}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$= 17 - 17\sin\theta = 9$$

$\therefore \overline{A_2B_2} = 3$

따라서 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비가 $4:3$이므로 넓이의 비는 $16:9$이다.

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $S_1 = \frac{17}{4}$, 공비가 $\frac{9}{16}$인 등비급수이므로

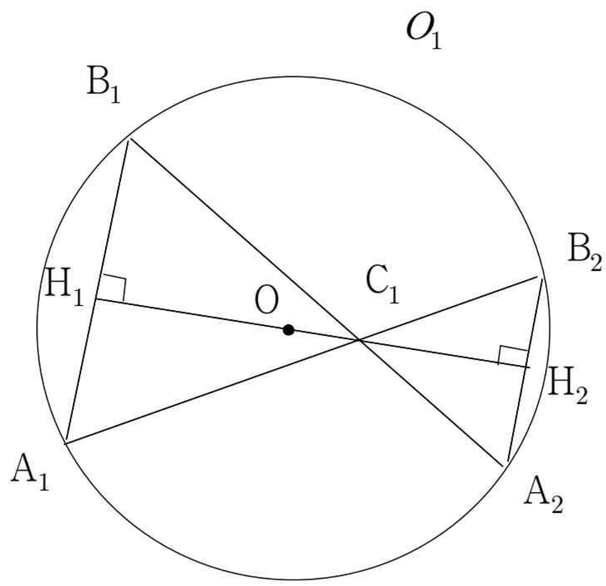
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{17}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{68}{7}$$

72) [정답] ②

[해설]

원 O_1의 중심을 O라 하고 점 O에서 두 선분 A_1B_1, A_2B_2에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 점 H_1은 선분 A_1B_1의 중점이고 점 H_2는 선분 A_2B_2의 중점이다.

또, $\overline{A_1B_1} /\!/ \overline{A_2B_2}$이므로 세 점 H_1, O, H_2는 한 직선 위에 있다.



이때, $\angle A_1B_1A_2 = \frac{\pi}{3}$이므로

$$\overline{B_1C_1} = \overline{B_1H_1}\times\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}$$
$$= 1\times\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

그러므로 삼각형 $A_1C_1B_1$은 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

또,

$$\angle A_1B_2A_2 = \angle A_1B_1A_2 = \frac{\pi}{3}$$

$$\angle A_2C_1B_2 = \angle A_1C_1B_1 = \frac{\pi}{3}$$

이므로 삼각형 $C_1A_2B_2$는 정삼각형이다.

이때,

$\overline{C_1A_2} = \overline{B_1A_2} - \overline{B_1C_1} = 3-2 = 1$

이므로 삼각형 $C_1A_2B_2$는 한 변의 길이가 1인 정삼각형이다.

그러므로

$$S_1 = 2\times(\triangle A_1A_2B_1 - \triangle A_1C_1B_1)$$
$$= 2\times\left(\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= \sqrt{3}$$

또, 두 삼각형 $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$에서

$\overline{A_1A_2} /\!/ \overline{A_2A_3}$, $\overline{A_1B_1} /\!/ \overline{A_2B_2}$,

$\overline{A_2B_1} /\!/ \overline{A_3B_2}$

이고

$A_1B_1 = 2$, $A_2B_2 = 1$

이므로 두 삼각형 $A_1A_2B_1$, $A_2A_3B_2$의 닮음비는 $2:1$이다.

따라서, 넓이의 비는 $4:1$이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{S_1}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

73) [정답] ④

[해설]

그림 R_n에서 새로 색칠한 부분의 넓이를 a_n이라 하자.

$\angle A_nB_nD_n=\theta$라 하면

$\overline{B_1D_1}=\sqrt{1^2+(2\sqrt{6})^2}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{\overline{A_nD_n}}{\overline{B_nD_n}}=\frac{\overline{A_1D_1}}{\overline{B_1D_1}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\cos\theta=\frac{1}{5}$

두 선분 A_1G_1, G_1B_2와 호 B_2A_1로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴 $B_1B_2A_1$의 넓이에서 삼각형$A_1B_1G_1$의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\frac{1}{2}\times 1^2\times\theta-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}\times\sin\theta=\frac{\theta}{2}-\frac{\sqrt{6}}{10}$$

두 선분 D_2H_1, H_1F_1과 호 F_1D_2로 둘러싸인 도형의 넓이는 부채꼴 $D_1F_1D_2$의 넓이에서 삼각형$D_1F_1H_1$의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\frac{1}{2}\times 1^2\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{20}$$

그러므로

$$a_1=\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\sqrt{6}}{10}\right)+\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{20}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{6}}{10}-\frac{1}{20}$$

$$\frac{\overline{B_{n+1}D_{n+1}}}{\overline{B_nD_n}}=\frac{\overline{B_2D_2}}{\overline{B_1D_1}}=\frac{\overline{B_1D_1}-(\overline{B_1B_2}+\overline{D_1D_2})}{\overline{B_1D_1}}=\frac{3}{5}$$

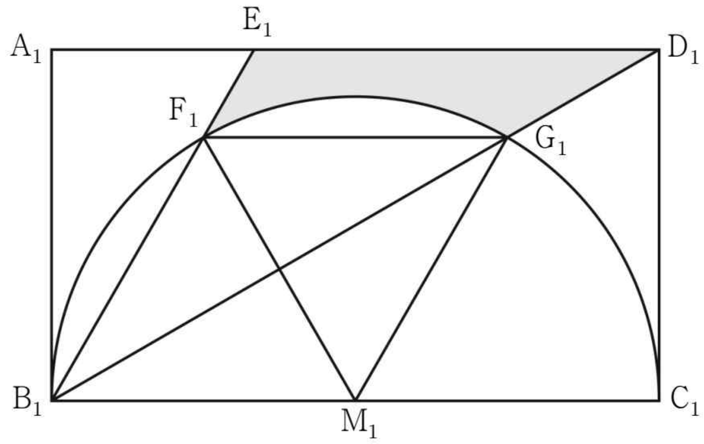
두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$과 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비는 $5:3$이므로 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a_1이고 공비가 $\frac{9}{25}$인 등비수열이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a_1}{1-\frac{9}{25}}=\frac{25\pi-10\sqrt{6}-5}{64}$$

74) [정답] ②

[해설]



선분 B_1C_1의 중점을 M_1이라 하자.

삼각형 $B_1C_1D_1$에서 $\tan(\angle C_1B_1D_1)=\frac{\overline{C_1D_1}}{\overline{B_1C_1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 $\angle C_1B_1G_1=\frac{\pi}{6}$이고 $\angle C_1M_1G_1=\frac{\pi}{3}\cdots\cdots$㉠

점 E_1은 선분 A_1D_1을 $1:2$로 내분하는 점이므로

$\overline{A_1E_1}=2\sqrt{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

삼각형 $A_1B_1E_1$에서 $\tan(\angle E_1B_1A_1)=\frac{\overline{A_1E_1}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

이므로 $\angle E_1B_1A_1=\frac{\pi}{6}$

$\angle G_1B_1E_1=\frac{\pi}{2}-\angle C_1B_1G_1-\angle E_1B_1A_1=\frac{\pi}{6}$에서

$\angle G_1M_1F_1=\frac{\pi}{3}\cdots\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 두 삼각형 $B_1M_1F_1$, $F_1M_1G_1$은 모두 정삼각형이므로 $\angle F_1M_1B_1=\angle M_1F_1G_1$이 되어

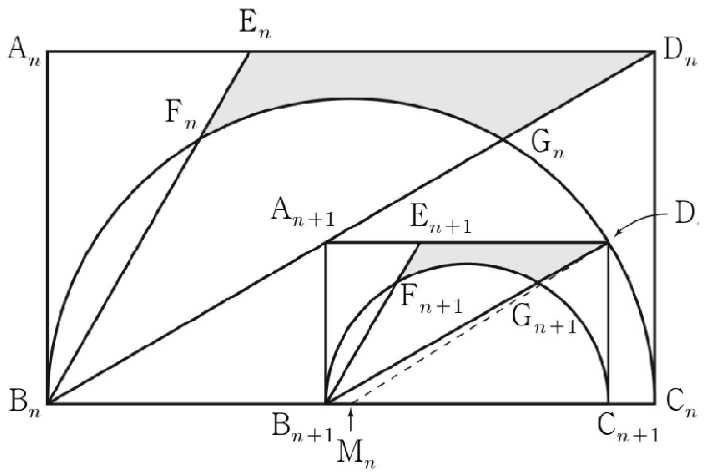
두 선분 F_1G_1, B_1C_1은 서로 평행하다.

삼각형 $B_1G_1F_1$의 넓이는 삼각형 $F_1M_1G_1$의 넓이와 같고, 두 선분 B_1F_1, B_1G_1과 호 F_1G_1로 둘러싸인 부분의 넓이는 부채꼴 $F_1M_1G_1$의 넓이와 같으므로

$$S_1=\left(\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times 2\right)-\left\{\frac{1}{2}\times(\sqrt{3})^2\times\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{2}$$

다음은 그림 R_{n+1}의 일부이다.



선분 B_nC_n의 중점을 M_n이라 하자.

$\overline{A_nB_n}=a_n$, $\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=a_{n+1}$이라 하면

$\overline{A_nB_n}:\overline{B_nC_n}=1:\sqrt{3}$에서 $\overline{B_nC_n}=\sqrt{3}a_n$이고

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}:\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=1:\sqrt{3}$에서

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\sqrt{3}a_{n+1}$이다.

직각삼각형 $B_nB_{n+1}A_{n+1}$에서

$\overline{B_nB_{n+1}}=\dfrac{\overline{A_{n+1}B_{n+1}}}{\tan\frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}a_{n+1}$이므로

$\overline{B_nC_{n+1}}=\overline{B_nB_{n+1}}+\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=2\sqrt{3}a_{n+1}$

직각삼각형 $M_nC_{n+1}D_{n+1}$에서

$\overline{M_nC_{n+1}}^2+\overline{C_{n+1}D_{n+1}}^2=\overline{M_nD_{n+1}}^2$

이고 $\overline{M_nD_{n+1}}=\dfrac{1}{2}\overline{B_nC_n}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n$이므로

$$\left(\overline{B_nC_{n+1}}-\overline{B_nM_n}\right)^2+\overline{C_{n+1}D_{n+1}}^2=\frac{3}{4}a_n^2$$

$$\left(2\sqrt{3}a_{n+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}a_n\right)^2+a_{n+1}^2=\frac{3}{4}a_n^2$$

$$13{a_{n+1}}^2-6a_na_{n+1}=0$$

$a_{n+1}=\dfrac{6}{13}a_n$이므로 두 사각형 $A_nB_nC_nD_n$과

$A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 닮음비가 $13:6$이고

넓이의 비는 $169:36$이다.

따라서 S_n은 첫째항이 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\pi}{2}$이고

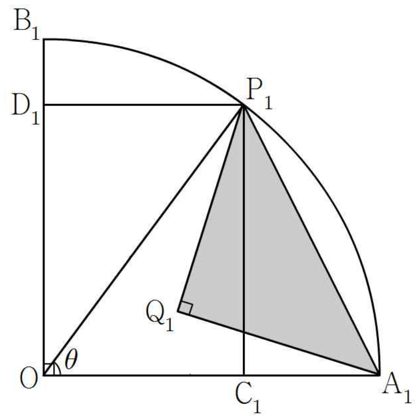
공비가 $\dfrac{36}{169}$인 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의

합이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{2}}{1-\frac{36}{169}}=\frac{169}{798}(8\sqrt{3}-3\pi)$$

75) [정답] ②

[해설]



$\angle P_1OA_1=\theta$라 하면 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

삼각형 P_1OA_1에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{P_1A_1}^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos\theta$$
$$=\frac{4}{5}$$

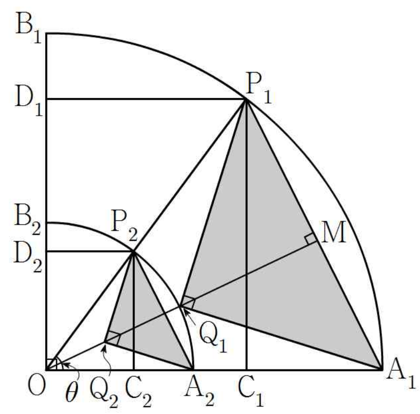
$\therefore\ \overline{P_1A_1}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

삼각형 $P_1Q_1A_1$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{P_1Q_1}=\overline{Q_1A_1}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

따라서 삼각형 $P_1Q_1A_1$의 넓이

$$S_1=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2=\frac{1}{5}$$



한편, 점 O에서 선분 P_1A_1에 내린 수선의 발을 M이라 하면

삼각형 P_1OA_1의 넓이에서

$$\frac{1}{2}\times\overline{OA_1}\times\overline{P_1C_1}=\frac{1}{2}\times\overline{OM}\times\overline{P_1A_1}$$

$$\frac{1}{2}\times1\times\frac{4}{5}=\frac{1}{2}\times\overline{OM}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$\therefore\ \overline{OM}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

또한, 삼각형 $P_1Q_1A_1$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{Q_1M}=\overline{P_1M}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

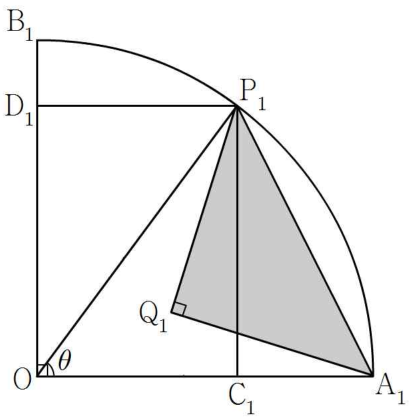
$\therefore\ \overline{OQ_1}=\overline{OM}-\overline{Q_1M}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

두 사분원의 반지름의 비는 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$이므로 색칠한 삼각형의 넓이의 비는 $\dfrac{1}{5}$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{5}$, 공비가 $\dfrac{1}{5}$인 등비수열의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

[다른 풀이]

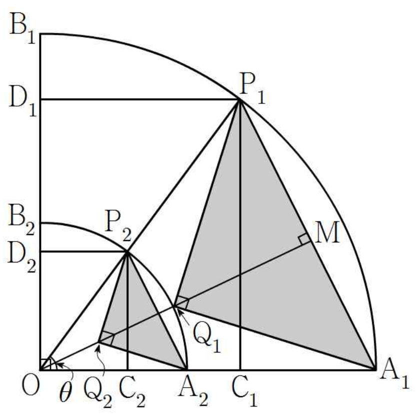


$\angle P_1OA_1 = \theta$라 하면 $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$이므로

$$\overline{OC_1} = \frac{3}{5},\ \overline{C_1A_1} = \frac{2}{5},\ \overline{P_1C_1} = \frac{4}{5}$$

삼각형 $P_1C_1A_1$은 직각삼각형이므로

$$\overline{P_1A_1} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$



점 O에서 선분 P_1A_1에 내린 수선의 발을 M이라 하면, 삼각형 P_1Q_1M은 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{Q_1M} = \overline{P_1M} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

삼각형 P_1OM은 직각삼각형이므로

$$\overline{OM} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\overline{OQ_1} = \overline{OM} - \overline{Q_1M} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

두 사분원의 반지름의 비는 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$이므로 색칠한 삼각형의 넓이의 비는 $\dfrac{1}{5}$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{1}{5}$, 공비가 $\dfrac{1}{5}$인 등비수열의 합이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$