06 미적

01 수열의 극한

01 수열의 극한의 성질 및 계산

04 부정형의 계산4 (수열과 일반항)

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 10월 24

1. 자연수 n에 대하여,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1),\ T_n = \sum_{k=1}^{n} (n+k)(n+k+1)$$

일 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{T_n}{S_n}$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 09월 18

2. 함수 $f(x) = \frac{x+3}{x}$ 에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_1 = 1$

(나) $b_n = f(a_n)$

(다) $a_{n+1} = a_n b_n$

이때, $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{n} + b_n \right)$ 의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

06 미적

01 수열의 극한

01 수열의 극한의 성질 및 계산

10 극한의 성질3 (극한식의 변형)

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 07월 26

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 07월 26

3. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$ 이

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n+n}-\sqrt{n}\right)=5$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{n}}$ 의 값을 구하시오.

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 03월 15

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 03월 17

4. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\dfrac{1}{n+1}\ (n\geq 1)$

(나) $\lim_{n\to\infty}n^2 b_n=2$

$\lim_{n\to\infty}n^2 a_n$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1

④ 0 ⑤ 1

06 미적 01 수열의 극한

01 수열의 극한의 성질 및 계산

11 극한의 성질4 (수열의 극한의 대소 관계)

[출처] 2002 모의_공공 사관학교 고3 07월 23

[출처] 2002 모의_공공 사관학교 고3 07월 23

5. 수열 $\{a_n\}$을 $a_0=1,\ a_n=\sqrt{n+a_{n-1}}\ (n\geq 1)$로 정의한다. 다음은 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=$ (나) 임을 증명한 것이다.

> 수학적 귀납법을 이용하면 … (중 략) …
>
> $n\geq 0$인 모든 정수에 대하여 $0<a_n<a_{n+1}$이 성립함을 알 수 있다.
>
> 점화식 $a_n=\sqrt{n+a_{n-1}}\ (n\geq 1)$을 변형하면
>
> $a_n-\sqrt{n}=\frac{1}{a_n+\sqrt{n}}\times$ (가) $(n\geq 1)$임을 알 수 있다.
>
> $a_n<a_{n+1}$과 점화식 $a_n=\sqrt{n+a_{n-1}}$을 이용하여
>
> $a_n-\sqrt{n}$의 범위를 구하면 $0<a_n-\sqrt{n}<1$이 된다.
>
> 그러므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=$ (나) 이 된다.

위의 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① a_{n-1}, 1 ② a_{n-1}, 0 ③ a_n, 1
④ a_n, 0 ⑤ a_n, 2

06 미적 01 수열의 극한

02 등비수열의 극한의 성질 및 계산

01 등비수열의 극한의 수렴 조건

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 03월 15

6. $0<x<16$일 때, 수열 $\left\{\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}x\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 자연수 x의 개수는?

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

06 미적 01 수열의 극한

02 등비수열의 극한의 성질 및 계산

05 부정형의 계산4 (점화식)

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 09월 28

[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 09월 28

7. 첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n < a_{n+1},\ \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$$

을 만족시킬 때, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

06 미적 01 수열의 극한

02 등비수열의 극한의 성질 및 계산

07 극한식의 해석2 (공비가 미지수인 극한식의 계산)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 06월 19

8. 자연수 k에 대하여

$$a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1}+\left(\frac{k}{10}\right)^n}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n}+\left(\frac{k}{10}\right)^n+1}$$

이라 할 때, $\sum\limits_{k=1}^{20} a_k$의 값은?

① 26 ② 28 ③ 30

④ 32 ⑤ 34

[출처] 2019 모의_공공 경찰대 고3 07월 5

9. 자연수 k에 대하여 $a_k = \lim_{n \to \infty} \frac{5^{n+1}}{5^n k + 4k^{n+1}}$이라 할 때,

$\sum_{k=1}^{10} k a_k$의 값은?

① 16 ② 20 ③ 21

④ 25 ⑤ 50

06 미적 01 수열의 극한

02 등비수열의 극한의 성질 및 계산

08 극한식의 해석3 (공비가 미지수인 극한식의 해석)

[출처] 2010 모의_공공 경찰대 고3 07월 20

10. 첫째항과 공비가 모두 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$의

첫째 항부터 n번째 항까지의 합 S_n에 대하여

$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n - a_n^2}{a_n}$이 수렴할 때, a_{10}의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[출처] 2017 모의_공공 경찰대 고3 07월 5

11. 10 이하인 세 자연수 a, b, c에 대하여

$$\lim_{n \to \infty} \frac{c^n + b^n}{a^{2n} + b^{2n}} = 1$$

을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는?

① 5　② 7　③ 9
④ 12　⑤ 15

06 미적

01 수열의 극한

02 등비수열의 극한의 성질 및 계산

10 등비수열의 극한의 성질2 (대소 관계)

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고2 11월

12. 다음은 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 양의 상수 K에 대하여

$$a_1 \geq K,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{K^2}{a_n}\right)(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하는 과정이다.

> $a_n > 0,\ K > 0$이고, $a_1 \geq K$이므로
>
> $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{K^2}{a_n}\right) \geq$ (가)
>
> 이다.
>
> 따라서 모든 자연수 n에 대하여
>
> $a_n \geq$ (가) $\cdots\cdots$ ㉠
>
> 이다.
>
> $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{K^2}{a_n}\right)$이므로 2이상의 자연수 n에 대하여
>
> $a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{K^2}{a_{n-1}}\right)$
>
> 이다.
>
> $a_n - K = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{K^2}{a_{n-1}}\right) - K$
>
> $= \frac{1}{2}($(나)$)\left(1 - \frac{K}{a_{n-1}}\right) \leq \frac{1}{2}($(나)$)$
>
> 이 성립하므로
>
> $a_n - K \leq \frac{1}{2}($(나)$) \leq \cdots \leq$ (다) $(a_1 - K)$
>
> $\cdots\cdots$ ㉡
>
> 이다.
>
> ㉠, ㉡에 의하여 $0 \leq a_n - K \leq$ (다) $(a_1 - K)$이다.
>
> 그러므로 $\lim_{n\to\infty} a_n =$ (가) 이다.

위 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

	(가)	(나)	(다)
①	K	$a_{n-1} - K$	$\frac{1}{2^{n+1}}$
②	K	$a_{n-1} - K$	$\frac{1}{2^{n-1}}$
③	K	$a_{n-1} + K$	$\frac{1}{2^n}$
④	$2K$	$a_{n-1} - K$	$\frac{1}{2^{n-1}}$
⑤	$2K$	$a_{n-1} + K$	$\frac{1}{2^n}$

06 미적 01 수열의 극한

03 수열의 극한의 활용

02 수열의 극한의 활용2 (대수 또는 방부등식)

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 06월 29

13. 자연수 n에 대하여 집합

$\{k|1 \le k \le 2n,\ k$는 자연수 $\}$

의 세 원소 $a,\ b,\ c\,(a<b<c)$가 등차수열을 이루는 집합 $\{a,\ b,\ c\}$의 개수를 T_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 04월 28

14. 수열 $\{a_n\}$을

$$a_1=2,\ na_{n+1}a_n=(n+1)^2a_n-n^2a_{n+1}$$

으로 정의할 때, $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값은?

① 0 ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ 2 ⑤ 3

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 10월 28

15. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2,\ a_2=3$

$$\log_2 a_n + \log_2 a_{n+1} + \log_2 a_{n+2} = 1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

을 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고 른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a_6 = \dfrac{1}{3}$

ㄴ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} a_k = 18$

ㄷ. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{3n} a_k = \frac{16}{3}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 20

16. 양의 실수 x에 대하여 $\log x$의 정수부분과 소수부분을 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(x) - (n+1)g(x) = n$$

을 만족시키는 모든 x의 값의 곱을 a_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log a_n}{n^2}$의 값은?

① 1 ② $\dfrac{3}{2}$ ③ 2
④ $\dfrac{5}{2}$ ⑤ 3

[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 09월

17. 양수 t에 대하여 $\log t$의 정수부분과 소수부분을 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(t)=9n\left\{g(t)-\frac{1}{3}\right\}^2-n$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 $f(t)$의 합을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$의 값은?

① 4 ② $\frac{9}{2}$ ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 04월 21

18. 자연수 n에 대하여 집합

$$S_n=\{x\,|\,x\text{는 } 3n\text{ 이하의 자연수}\}$$

의 부분집합 중에서 원소의 개수가 두 개이고, 이 두 원소의 차가 $2n$보다 큰 원소로만 이루어진 모든 집합의 개수를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}a_k$의 값은?

① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

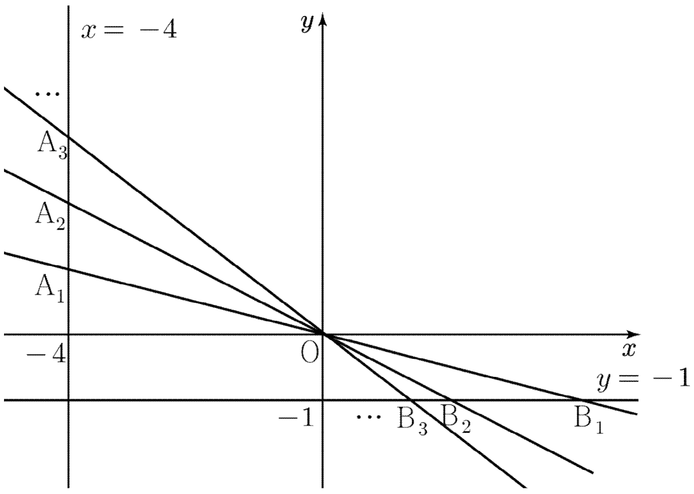
06 미적 01 수열의 극한

03 수열의 극한의 활용

03 수열의 극한의 활용3 (평면좌표 또는 함수)

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 04월 11

19. 원점 $\mathrm{O}(0,\,0)$과 직선 $x=-4$ 위에 점 $\mathrm{A}_1(-4,\,1)$, $\mathrm{A}_2(-4,\,2)$, $\mathrm{A}_3(-4,\,3)$, $\cdots$ 이 있다. 직선 $y=-1$과 직선 OA_1, 직선 OA_2, 직선 OA_3, $\cdots$ 과의 교점을 각각 B_1, B_2, B_3, $\cdots$ 이라 하자. $\triangle\mathrm{A}_n\mathrm{OA}_{n+1}$의 넓이를 S_n, $\triangle\mathrm{B}_n\mathrm{OB}_{n+1}$의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}S_kT_k$의 값은?

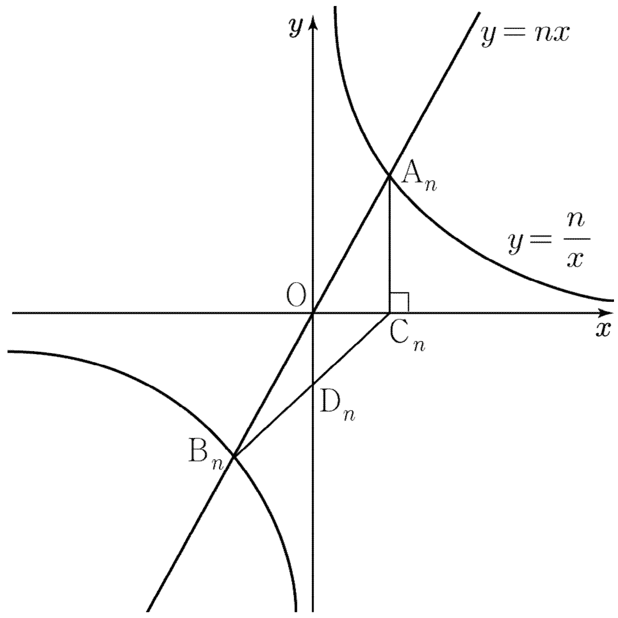


① 4 ② 8 ③ 12

④ 16 ⑤ 20

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고2 11월 14

20. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 $y=nx$, $y=\dfrac{n}{x}$의 그래프의 교점을 각각 A_n, B_n, 점 A_n에서 x축에 내린 수선의 발을 C_n, 선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$와 y축과의 교점을 D_n이라 하자. 사다리꼴 $\mathrm{OD}_n\mathrm{C}_n\mathrm{A}_n$의 넓이를 S_n, 삼각형 $\mathrm{OB}_n\mathrm{D}_n$의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{T_n+n}{S_n+n+1}$의 값은?



① $\dfrac{2}{7}$ ② $\dfrac{3}{7}$ ③ $\dfrac{4}{7}$

④ $\dfrac{5}{7}$ ⑤ $\dfrac{6}{7}$

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 09월 29

21. 자연수 n에 대하여 이차함수 $f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2$의 최솟값을 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 13

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 11월 13

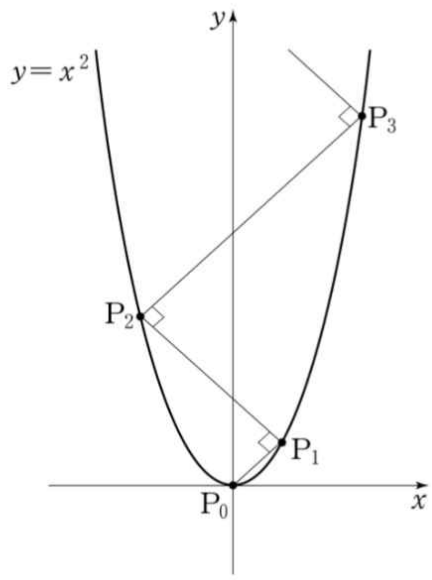
22. 자연수 n에 대하여 두 점 P_{n-1}, P_n이 함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점일 때, 점 P_{n+1}을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 두 점 P_0, P_1의 좌표는 각각 $(0,\ 0)$, $(1,\ 1)$이다.

(나) 점 P_{n+1}은 점 P_n을 지나고 직선 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$에 수직인 직선과 함수 $y=x^2$의 그래프의 교점이다.

(단, P_n과 P_{n+1}은 서로 다른 점이다.)

$l_n=\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}$의 값은?



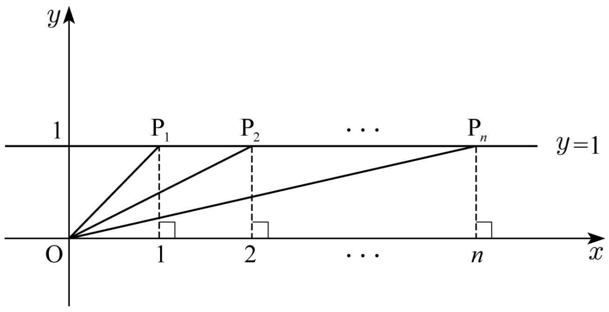
① $2\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ 2

④ $\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{2}$

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 03월 17

23. 좌표평면에서 직선 $y=1$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(n,\ 1)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$a_n=$(선분 OP_n의 길이) $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$



$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{[a_1]+[a_2]+[a_3]+\cdots+[a_n]}{n^2}$ 의 값은?

(단, O는 원점이고, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 16

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 10월 16

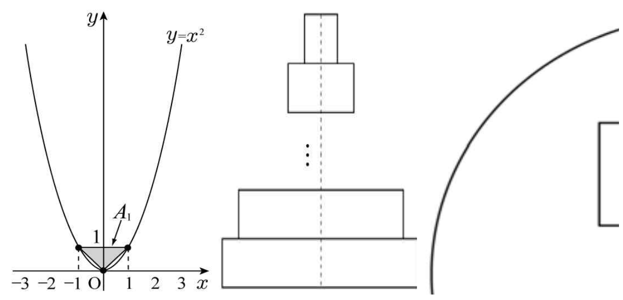
24. 그림과 같이 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-1,\ 1),\ (0,\ 0),\ (1,\ 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 A_1이라 하자.

곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-2,\ 4),\ (-1,\ 1),\ (0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 오각형을 A_2라 하자.

곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-3,\ 9),\ (-2,\ 4),\ (-1,\ 1),\ (0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 4),\ (3,\ 9)$를 꼭짓점으로 하는 칠각형을 A_3이라 하자.

이와 같은 방법으로 n번째 얻은 다각형 A_n은

곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-n,\ n^2),\ (-n+1,\ (n-1)^2),\ \cdots,\ (-1,\ 1),\ (0,\ 0),\ (1,\ 1),\ \cdots,\ (n-1,\ (n-1)^2),\ (n,\ n^2)$을 꼭짓점으로 하는 다각형이다. 다각형 A_n의 넓이를 a_n이라 할 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}$의 값은?



① 2 ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{4}{3}$

④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

[출처] 2014 모의_공공 경찰대 고3 07월 14

25. 함수 $f(x)=\log_2 x+1\,(x\geq 1)$에 대하여

$f_1(x)=f(x),\ f_2(x)=f(f_1(x)),\ \cdots,\ f_n(x)=f(f_{n-1}(x)),\ \cdots$ 로 나타낼 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $m<n$이면 $f_m(x)\leq f_n(x)$이다.

ㄴ. $x\geq \dfrac{3}{2}$일 때 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$는 수렴한다.

ㄷ. 임의의 자연수 $m,\ n$에 대하여 $f_m(x)=f_n(x)$이면 $x=1$ 또는 $x=2$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

26. 자연수 n에 대하여 좌표평면에 점 A_n, B_n을 다음과 같은 규칙으로 정한다.

(가) 점 A_1의 좌표는 $(1,\ 2)$이다.

(나) 점 B_n은 점 A_n을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 시킨 다음 x축의 방향으로 1만큼 평행이동 시킨 점이다.

(다) 점 A_{n+1}은 점 B_n을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동 시킨 다음 x축과 y축의 방향으로 각각 1만큼 평행이동 시킨 점이다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}{n}$의 값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2

④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 10월 21

27. 좌표평면 위의 점 P_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$은 다음 규칙을 만족시킨다.

> (가) 점 P_1의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.
>
> (나) $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=1$
>
> (다) 점 P_{n+2}는 점 P_{n+1}을 지나고 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$에 수직인 직선 위의 점 중 $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_{n+2}}$가 최대인 점이다.

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=0,\ a_2=1$이고, $a_n=\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_n}$ $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$의 값은?

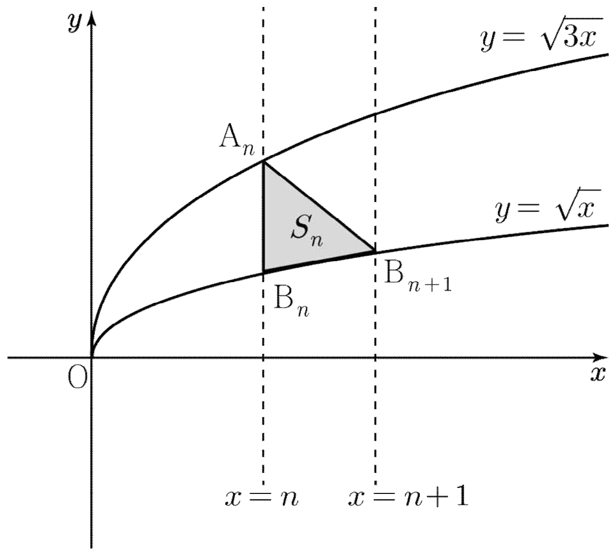
① $\frac{1}{2}$　② $\frac{\sqrt{2}}{2}$　③ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

④ 1　⑤ 2

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 09월 28

28. 자연수 n에 대하여 직선 $x=n$이 두 곡선 $y=\sqrt{3x}$, $y=\sqrt{x}$와 만나는 점을 각각 A_n, B_n이라 하고 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{B}_{n+1}$의 넓이를 S_n이라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(S_{n+1}-S_n)=a+b\sqrt{3}$일 때, $40(a^2+b^2)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

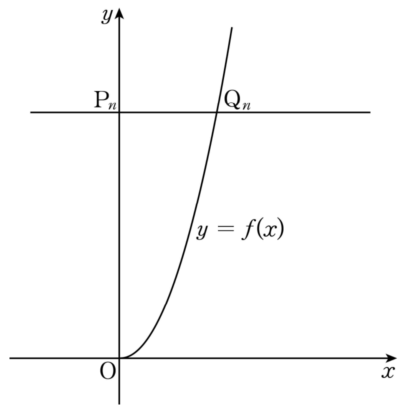


[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 06월 27

29. 자연수 n에 대하여 직선 $x+y=n$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을 P, $2:1$로 내분하는 점을 Q라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 P, Q를 지날 때, 함수 $f(x)$의 일차항의 계수를 a_n, 상수항을 b_n이라 하면 $\lim_{n\to\infty}\frac{9b_n}{na_n}=k$이다. $10k^2$의 값을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 03월 14

30. 자연수 n에 대하여 좌표가 $(0, 3n+1)$인 점을 P_n, 함수 $f(x)=x^2(x\geq 0)$이라 하자. 점 P_n을 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점을 Q_n이라 하자.



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 R_n은 직선 P_nR_n의 기울기가 음수이고 y좌표가 자연수인 점이다. 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$의 넓이를 S_n, 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OR}_n$의 넓이가 최대일 때 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OR}_n$의 넓이를 T_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-T_n}{\sqrt{n}}$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}$

④ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{4}$

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 03월 18

31. 자연수 n에 대하여 원점을 지나는 직선과 곡선 $y=-(x-n)(x-n-2)$가 제1사분면에서 접할 때, 접점의 x좌표를 a_n, 직선의 기울기를 b_n이라 하자. 다음은 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n$의 값을 구하는 과정이다.

> 원점을 지나고 기울기가 b_n인 직선의 방정식은 $y=b_n x$이다.
>
> 이 직선이 곡선 $y=-(x-n)(x-n-2)$에 접하므로 이차방정식 $b_n x=-(x-n)(x-n-2)$의 근 $x=a_n$은 중근이다.
>
> 그러므로 이차방정식
>
> $$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)=0$$
>
> 에서 이차식
>
> $$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)$$
>
> 는 완전제곱식으로 나타내어진다.
>
> 그런데 $a_n>0$이므로
>
> $$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)$$
> $$=\{x-\sqrt{n(n+2)}\}^2$$
>
> 에서 $a_n=\boxed{(가)}$, $b_n=\boxed{(나)}$이다.
>
> 따라서 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가)와 (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 값을 α라 할 때, $2f(\alpha)+g(\alpha)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 29

32. 자연수 n에 대하여 삼차함수 $f(x)=x(x-n)(x-3n^2)$이 극대가 되는 x를 a_n이라 하자. x에 대한 방정식 $f(x)=f(a_n)$의 근 중에서 a_n이 아닌 근을 b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n b_n}{n^3}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

06 미적

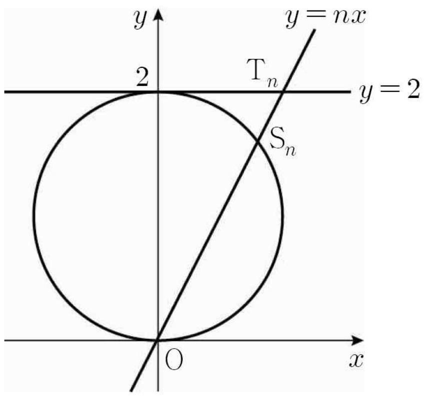
01 수열의 극한

03 수열의 극한의 활용

04 수열의 극한의 활용4 (원 관련)

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고2 11월

33. 자연수 n에 대하여 직선 $y=nx$가 원 $x^2+(y-1)^2=1$, 직선 $y=2$와 제 1사분면에서 만나는 점을 각각 $\mathrm{S_n}(\mathrm{a_n}, \mathrm{b_n})$, $\mathrm{T}_n(c_n, d_n)$이라 하자.



극한값이 옳은 것을 다음에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} b_n=2$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n-a_n}{d_n-b_n}=1$

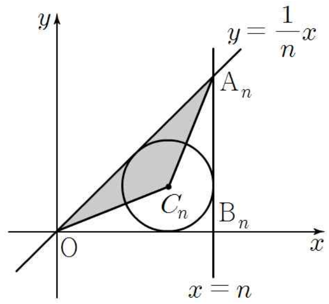
ㄷ. $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n(d_n-b_n)}=1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 14

34. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 두 직선 $y=\frac{1}{n}x$와 $x=n$이 만나는 점을 $\mathrm{A_n}$, 직선 $x=n$과 x축이 만나는 점을 $\mathrm{B_n}$이라고 하자. 삼각형 $\mathrm{A_nOB_n}$에 내접하는 원의 중심을 $\mathrm{C_n}$이라 하고, 삼각형 $\mathrm{A_nOC_n}$의 넓이를 S_n이라고 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$의 값은?

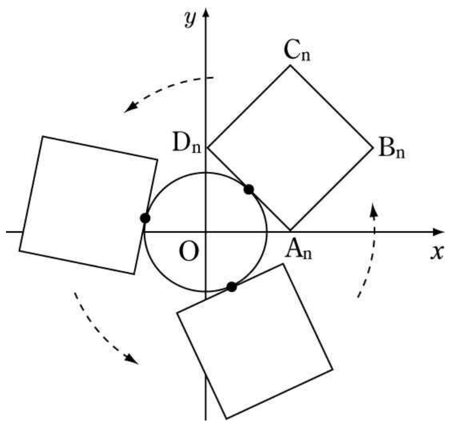


① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

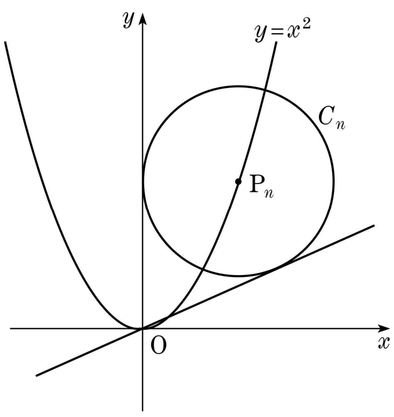
[출처] 2010 모의_공공 교육청 고2 09월 28

35. 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}_n(n,\ 0)$, $\mathrm{B}_n(2n,\ n)$, $\mathrm{C}_n(n,\ 2n)$, $\mathrm{D}_n(0, n)$ 을 연결한 사각형과 원 $x^2+y^2=\frac{1}{2}n^2$ 이 있다.
그림과 같이 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ 이 변 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n}$ 의 중점에서 원에 접하며 원을 따라 한 바퀴 움직일 때, 사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ 이 지나간 부분의 넓이를 a_n 이라 하자. 이 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{10}{\pi n^3}\sum_{k=1}^{n}a_k$ 의 값을 구하시오.



[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 03월 21

36. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(n,\ n^2)$ 을 중심으로 하고 y축에 접하는 원을 C_n 이라 하자. 원점을 지나고 원 C_n 에 접하는 직선 중에서 y축이 아닌 직선의 기울기를 a_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$ 의 값은?

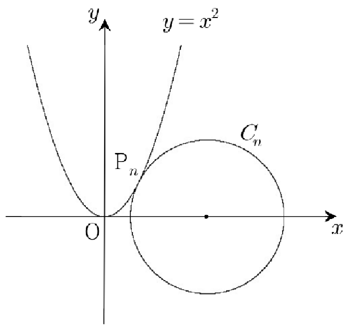


① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{4}$　③ 1
④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}$

좌표평면에서 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(n,\ n^2)$과 중심이 x축 위에 있는 원 C_n은 다음 조건을 만족시킨다. (단, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 이다.)

(가) 곡선 $y=x^2$과 원 C_n은 점 P_n에서 만난다.
(나) 곡선 $y=x^2$과 원 C_n은 점 P_n에서 공통인 접선을 갖는다.

다음 물음에 답하시오.



[출처] 2013 모의_공공 사관학교 고3 07월 12

37. 원 C_n의 넓이를 $S(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n^6}$의 값은?

① π ② 2π ③ 3π
④ 4π ⑤ 5π

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 11월 30

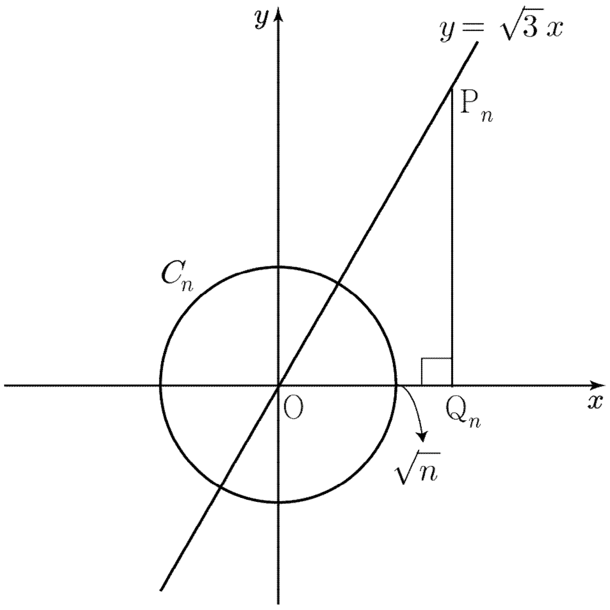
38. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(12n+1,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 5n)$을 지름의 양 끝으로 하는 원이 있다. 원점 O와 원 위의 점 P에 대하여 삼각형 OAP의 넓이의 최댓값을 $S(n)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n^2}$의 값을 구하시오.
(단, 점 P는 x축 위의 점이 아니다.)

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 04월 28

39. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 원 $x^2+y^2=n$을 C_n이라 하고, 직선 $y=\sqrt{3}x$ 위의 점 중에서 원점 O로부터 거리가 $n+2$인 점을 P_n, 점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 Q_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$의 내부와 원 C_n의 외부의 공통부분의 넓이를 S_n이라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{S_n}=a$일 때, $3a^2$의 값을 구하시오.

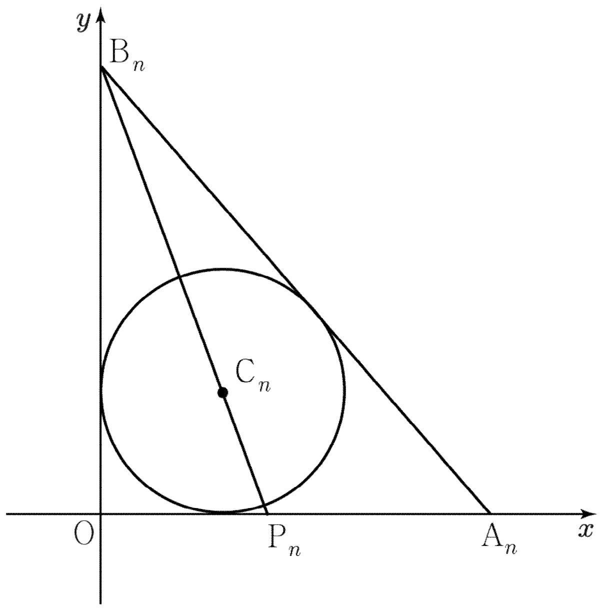
(단, 점 P_n은 제 1사분면 위의 점이다.)



[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 04월

40. 자연수 n에 대하여 그림과 같이 두 점 $\mathrm{A}_n(n,\ 0)$, $\mathrm{B}_n(0,\ n+1)$이 있다. 삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$에 내접하는 원의 중심을 C_n이라 하고, 두 점 B_n과 C_n을 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 P_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{OP}_n}}{n}$의 값은?

(단, O는 원점이다.)



① $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$ ② $\sqrt{2}-1$ ③ $2-\sqrt{2}$

④ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $2\sqrt{2}-2$

[출처] 2016 모의_공공 경찰대 고3 07월 10

41. 좌표평면에서 직선 $y=nx$(n은 자연수)와 원 $x^2+y^2=1$이 만나는 점을 A_n, B_n이라 하자. 원점 O와 A_n의 중점을 P_n이라 하고, $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{P}_n}=\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{Q}_n}$을 만족시키는 직선 $y=nx$ 위의 점을 Q_n이라 하자. (단, Q_n은 원 외부에 있다.) 점 Q_n의 좌표를 (a_n, b_n)이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}|na_n+b_n|$의 값은?

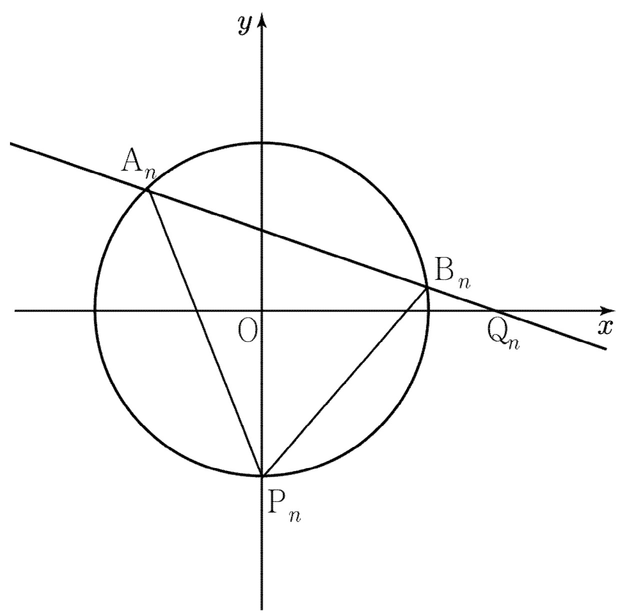
① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 09월 21

42. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 점 P_n의 좌표를 $(0, -n)$, 점 Q_n의 좌표를 $(n+1, 0)$이라 하자. 원 $x^2+y^2=n^2$ 위의 서로 다른 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 세 점 A_n, B_n, Q_n은 한 직선 위에 있다.
>
> (나) $\angle \mathrm{A}_n\mathrm{P}_n\mathrm{B}_n=60^\circ$

직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{{a_n}^2}{{a_n}^2+1}$의 값은? (단, 두 점 A_n, B_n의 y좌표는 모두 양수이다.)

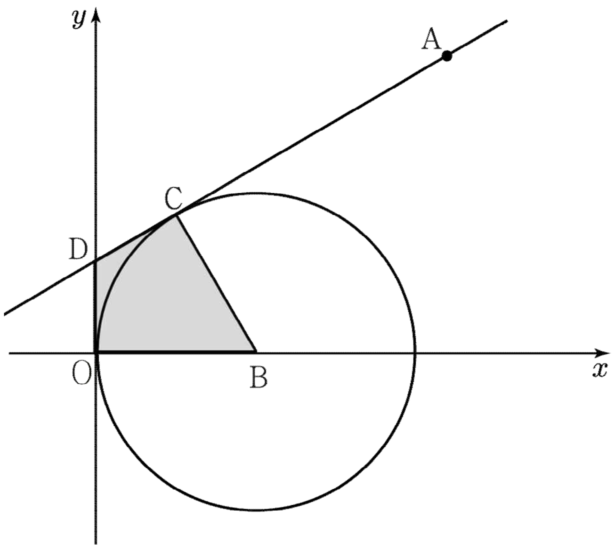


① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{5}$
④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 11월 29

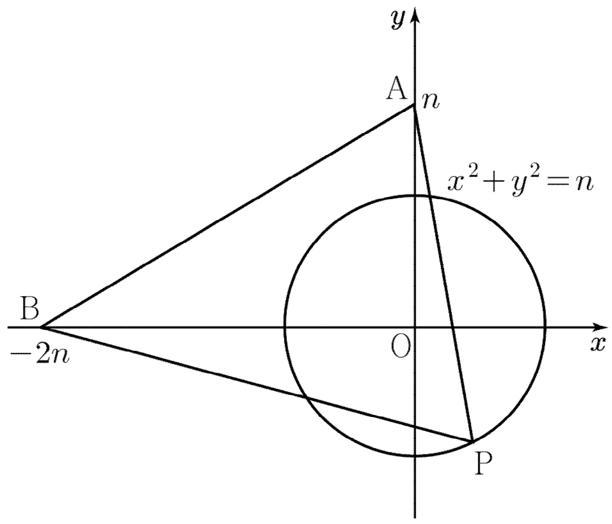
43. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{A}(2n, n+3)$을 지나는 기울기가 양수인 직선이 점 $\mathrm{B}(n, 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 n인 원에 접할 때, 이 직선이 원과 만나는 점을 C, y축과 만나는 점을 D라 하자. 사각형 OBCD의 둘레의 길이와 넓이를 각각 l_n, S_n이라 할 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{l_n\times S_n}{n^3}$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 11월 19

44. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(0, n)$, $\mathrm{B}(-2n, 0)$과 원 $x^2+y^2=n$이 있다. 원 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(a_{n+1}-a_n)$의 값은?

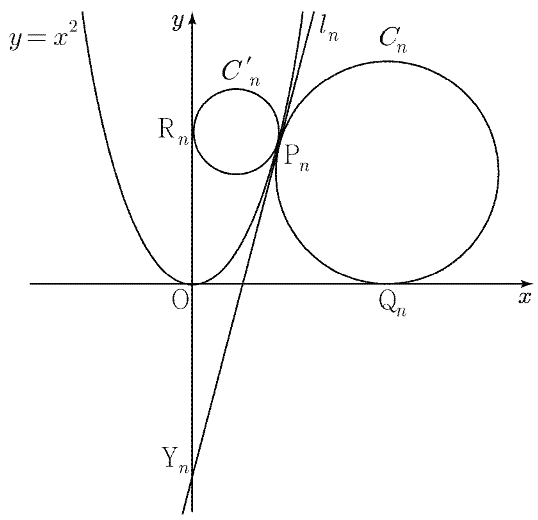


① $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{2}$

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 07월 29

45. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P_n}(\mathrm{n}, \mathrm{n}^2)$ 에서의 접선을 l_n이라 하고, 직선 l_n이 y축과 만나는 점을 Y_n이라 하자. x축에 접하고 점 P_n에서 직선 l_n에 접하는 원을 C_n, y축에 접하고 점 P_n에서 직선 l_n에 접하는 원을 $C_n{}'$이라 할 때, 원 C_n과 x축과의 교점을 Q_n, 원 $C_n{}'$과 y축과의 교점을 R_n이라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{OQ}_n}}{\overline{\mathrm{Y}_n\mathrm{R}_n}}=\alpha$라 할 때, 100α의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, 점 Q_n의 x좌표와 점 R_n의 y좌표는 양수이다.)



[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 09월 19

46. 2 이상의 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 두 원

$C_1 : x^2+y^2=(n-1)^2$,
$C_2 : (x-n)^2+y^2=n^2$

이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}}{n}$의 값은?

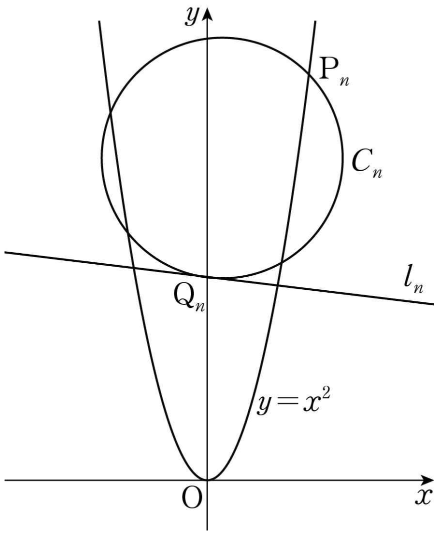
① $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 1
④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 11월 27

47. 자연수 n에 대하여 점 $(4n, 3n)$을 중심으로 하고, x축에 접하는 원 C_n이 있다. 원 C_n 위의 점 P에 대하여 선분 OP의 길이가 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수를 a_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이다.)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 29

48. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}_n(2n,\ 4n^2)$에서의 접선과 수직이고 점 $\mathrm{Q}_n(0,\ 2n^2)$을 지나는 직선을 l_n이라 하자. 점 P_n을 지나고 점 Q_n에서 직선 l_n과 접하는 원을 C_n이라 할 때, 원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선의 기울기를 a_n이라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}$의 값을 구하시오.

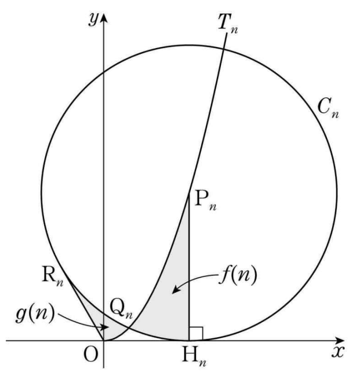


[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 30

49. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 곡선

$$T_n : y=\frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2\ (x\geq 0)$$

위에 있고 원점 O와의 거리가 $2n+2$인 점을 P_n이라 하고, 점 P_n에서 x축에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.
중심이 P_n이고 점 H_n을 지나는 원을 C_n이라 할 때, 곡선 T_n과 원 C_n의 교점 중 원점에 가까운 점을 Q_n, 원점에서 원 C_n에 그은 두 접선의 접점 중 H_n이 아닌 점을 R_n이라 하자. 점 R_n을 포함하지 않는 호 $\mathrm{Q}_n\mathrm{H}_n$과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n$, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(n)$, 점 H_n을 포함하지 않는 호 $\mathrm{R}_n\mathrm{Q}_n$과 선분 OR_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(n)$이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(n)-g(n)}{n^2}=\dfrac{\pi}{2}+k$이다. $60k^2$의 값을 구하시오. (단, k는 상수이다.)



06 미적

01 수열의 극한

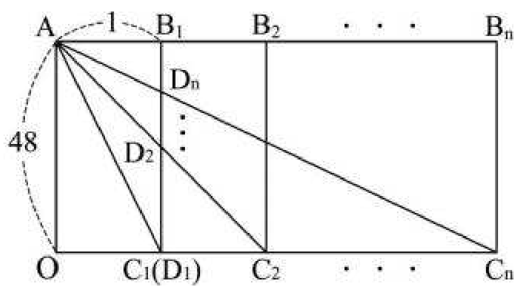
03 수열의 극한의 활용

05 수열의 극한의 활용5 (도형)

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 03월 25

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 03월 25

50. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 가로의 길이가 n, 세로의 길이가 48인 직사각형 $\mathrm{OAB_nC_n}$ 이 있다. 대각선 $\mathrm{AC_n}$ 과 선분 $\mathrm{B_1C_1}$ 의 교점을 $\mathrm{D_n}$ 이라 한다.

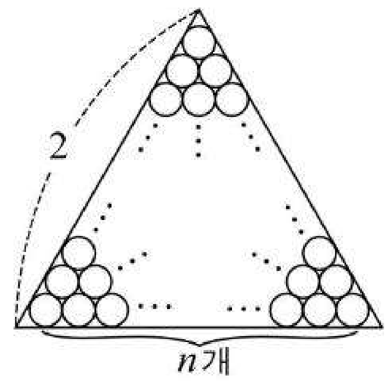


이 때, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{AC_n}}-\overline{\mathrm{OC_n}}}{\overline{\mathrm{B_1D}_n}}$ 의 값을 구하시오

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 10월 16

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 16

51. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 내부에 크기가 같은 원들이 첫째 행부터 차례로 한 개, 두 개, 세 개, $\cdots$, n개가 배열되어 있다. 이 원들은 서로 외접하고, 가장자리의 원들은 삼각형의 각 변에 접한다.



자연수 n의 값이 한없이 커질 때, 이 원들의 넓이의 합은 어떤 값에 한없이 가까워지는가?

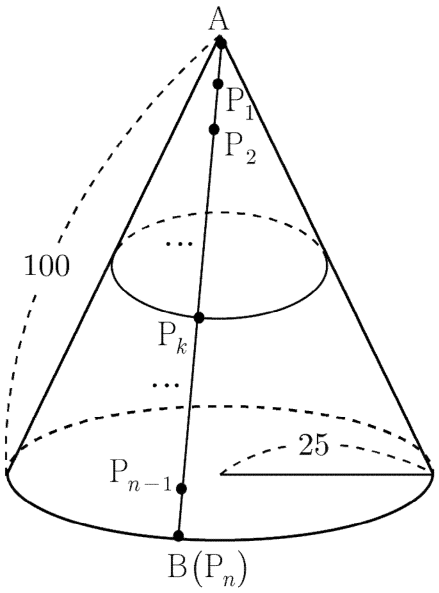
① $\sqrt{2}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{\pi}{3}$

④ $\dfrac{2}{5}\pi$ ⑤ $\dfrac{\pi}{2}$

[출처] 2007 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

[출처] 2007 모의_공공 사관학교 고3 07월 21

52. 밑면의 반지름의 길이가 25, 모선의 길이가 100인 원뿔이 있다. 자연수 n에 대하여 그림과 같이 모선 $\overline{\mathrm{AB}}$를 n등분한 점 중 꼭지점 A에 가까운 점부터 차례로 P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P이라 하고, 점 B를 P_n이라 하자.
또, 점 $\mathrm{P}_k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$에서 원뿔의 옆면을 한 바퀴 돌아서 점 P_k로 되돌아오는 최단 경로의 길이를 l_k라 할 때, $S_n=\sum_{k=1}^{n} l_k$라 하자. 이 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$의 값은?

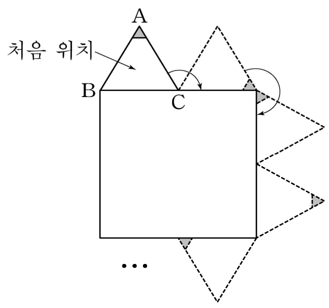


① $50\sqrt{2}$ ② $75\sqrt{2}$ ③ $100\sqrt{2}$
④ $125\sqrt{2}$ ⑤ $150\sqrt{2}$

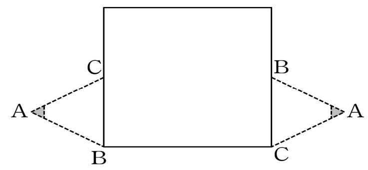
[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 17

[출처] 2007 모의_공공 평가원 고3 06월 17

53. 한 변의 길이가 2인 정사각형과 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. [그림 1]과 같이 정사각형 둘레를 따라 시계 방향으로 정삼각형 ABC를 회전시킨다. 정삼각형 ABC가 처음 위치에서 출발한 후 정사각형 둘레를 n바퀴 도는 동안, 변 BC가 정사각형의 변 위에 놓이는 횟수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $n=1$일 때, [그림 2]와 같이 변 BC가 2회 놓이므로 $a_1=2$이다. 이 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-2}}{n}$의 값은?



[그림 1]

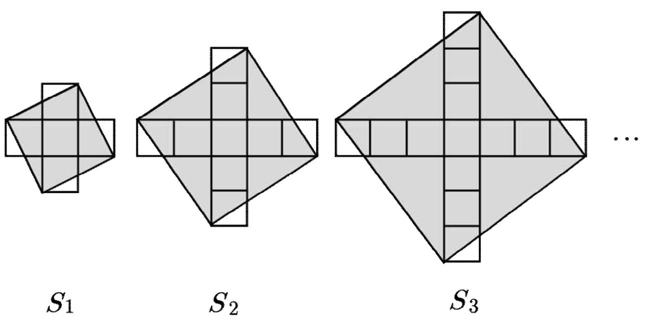


[그림 2]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 04월 30

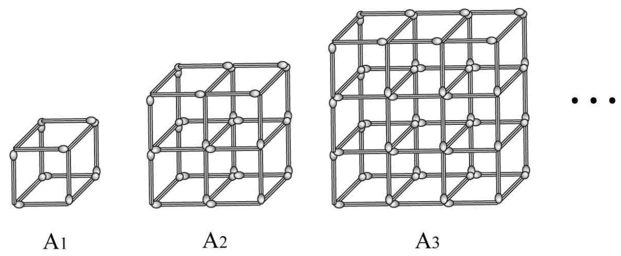
54. [그림 1]과 같이 한 개의 넓이가 1인 정사각형 5개로 이루어진 ✣모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_1이라 하자. [그림 2]와 같이 [그림 1]의 ✣ 모양의 도형에 한 개의 넓이가 1인 정사각형 4개를 붙여 만든 ✣ 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_2라 하자. [그림 3]과 같이 [그림 2]의 ✣ 모양의 도형에 한 개의 넓이가 1인 정사각형 4개를 붙여 만든 ✣ 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻어진 ✣ 모양의 도형에서 네 꼭짓점을 연결하여 만든 정사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{10S_n}{n^2}$의 값을 구하시오.



[그림 1] [그림 2] [그림3]

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 07월 30

55. 그림과 같이 길이가 1인 성냥개비를 이용하여 가로의 길이가 n, 세로의 길이가 1, 높이가 n인 직육면체 모양의 A_n을 계속 만들자.

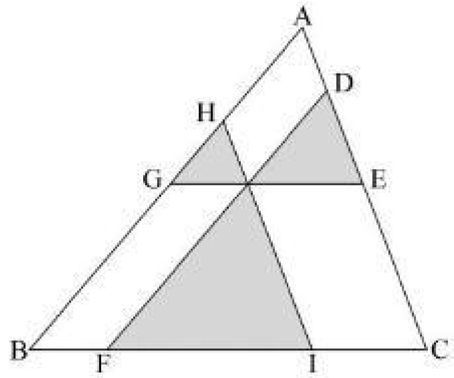


직육면체 모양의 A_n을 만드는데 필요한 성냥개비의 개수와 겉넓이를 각각 a_n, b_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n}{n^4}$의 값을 구하시오. (단, 성냥개비의 두께는 무시한다.)

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 07월 30

56. 그림과 같이 넓이가 M인 삼각형 ABC가 있다.

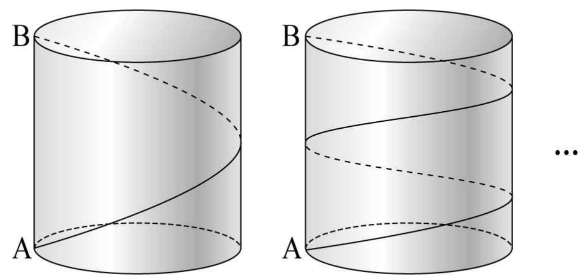
자연수 n과 선분 AC위의 두 점 D, E에 대하여
$\overline{AD}:\overline{DE}:\overline{EC}=n:(2n+1):(3n+2)$이고 $\overline{DF}//\overline{AB}$,
$\overline{GE}//\overline{BC}$이다. 선분 DF와 선분 GE의 교점을 지나는 선분 HI는 선분 AC와 평행하다. 어두운 부분의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{q}{p}M$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2011 모의_공공 교육청 고2 09월 18

57. 밑면의 반지름의 길이가 4, 높이가 10인 직원기둥이 있다. 점 A, B는 서로 다른 두 밑면의 원주 위에 있고, 선분 AB의 길이는 직원기둥의 높이와 같다. 그림과 같이 점 A에서 시작하여 직원기둥의 옆면을 한 바퀴 돌아 점 B까지 최단거리의 선을 그을 때 그 선의 길이를 a_1, 두 바퀴 돌아 최단거리의 선을 그을 때 그 선의 길이를 a_2, $\cdots$, n바퀴 돌아 최단거리의 선을 그을 때 그 선의 길이를 a_n이라 하자.

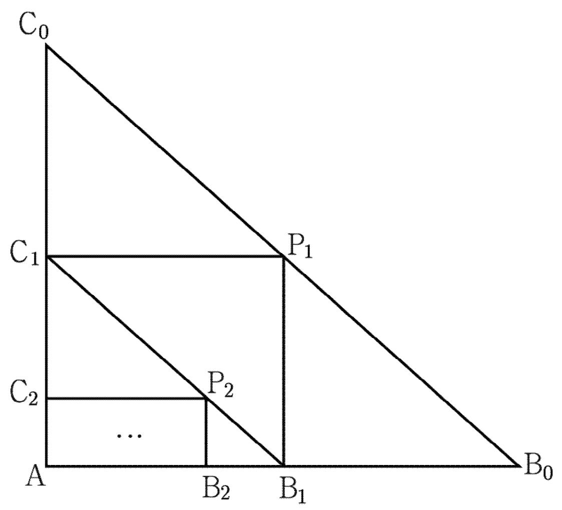
이때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값은?



① 8π ② 7π ③ 6π
④ 5π ⑤ 4π

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 09월 21

58. 그림과 같이 $\angle A = 90°$ 인 직각이등변삼각형 AB_0C_0 이 있다. 선분 B_0C_0 위에 꼭짓점 P_1 이 있고, 각 A 를 낀 두 변에 두 꼭짓점 B_1, C_1 이 있는 직사각형 $AB_1P_1C_1$ 을 $\overline{P_1B_1} : \overline{P_1C_1} = 1:1$ 이 되도록 그린다. 선분 B_1C_1 위에 꼭짓점 P_2 가 있고, 각 A 를 낀 두 변에 두 꼭짓점 B_2, C_2 가 있는 직사각형 $AB_2P_2C_2$ 를 $\overline{P_2B_2} : \overline{P_2C_2} = 1:2$ 가 되도록 그린다.
이와 같은 방법으로 선분 $B_{n-1}C_{n-1}$ 위에 꼭짓점 P_n 이 있고, 각 A 를 낀 두 변에 두 꼭짓점 B_n, C_n 이 있는 직사각형 $AB_nP_nC_n$ 을 $\overline{P_nB_n} : \overline{P_nC_n} = 1:n$ 이 되도록 그린다. 선분 P_nB_n 의 길이를 a_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 의 값은?
(단, 점 B_n 은 선분 AB_0 위에 있다.)



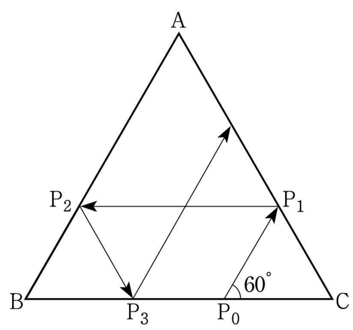
① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$
④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 10월 28

59. 한 변의 길이가 1 인 정삼각형 ABC 가 있다. 변 BC 위에 양 끝점이 아닌 한 점 P_0 을 잡는다. 그림과 같이 P_0 을 지나고 변 AB 와 평행한 직선을 그어 변 AC 와 만나는 점을 P_1, 점 P_1 을 지나고 변 BC 와 평행한 직선을 그어 변 AB 와 만나는 점을 P_2, 점 P_2 를 지나고 변 AC 와 평행한 직선을 그어 변 BC 와 만나는 점을 P_3 이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 점을 P_n 이라 하고, 점 P_0 을 출발하여 점 P_n 까지 이동한 거리 l_n 을

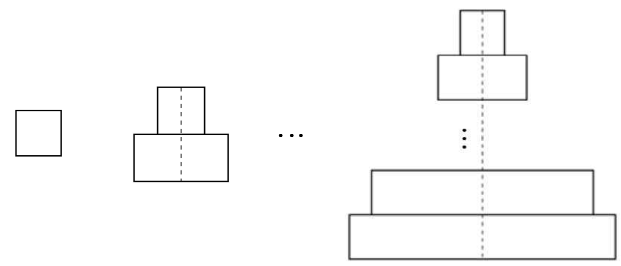
$$l_n = \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{l_{2n}}{2n+1} = \frac{b}{a}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하시오.
(단, a, b 는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 06월

60. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형을 [도형 1]이라 하자. [도형 1]의 아랫변에 가로의 길이 4, 세로의 길이 2인 직사각형을 한 직선에 대해 대칭이 되도록 이어 붙여 만든 도형을 [도형 2]라 하자. 이때 한 직선은 [도형 2]의 가장 긴 변의 중점을 지난다. 이와 같은 방법으로 3이상의 자연수 n에 대하여 [도형 $(n-1)$]의 아랫변에 가로의 길이 $2n$, 세로의 길이 2인 직사각형을 이어 붙여 만든 도형을 [도형 n]이라 하자.



자연수 n에 대하여 [도형 n]을 포함하는 원들 중 가장 작은 원의 넓이를 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{80a_n}{\pi n^2}$의 값을 구하시오.

06 미적

01 수열의 극한

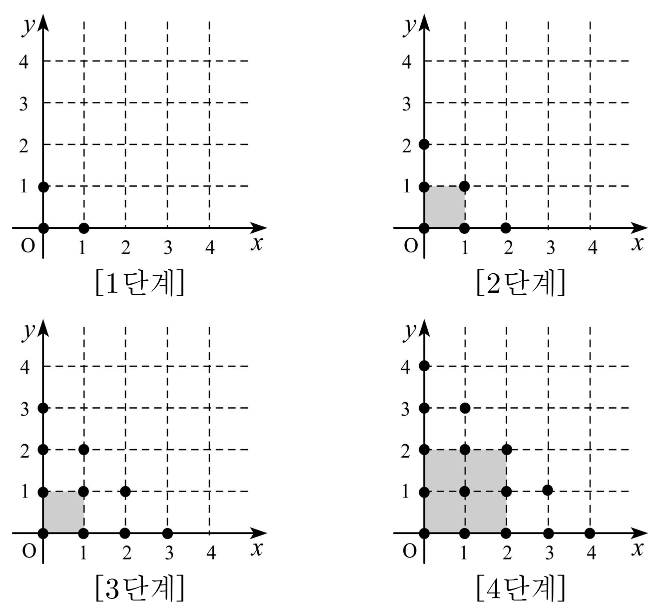
03 수열의 극한의 활용

06 수열의 극한의 활용6 (격자점)

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 17

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 10월 17

61. 다음과 같이 좌표평면 위에 단계별로 x좌표와 y좌표가 음이 아닌 정수인 점을 표시한다. [1단계]에서는 원점과 x좌표와 y좌표의 합이 1인 점들을 표시하고, [2단계]에서는 [1단계]의 점에 x좌표와 y좌표의 합이 2인 점들을 추가로 표시한다. 이와 같은 방법으로 [n단계]에서는 [$n-1$단계]의 점에 x좌표와 y좌표의 합이 $n(n=2, 3, 4, \cdots)$인 점들을 추가로 표시한다.



이 때, [n단계]에 있는 모든 점의 개수를 a_n, [n단계]에 있는 점들을 꼭짓점으로 하는 정사각형 중에서 원점을 한 꼭짓점으로 하고 넓이가 최대인 정사각형의 내부 및 둘레에 있는 모든 점의 개수를 b_n이라 하자. 예를 들어 $a_4=15$, $b_4=9$이다. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{b_{2n}}$의 값은?

① $\frac{5}{2}$ ② 2 ③ $\frac{3}{2}$

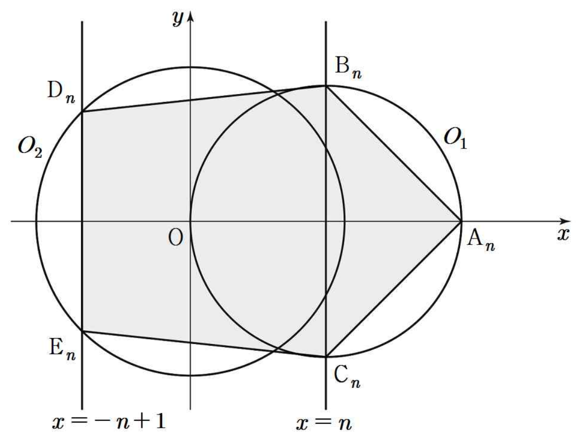
④ $\frac{4}{3}$ ⑤ 1

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 11월 19

62. 그림과 같이 1 보다 큰 자연수 n에 대하여 두 원

$$O_1 : (x-n)^2+y^2=n^2,\ O_2 : x^2+y^2=2(n-1)^2$$

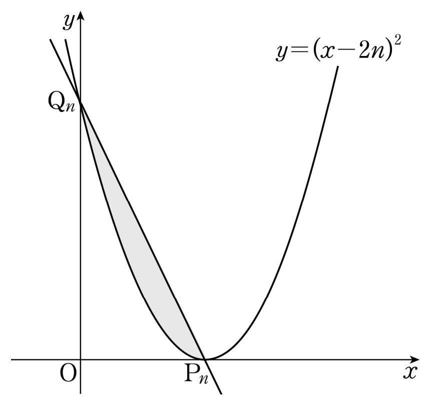
과 점 $\mathrm{A}_n(2n,\ 0)$이 있다. 원 O_1과 직선 $x=n$이 만나는 두 점을 각각 B_n, C_n, 원 O_2와 직선 $x=-n+1$이 만나는 두 점을 각각 D_n, E_n이라 하자. 오각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n\mathrm{C}_n$의 둘레 및 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점들의 개수를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{5}n-\sqrt{a_n}\right)$의 값은?



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$　② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$　③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\sqrt{5}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 03월 18

63. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 곡선 $y=(x-2n)^2$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 두 점 P_n, Q_n을 지나는 직선과 곡선 $y=(x-2n)^2$으로 둘러싸인 영역(경계선 포함)에 속하고 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수를 a_n이라 하자. 다음은 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}$의 값을 구하는 과정이다.



두 점 P_n, Q_n을 지나는 직선의 방정식은

$y=\boxed{\text{(가)}}\times x+4n^2$이다. 주어진 영역에 속하는 점 중에서 x좌표가 k (k는 $2n-1$이하의 자연수)이고 y좌표가 자연수인 점의 개수는 $\boxed{\text{(나)}}+2nk$이므로

$$a_n=\sum_{k=1}^{2n-1}\left(\boxed{\text{(나)}}+2nk\right)\text{이다.}$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\boxed{\text{(다)}}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $p\times f(3)\times g(4)$의 값은?

① 100　② 105　③ 110　④ 115　⑤ 120

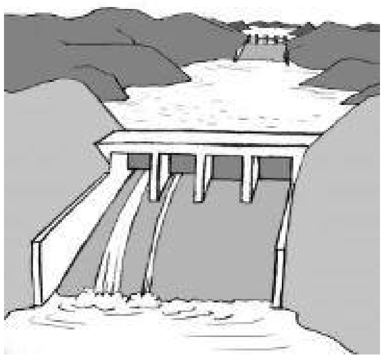
06 미적 01 수열의 극한

03 수열의 극한의 활용

07 등비수열의 극한의 활용1 (대수 또는 방부등식)

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 03월 16
[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 03월 16

64. 어느 강 상류와 하류에 각각 위치한 1호 댐과 2호 댐이 있다. 강 상류의 1호 댐으로부터 2호 댐으로 매일 100만톤의 물이 유입되고, 정오에 2호 댐의 저수량을 측정한다. 정오부터는 측정된 저수량의 2%를 농업용수와 생활용수 등을 위하여 강 하류로 방류한다고 한다. 매일 이와 같은 과정이 한없이 반복된다고 할 때, 정오에 측정되는 2호 댐의 저수량은 어떤 값에 한없이 가까워지는가?
(단, 방류는 그날 중으로 이루어지고 자연 증발 및 기타 유실량은 무시한다.)



① 4400만톤 ② 4600만톤 ③ 4800만톤
④ 5000만톤 ⑤ 5200만톤

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 03월 25
[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 03월 25

65. 2500 L 의 물을 저장할 수 있는 물탱크에 현재 1200 L 의 물이 담겨 있다. 이 물탱크에 있는 물의 양의 12%를 사용한 다음 x L 의 물을 넣는 시행을 한다. 이와 같은 시행을 n번 반복한 후 물탱크에 남아 있는 물의 양을 a_n L 라 하자. 부등식 $\lim_{n\to\infty} a_n \le 2000$ 이 성립하도록 하는 x의 최댓값을 구하시오.

[출처] 2010 모의_공공 경찰대 고3 07월 16

66. 직각삼각형 $\mathrm{AP_1P_2}$는 $\angle \mathrm{AP_1P_2}$가 직각이고

$\overline{\mathrm{AP_1}}=\overline{\mathrm{P_1P_2}}=1$이라 하자. 2 이상의 자연수 n에 대하여

직각삼각형 $\mathrm{AP}_n\mathrm{P}_{n+1}$을 $\angle \mathrm{AP}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 직각이고

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=2\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$이 되도록 그린다. 이때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\overline{\mathrm{P}_n P_{n+1}}}{\overline{\mathrm{AP}_n}}\right)^2$의 값은?

① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ 3

④ $\dfrac{7}{2}$ ⑤ 5

[출처] 2012 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

[출처] 2012 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

67. 다음과 같이 두 수 0과 1만을 사용하여 제 n행에 n자리의 자연수를 크기순으로 모두 나열해 나간다.
$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

제1행	1
제2행	10, 11
제3행	100, 101, 110, 111
제4행	1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111
$\cdots$	

제 n행에 나열한 모든 수의 합을 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_2=21,\ a_3=422$이다. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{20^n}=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p,\ q$는 서로소인 자연수이다.)

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 06월 30

68. 두 집합

$A=\{2l \mid l$은 자연수$\}$, $B=\{2^m \mid m$은 자연수$\}$

가 있다. 집합 A의 원소 a에 대하여 집합 B의 원소 중 a의 약수의 최댓값을 $M(a)$라 하자. 예를 들어, $M(2)=2$, $M(12)=4$이다. 수열 $\{a_n\}$을

$$a_n=\sum_{k=1}^{2^{n-1}} M(2k)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{150a_n}{(3n+1)\times 2^n}$의 값을 구하시오.

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 11월 18

69. 자연수 n에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$f(x)=x^{n+2}-3(3^{n+1}-1)$,

$g(x)=3^{n+1}(n+2)(x-3)$

이라 하자. 다음은 $x\ge 3$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>g(x)$가 성립함을 증명하는 과정이다.

함수 $h(x)$를 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)$는 $(n+2)$차 다항함수이다.

$h'(x)=(n+2)\times$ (가)

$x>3$에서 $h'(x)>0$이므로 함수 $h(x)$는 증가한다.

$x\ge 3$에서 $h(x)$의 최솟값은 (나)

$x\ge 3$에서 $h(x)\ge$ (나) >0이므로

$f(x)-g(x)>0$

따라서 $x\ge 3$인 모든 실수 x에 대하여

부등식 $f(x)>g(x)$가 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $A(x)$, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{p\times A(4)}{4^n}$의 값은?

① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 20

06 미적

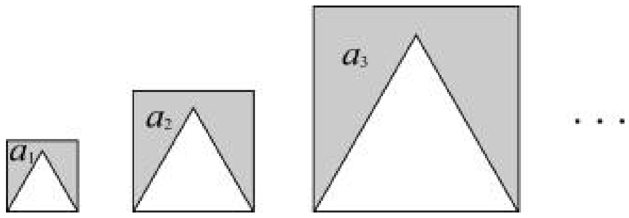
01 수열의 극한

03 수열의 극한의 활용

08 등비수열의 극한의 활용2 (함수 및 도형)

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 03월 29

70. 넓이가 1, 3, 9, 27, ⋯ 인 등비수열을 이루는 정사각형들을 그림과 같이 왼쪽부터 차례로 배열하고, 각 정사각형의 내부에 정사각형과 한 변을 공유하는 정삼각형을 그린다.



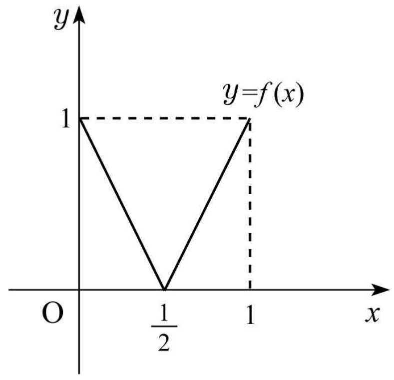
정삼각형의 외부와 정사각형의 내부의 공통부분(어두운 부분)의 넓이를 왼쪽부터 차례로 a_1, a_2, a_3, ⋯ 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{8(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{3^n}$ 의 값은?

① $2-\sqrt{3}$ ② $3-\sqrt{3}$ ③ $4-\sqrt{3}$

④ $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{4-\sqrt{3}}{2}$

[출처] 2009 모의_공공 교육청 고3 03월 29

71. 그림은 함수 $f(x)=2\left|x-\frac{1}{2}\right|\,(0\le x\le 1)$ 의 그래프이다.



자연수 n에 대하여 집합 A_n을

$$A_n=\{x\,|\,f^n(x)=1,\ 0\le x\le 1\}$$

이라 할 때, 집합 A_n의 원소의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 $A_1=\{0,1\}$, $A_2=\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$이므로 $a_1=2$, $a_2=3$이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}$ 의 값은?

(단, $f^1=f$, $f^{n+1}=f\circ f^n\,(n=1,2,3,\cdots)$이다.)

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 17

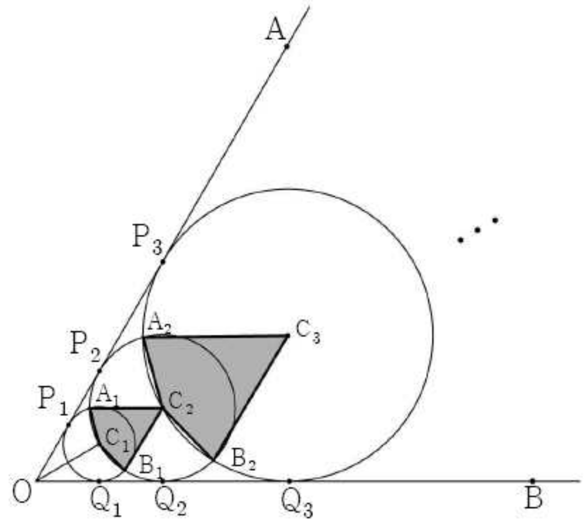
[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 04월 17

72. 그림과 같이 크기가 $60°$ 인 $\angle$AOB의 이등분선 위에 $\overline{\mathrm{OC_1}}=2$ 인 점 $\mathrm{C_1}$을 잡아 점 $\mathrm{C_1}$을 중심으로 하고 반직선 OA와 OB에 접하는 원 $\mathrm{C_1}$을 그릴 때, 원 $\mathrm{C_1}$과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{Q_1}$이라 하자.

점 $\mathrm{C_1}$을 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 $\mathrm{C_2}$, 원 $\mathrm{C_2}$와 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{Q_2}$라 하고, 원 $\mathrm{C_1}$과 원 $\mathrm{C_2}$가 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_1}$, $\mathrm{B_1}$이라 할 때, 사각형 $\mathrm{A_1C_1B_1C_2}$의 넓이를 S_1이라 하자.

점 $\mathrm{C_2}$를 지나고 반직선 OA와 OB에 접하는 두 원 중에서 큰 원의 중심을 $\mathrm{C_3}$, 원 $\mathrm{C_3}$과 반직선 OA, OB와의 접점을 각각 $\mathrm{P_3}$, $\mathrm{Q_3}$이라 하고, 원 $\mathrm{C_2}$와 원 $\mathrm{C_3}$이 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_2}$, $\mathrm{B_2}$라 할 때, 사각형 $\mathrm{A_2C_2B_2C_3}$의 넓이를 S_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^n+3^n}$ 의 값은?

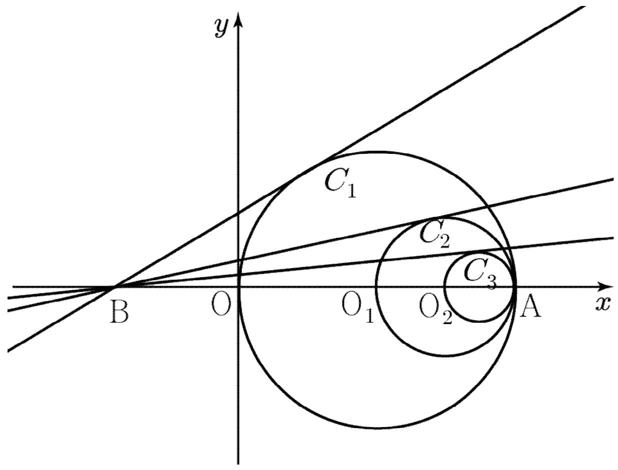


① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{3}{8}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{15}}{8}$

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 07월

73. 그림과 같이 좌표평면에 원 $C_1:(x-1)^2+y^2=1$과 점 A$(2,0)$이 있다. 원 C_1의 중심을 $\mathrm{O_1}$이라 하고, 선분 $\mathrm{O_1A}$를 지름으로 하는 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심을 $\mathrm{O_2}$라 하고, 선분 $\mathrm{O_2A}$를 지름으로 하는 원을 C_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 원을 C_n이라 하자. 점 B$(-1,0)$에서 원 C_n에 그은 접선의 기울기를 a_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}2^n a_n$의 값은? (단, $a_n>0$이다.)



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$

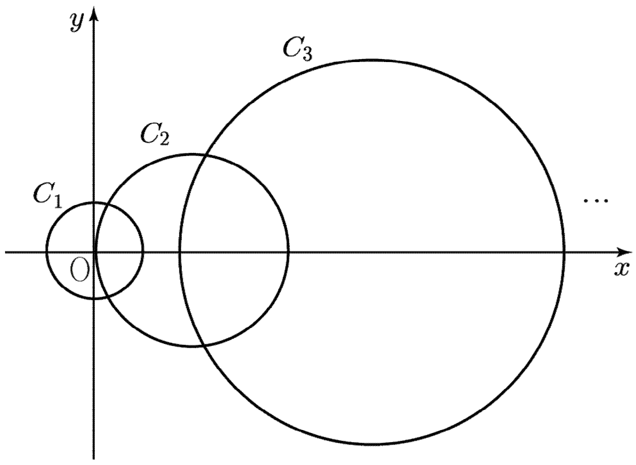
④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 07월 20

74. 자연수 n에 대하여 중심이 x축 위에 있고 반지름의 길이가 r_n인 원 C_n을 다음과 같은 규칙으로 그린다.

> (가) 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C_1을 그린다.
>
> (나) 원 C_{n-1}의 중심을 x축의 방향으로 $2r_{n-1}$만큼 평행이동시킨 점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2r_{n-1}$인 원 C_n을 그린다. $(n=2, 3, 4, \cdots)$

원 C_n의 중심을 $(a_n, 0)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{r_n}$의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[출처] 2014 모의_공공 경찰대 고3 07월 15

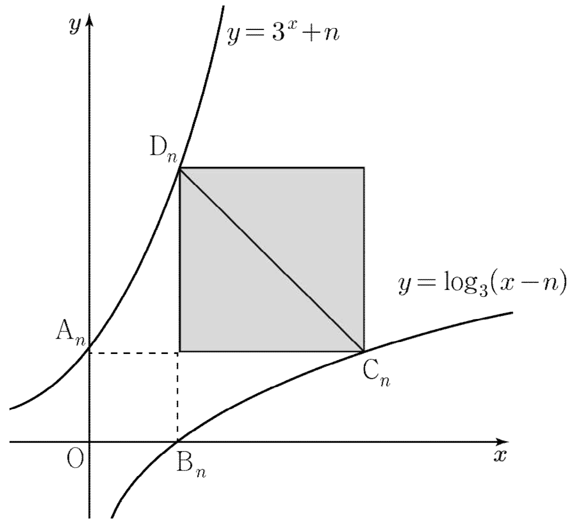
75. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$이 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 $\mathrm{A_n}$, B_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_{n-1}\mathrm{B}_n$과 삼각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_{n-1}$의 넓이를 각각 S_n, T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{T_n}$의 값은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$

④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

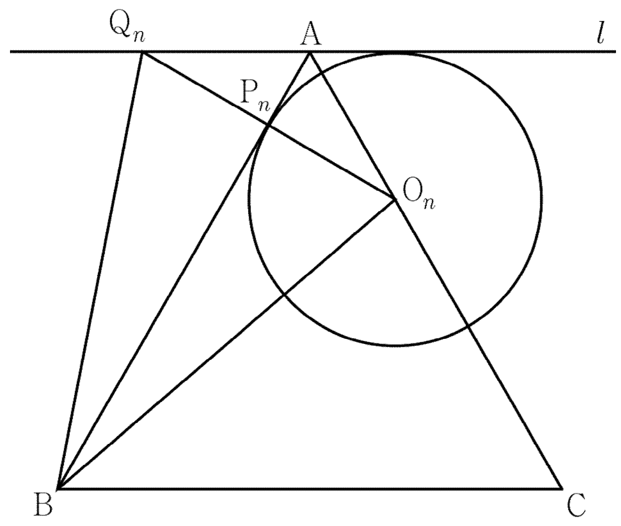
[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 11월 26

76. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 곡선 $y=3^x+n$이 y축과 만나는 점을 A_n, 곡선 $y=\log_3(x-n)$이 x축과 만나는 점을 B_n이라 하자. 점 A_n을 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_3(x-n)$과 만나는 점을 C_n, 점 B_n을 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=3^x+n$과 만나는 점을 D_n이라 하자. 선분 C_nD_n을 대각선으로 하는 정사각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^{2n}}$의 값을 구하시오.



[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 07월 29

77. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC와 점 A를 지나고 직선 BC와 평행한 직선 l이 있다. 자연수 n에 대하여 중심 O_n이 변 AC 위에 있고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$인 원이 직선 AB와 직선 l에 모두 접한다. 이 원과 직선 AB가 접하는 점을 P_n, 직선 O_nP_n과 직선 l이 만나는 점을 Q_n이라 하자. 삼각형 BO_nQ_n의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}2^nS_n=k$이다. k^2의 값을 구하시오.



[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 09월 29

78. 2 이상의 자연수 n과 두 정수 a, b에 대하여 좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(0, 2)$, $\mathrm{C}(0, 2^n)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\angle \mathrm{B}=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

(나) $|ab| \leq 2^{n+1}$

위의 조건을 만족시키는 모든 삼각형 ABC의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{8^{n-2}}$의 값을 구하시오.

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 06월 18

79. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 직선 $3x-4y+4^n=0$과 x축, y축에 동시에 접하면서 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있는 두 원의 반지름의 길이의 합을 a_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n+1}$의 값은?

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{7}{12}$

④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

06 미적 01 수열의 극한

03 수열의 극한의 활용

09 극한으로 정의된 함수1 (기본)

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 10

80. 두 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}-\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$, $g(x)=-x(x^2-a^2)$에 대하여 방정식 $f(x)-g(x)=0$이 단 하나의 실근을 갖는 a의 최댓값은?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2

④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

[출처] 2010 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 12

81. 두 실수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{-a|x|-|x|^n+b}{|x|^n+1}$$

가 모든 실수 x에서 연속일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $a-b=1$

ㄴ. 함수 $f(x)$의 최솟값은 -1이다.

ㄷ. $a<1$일 때, 함수 $f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 11월 18

82. 실수 m에 대하여 함수 $f(x)=mx+1$의 그래프와 함수

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-3x+4}{x^{2n}+1}$$

의 그래프가 만나는 점의 개수를 $h(m)$이라 하자. $h(-2)+\lim_{m\to1}h(m)$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 06월 21

83. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}$$

이다. x에 대한 방정식 $f(x)-ax^2=0$이 서로 다른 네 실근을 가지도록 하는 양수 a에 대하여 $60a$의 값은?

① 30　② 35　③ 40
④ 45　⑤ 50

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 06월 19

84. 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^n}{1+x^n}\ (x>0)$에 대하여

$\sum_{k=1}^{10} f\left(\frac{k}{5}\right)=33$이다. 상수 a의 값은?

① 6 ② 8 ③ 10

④ 12 ⑤ 14

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고2 06월 19

85. 함수 $f(x)$가 $-1<x\le1$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3x^{2n}+|x|}{x^{2n}+1}$$

이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+2)$이다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f(3)=2$

ㄴ. 원 $x^2+y^2=2$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

ㄷ. 원 $x^2+y^2=k\ (k>0)$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만나도록 하는 100 이하의 k의 개수는 6이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 10월 20

86. 두 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}}{1+x^{2n}},\ g(x)=x+a$$

의 그래프의 교점의 개수를 $h(a)$라 할 때,
$h(0)+\lim_{a\to 1+}h(a)$의 값은? (단, a는 실수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[출처] 2018 모의_공공 경찰대 고3 07월 19

87. 함수

$$f(x)=\begin{cases}\lim_{n\to\infty}\dfrac{x(x^{2n}-x^{-2n})}{x^{2n}+x^{-2n}} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

에 대하여 방정식 $f(x)=(x-k)^2$의 서로 다른 실근의 개수가 3인 실수 k의 범위는 $a<k<b$이다. 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$
④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 18

88. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$$

라 하자. $(f\circ f)(1)=\frac{5}{4}$가 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① $\frac{11}{2}$ ② $\frac{13}{2}$ ③ $\frac{15}{2}$
④ $\frac{17}{2}$ ⑤ $\frac{19}{2}$

06 미적 01 수열의 극한

03 수열의 극한의 활용

10 극한으로 정의된 함수2 (연속성)

[출처] 2005 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 14

89. 삼차함수 $y=f(x)$가 극댓값 $\frac{1}{2}$, 극솟값 -2를 가질 때, 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\{f(x)\}^{2n}}$$

이 때, 실수 전체의 집합에서 함수 $y=g(x)$는 $x=\alpha$에서 불연속이다. α의 개수는?

① 1　② 2　③ 3

④ 4　⑤ 5

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 11월 공통범위 6

90. 함수 $f(x)=x^2-4x+a$와 함수

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2|x-b|^n+1}{|x-b|^n+1}$$

에 대하여 $h(x)=f(x)g(x)$라 하자. 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 두 상수 a,b의 합 $a+b$의 값은?

① 3　② 4　③ 5

④ 6　⑤ 7

[출처] 2009 모의_공공 평가원 고3 06월 23

91. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 두 함수

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1},\quad h(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$와 함수 $f(x)h(x)$가 모두 연속함수일 때, $f(10)$의 값을 구하시오.

[출처] 2012 모의_공공 교육청 고2 11월 28

92. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}+1},\ g(x)=x^2+10x$$

이다. 함수 $f(x)g(x-a)$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합을 구하시오.

[출처] 2013 모의_공공 교육청 고2 11월 19

93. 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|^n+2|x|+1}{|x|^n+1}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$

ㄴ. $\lim_{x\to1-}f(x)=3$

ㄷ. 함수 $(x^2-1)f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 07월 27

94. 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(8)$의 값을 구하시오.

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 09월 26

95. 일차함수 $f(x)=3x+a$와 함수

$$g(x)=\begin{cases}-x+2 & (x\le-1)\\ \lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+3}{x^{2n}+1} & (x>-1)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(11)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.)

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 미적분 29

96. 실수 t에 대하여 직선 $y=tx-2$가 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}-1}{x^{2n}+1}$$

의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 모든 a의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 a_1, a_2, $\cdots$, a_m(m은 자연수)라 할 때, $m\times a_m$의 값을 구하시오.

06 미적

01 수열의 극한

03 수열의 극한의 활용

11 극한으로 정의된 함수3 (미분과 적분)

[출처] 2008 모의_공공 사관학교 고3 07월 9

97. 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}+x^2+1}{x^{2n}+1}$에 대한 설명 중 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $x=-1$에서 연속이다.

ㄴ. $x=0$에서 극솟값 1을 갖는다.

ㄷ. $x=1$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

06 미적 01 수열의 극한

03 수열의 극한의 활용

12 수열의 극한의 진위판정

[출처] 2010 모의_공공 사관학교 고3 07월 20

98. 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. $0 < a_n < b_n\,(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$이면 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{{b_n}^2} = 0$이다.

ㄴ. 수열 $\{a_n\}$이 발산하고 수열 $\{a_n b_n\}$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$이다.

ㄷ. $a_n < b_n < c_n\,(n=1,\,2,\,3,\,\cdots)$이고 $\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n = \lim_{n\to\infty}(n-1)c_n = 1$이면 $\lim_{n\to\infty} nb_n = 1$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 03월 20

99. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항이

$$a_n = \frac{(-1)^n + 3}{2},\ b_n = p \times (-1)^{n+1} + q$$

일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, p, q는 실수이다.)

<보 기>

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$은 발산한다.

ㄴ. 수열 $\{b_n\}$이 수렴하도록 하는 실수 p가 존재한다.

ㄷ. 두 수열 $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n b_n\}$이 모두 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2 + (b_n)^2\} = 6$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[준킬러][미적] 1급수1(빠른 정답)

준킬러미적 2023.01.06

1. [정답] 7
2. [정답] ④
3. [정답] 10
4. [정답] ①
5. [정답] ①

6. [정답] ②
7. [정답] 12
8. [정답] ④
9. [정답] ③
10. [정답] ①

11. [정답] ②
12. [정답] ②
13. [정답] ②
14. [정답] ④
15. [정답] ⑤

16. [정답] ②
17. [정답] ①
18. [정답] ②
19. [정답] ①
20. [정답] ④

21. [정답] ①
22. [정답] ②
23. [정답] ②
24. [정답] ③
25. [정답] ④

26. [정답] ②
27. [정답] ②
28. [정답] 5
29. [정답] 40
30. [정답] ①

31. [정답] ④
32. [정답] 5
33. [정답] ③
34. [정답] ③
35. [정답] 15

36. [정답] ①
37. [정답] ④
38. [정답] 54
39. [정답] 64
40. [정답] ②

41. [정답] ③
42. [정답] ④
43. [정답] 4
44. [정답] ①
45. [정답] 50

46. [정답] ⑤
47. [정답] 6
48. [정답] 12
49. [정답] 80
50. [정답] 24

51. [정답] ⑤
52. [정답] ①
53. [정답] ①
54. [정답] 20
55. [정답] 10

56. [정답] 25
57. [정답] ①
58. [정답] ⑤
59. [정답] 3
60. [정답] 125

61. [정답] ②
62. [정답] ①
63. [정답] ③
64. [정답] ④
65. [정답] 240

66. [정답] ③
67. [정답] 379
68. [정답] 25
69. [정답] ③
70. [정답] ③

71. [정답] ②
72. [정답] ⑤

73. [정답] ③
74. [정답] ④
75. [정답] ④

76. [정답] **9**
77. [정답] 192
78. [정답] **32**
79. [정답] ①
80. [정답] ②

81. [정답] ④
82. [정답] ③
83. [정답] ③
84. [정답] ①
85. [정답] ②

86. [정답] ④
87. [정답] ①
88. [정답] ③
89. [정답] ④
90. [정답] ③

91. [정답] **90**
92. [정답] **8**
93. [정답] ⑤
94. [정답] **63**
95. [정답] 30

96. [정답] 28
97. [정답] ⑤
98. [정답] ④
99. [정답] ③

[준킬러][미적] 1급수1(해설)

준킬러미적 2023.01.06

1) [정답] 7

[해설]

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\{k^2+(2n+1)k+n^2+n\}=\frac{n(n+1)(7n+2)}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=7$$

2) [정답] ④

[해설]

$a_1=1,\ b_1=4$

$b_n=f(a_n)=\dfrac{a_n+3}{a_n}\ \therefore\ a_nb_n=a_n+3=a_{n+1}$

$a_n=1+(n-1)3=3n-2,\ b_n=\dfrac{3n+1}{3n-2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}+b_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{n}+\frac{3n+1}{3n-2}\right)=4$$

3) [정답] 10

[해설]

$b_n=\sqrt{a_n+n}-\sqrt{n}$ 이라 하면,

$\lim_{n\to\infty}b_n=5$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(b_n+\sqrt{n})^2-n}{\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2}{\sqrt{n}}+2\lim_{n\to\infty}b_n=10$$

4) [정답] ①

[해설]

$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=S_n$ 이라 하면

$$a_n+b_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge 2)$$
$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}$$
$$=-\frac{1}{n(n+1)}$$

$$\lim_{n\to\infty}n^2(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}(n^2a_n+n^2b_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2}{n(n+1)}$$
$$=-1$$

또, 조건에 의해 $\lim_{n\to\infty}n^2b_n=2$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}n^2a_n=\lim_{n\to\infty}(n^2a_n+n^2b_n-n^2b_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(n^2a_n+n^2b_n)-\lim_{n\to\infty}n^2b_n$$
$$=-1-2=-3$$

5) [정답] ①

[해설]

$a_n=\sqrt{n+a_{n-1}}\ (n\ge 1)$을 양변 제곱하여 정리하면

$$(a_n-\sqrt{n})(a_n+\sqrt{n})=a_{n-1}$$

$$\therefore\ a_n-\sqrt{n}=\frac{1}{a_n+\sqrt{n}}\cdot a_{n-1}\ (n\ge 1)$$

$0<a_n-\sqrt{n}<1$ 이므로 $\sqrt{n}<a_n<\sqrt{n}+1$ 의 양변을 $\sqrt{n}$ 으로 나누고 양 변에 극한을 취하면

$$1\le\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}\le\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=1$$

6) [정답] ②

[해설]

주어진 무한수열이 수렴할 조건은

$$-1<\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{8}x\le 1,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\frac{\pi}{8}x\le\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0<x<16$일 때, $0<\frac{\pi}{8}x<2\pi$이므로 위의 부등식의 해는

$0 < \frac{\pi}{8}x \le \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi \le \frac{\pi}{8}x < \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi < \frac{\pi}{8}x < 2\pi$

따라서 구하는 자연수 x는 1, 2, 6, 7, 8, 9, 15의 7개이다.

7) [정답] 12

[해설]

$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2$이라 하면

$S_n - S_{n-1} = (a_{n+1}-a_n)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)-2\left(1-\frac{1}{9^{n-1}}\right)=\frac{16}{9^n}$

$=\left(\frac{4}{3^n}\right)^2$ (단, $n \ge 2$)

이때, $n=1$이면 $(a_2-a_1)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9}\right)=\frac{16}{9}$이므로

$(a_{n+1}-a_n)^2 = \left(\frac{4}{3^n}\right)^2$ $(n \ge 1)$이다.

$a_{n+1} > a_n$ 즉, $a_{n+1}-a_n > 0$이므로 $a_{n+1}-a_n = \frac{4}{3^n}$이다.

따라서

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{3^k} = 10 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ (단, $n \ge 2$)

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{10+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\} = 10 + \frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 12$

8) [정답] ④

[해설]

$a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1}+\left(\frac{k}{10}\right)^n}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n}+\left(\frac{k}{10}\right)^n+1}$ 에서

(i) $0 < \frac{k}{10} < 1$일 때, 즉 $0 < k < 10$일 때

$a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1}+\left(\frac{k}{10}\right)^n}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n}+\left(\frac{k}{10}\right)^n+1} = \frac{2\times 0+0}{0+0+1}=0$

이다.

(ii) $\frac{k}{10}=1$일 때, 즉 $k=10$일 때

$a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{2\times 1^{2n+1}+1^n}{1^{2n}+1^n+1} = \frac{3}{3} = 1$

(iii) $\frac{k}{10} > 1$, 즉 $k > 10$일 때

$a_k = \lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)^{2n+1}+\left(\frac{k}{10}\right)^n}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n}+\left(\frac{k}{10}\right)^n+1}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{k}{10}\right)+\frac{1}{\left(\frac{k}{10}\right)^n}}{1+\frac{1}{\left(\frac{k}{10}\right)^n}+\frac{1}{\left(\frac{k}{10}\right)^{2n}}} = \frac{\frac{k}{5}+0}{1+0+0} = \frac{k}{5}$

이다.

따라서 $a_k = \begin{cases} 0 & (k < 10) \\ 1 & (k = 10) \\ \frac{k}{5} & (k > 10) \end{cases}$ 이다.

그러므로

$\sum_{k=1}^{20}a_k = \sum_{k=1}^{9}a_k + a_{10} + \sum_{k=11}^{20}a_k = \sum_{k=1}^{9}0 + 1 + \sum_{k=11}^{20}\frac{k}{5}$

$=1+\sum_{k=1}^{10}\left(2+\frac{k}{5}\right) = 1+20+\frac{1}{5}\times\frac{10\times 11}{2} = 32$

이다.

9) [정답] ③

[해설]

$ka_k = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{5^n+4k^n}$, $1 \le k \le 4$이면 $ka_k = 5$,

$k=5$이면 $5a_5 = \frac{5}{1+4} = 1$, $k \ge 6$이면 $ka_k = 0$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}ka_k = 5+5+5+5+1+0+\cdots+0 = 21$

10) [정답] ①

[해설]

수열 $\{a_n\}$의 첫째 항과 공비를 각각 a, r이라 하면

$r=1$일 때, $\frac{S_n - a_n}{a_n} = \frac{na-a^2}{a} = n-a$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-a_n}{a_n}=\infty$$

$r\neq1$일 때,

$$\frac{S_n-a_n}{a_n}=\frac{\frac{a\{1-r^n\}}{1-r}-a^2r^{2n-2}}{ar^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{1-r}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}-\frac{r}{1-r}-ar^{n-1}$$

위 식에서 $|r|<1$, $r\neq0$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}$이 발산하고

$|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^{n-1}$이 발산하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-a_n}{a_n}$이 수렴하지 못한다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-a_n}{a_n}$이 수렴하기 위해서는 $r=-1$이여야 한다.

n이 홀수일 때, $\frac{S_n-a_n}{a_n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-a=1-a$

n이 짝수일 때, $\frac{S_n-a_n}{a_n}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+a=a$

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-a_n}{a_n}$이 수렴하므로 $1-a=a$ $\therefore$ $a=\frac{1}{2}$

$\therefore$ $a_{10}=\frac{1}{2}(-1)^9=-\frac{1}{2}$

11) [정답] ②

[해설]

(ⅰ) $a^2=b^2$ $(a=b)$이면

$$\frac{c^n+b^n}{a^{2n}+b^{2n}}=\frac{\left(\frac{c}{a^2}\right)^n+\left(\frac{1}{b}\right)^n}{1+1}\text{이므로}$$

$b=1$, $c=a^2=1$ $\cdots$ $(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 1)$

(ⅱ) $a^2>b^2(a>b)$이면

$$\frac{c^n+b^n}{a^{2n}+b^{2n}}=\frac{\left(\frac{c}{a^2}\right)^n+\left(\frac{b}{a^2}\right)^n}{1+\left(\frac{b^2}{a^2}\right)^n}\text{이므로}$$

$c=a^2$ $\cdots$ $(a,\ b,\ c)=(2,\ 1,\ 4)$, $(3,\ 1,\ 9)$, $(3,\ 2,\ 9)$

(ⅲ) $a^2<b^2(a<b)$이면

$$\frac{c^n+b^n}{a^{2n}+b^{2n}}=\frac{\left(\frac{c}{b^2}\right)^n+\left(\frac{1}{b}\right)^n}{\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^n+1}\text{이므로}$$

$c=b^2$ $\cdots$ $(a,\ b,\ c)=(1,\ 2,\ 4)$, $(1,\ 3,\ 9)$, $(2,\ 3,\ 9)$

따라서 모두 7개이다.

12) [정답] ②

[해설]

(가) K (나) $a_{n-1}-K$ (다) $\frac{1}{2^{n-1}}$

13) [정답] ②

[해설]

공차가 d일 때 집합 $\{a,b,c\}$의 개수는 다음과 같다.

$d=1$일 때 $2n-2$(개)

$d=2$일 때 $2n-4$(개)

⋮

$d=n-1$일 때 $2n-2(n-1)=2$(개)

$$\therefore\ T_n=\sum_{d=1}^{n-1}(2n-2d)=2\sum_{d=1}^{n-1}(n-d)=2\sum_{k=1}^{n-1}k=n(n-1)$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n}{n^2}=1$$

14) [정답] ④

[해설]

$n=\frac{(n+1)^2}{a_{n+1}}-\frac{n^2}{a_n}$, $b_n=\frac{n^2}{a_n}$라 하면

주어진 식은 $b_{n+1}-b_n=n$으로 표현된다.

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}k$$

$=\frac{n^2-n+1}{2}$이므로 $\frac{n^2}{a_n}=\frac{n^2-n+1}{2}$이다.

$a_n=\frac{2n^2}{n^2-n+1}$ $\therefore\lim_{n\to\infty}a_n=2$

15) [정답] ⑤

[해설]

로그의 성질에 의해 $a_n a_{n+1} a_{n+2} = 2$ 이므로 수열$\{a_n\}$은

$2, 3, \frac{1}{3}$이 반복되어 나타난다.

ㄱ. $6 = 3 \times 2$ 이므로 $a_6 = \frac{1}{3}$ (참)

ㄴ. $S_{10} = \frac{16 \times 4 - 10}{3} = 18$ (참)

ㄷ. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} S_{3n} = \frac{16}{3}$ 이다. (참)

16) [정답] ②

[해설]

$\log x$의 지표와 가수가 각각 $f(x)$, $g(x)$이므로

$\log x = f(x) + g(x)$ ($f(x)$는 정수, $0 \le g(x) < 1$)

$f(x) - (n+1)g(x) = n$, $f(x) - n = (n+1) \cdot g(x)$ …… ㉠

$0 \le g(x) < 1$이므로 $0 \le f(x) - n < n+1$

$\Leftrightarrow n \le f(x) < 2n+1$

$f(x)$는 정수이므로, n, $n+1$, $\cdots$, $2n$이고, 식 ㉠에 대입하면

$f(x) = n$일 때 $g(x) = 0$ $\quad\quad$ $\therefore \log x = n$

$f(x) = n+1$일 때 $g(x) = \frac{1}{n+1}$ $\therefore \log x = n+1+\frac{1}{n+1}$

$\vdots$

$f(x) = n+k$일 때 $g(x) = \frac{k}{n+1}$ $\therefore \log x = n+k+\frac{k}{n+1}$

$\vdots$

$\therefore a_n = 10^n \times 10^{n+1+\frac{1}{n+1}} \times \cdots \times 10^{n+k+\frac{k}{n+1}} \times \cdots \times 10^{2n+\frac{n}{n+1}}$

$\therefore \log a_n = \sum_{k=0}^{n} \left(n+k+\frac{k}{n+1}\right)$

$= n(n+1) + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2(n+1)} = \frac{3n^2+3n}{2} + \frac{n}{2}$

$= \frac{3n^2+4n}{2}$ $\therefore \lim_{n \to \infty} \frac{\log a_n}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{3n^2+4n}{2n^2} = \frac{3}{2}$

17) [정답] ①

[해설]

$\log t$ 의 정수부분 $f(t)$, 소수부분 $g(t)$ 이므로

$f(t)$ 는 정수, $0 \le g(t) < 1$

$g(t)$ 의 조건에서

$-\frac{1}{3} \le g(t) - \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$ 에서 $0 \le \left\{g(t) - \frac{1}{3}\right\}^2 < \frac{4}{9}$

$-n \le 9n\left\{g(t) - \frac{1}{3}\right\}^2 - n < 3n$

$-n \le f(t) < 3n$

따라서 서로 다른 모든 $f(t)$ 의 합

$a_n = -n + (-n+1) + \cdots + (3n-1)$

$= (n+1) + (n+2) + \cdots + (3n-1) = \frac{(2n-1)(n+1+3n-1)}{2}$

$= 4n^2 - 2n$ $\therefore \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n^2} = \lim_{n \to \infty} \frac{4n^2-2n}{n^2} = 4$

18) [정답] ②

[해설]

집합 S_n의 부분집합 중 원소의 개수가 두 개인

집합에 대하여 이 두 원소의 차가 $2n$보다 큰 임의의

두 원소를 a, $b(a < b)$라 하자.

$b - a > 2n$이므로 $b > a + 2n$ (단, $1 \le a < b \le 3n$)

$a = 1$ 일 때, $b = 2n+2$, $2n+3$, $\cdots$, $3n$

$\{1, 2n+2\}$, $\{1, 2n+3\}$, $\cdots$, $\{1, 3n\}$: $(n-1)$개

$a = 2$ 일 때, $b = 2n+3$, $2n+4$, $\cdots$, $3n$

$\{2, 2n+3\}$, $\cdots$, $\{2, 3n\}$: $(n-2)$개

$\vdots$

$a = n-1$ 일 때, $b = 3n$

$\{n-1, 3n\}$: 1개

$n \le a < 3n$일 때, b는 없으므로 0개

그러므로 원소의 개수가 두 개이고, 이 두 원소의 차가

$2n$보다 큰 집합 S_n의 모든 부분집합의 개수 a_n은

$a_n = (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$

$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2}$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}\right\}=\frac{n^3-n}{6}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\times\frac{n^3-n}{6}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{6}=\frac{1}{6}$$

19) [정답] ①

[해설]

(i) S_n의 넓이는 한 변의 길이가 1이고 높이가

4인 삼각형의 넓이이므로 $S_n=\frac{1}{2}\cdot1\cdot4=2$

(ii) 점 B_n의 x좌표는 직선 $y=-\frac{n}{4}x$과 $y=-1$과의

교점의 x좌표이므로 $\frac{4}{n}$이다. 점 B_{n+1}의 x좌표는 직선

$y=-\frac{n+1}{4}x$과 $y=-1$과의 교점의 x좌표이므로

$\frac{4}{n+1}$이다. 따라서 $T_n=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{n}-\frac{4}{n+1}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_kT_k=4\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=4\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=4$$

20) [정답] ④

[해설]

$nx=\frac{n}{x}$에서 $x=\pm1$이므로

두 그래프의 교점 $A_n(1,\ n)$, $B_n(-1,\ -n)$이고

$C_n(1,\ 0)$이다.

직선 B_nC_n의 방정식은 $y=\frac{n}{2}(x-1)$이므로

$D_n\left(0,\ -\frac{n}{2}\right)$이다.

따라서 $S_n=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\left(\frac{n}{2}+n\right)=\frac{3}{4}n$

$$T_n=\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{n}{2}=\frac{n}{4}$$

$$\therefore\ (\text{준식})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{4}+n}{\frac{3}{4}n+n+1}=\frac{5}{7}$$

21) [정답] ①

[해설]

$$f(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left(x^2-\frac{2k}{n}x+\frac{k^2}{n^2}\right)$$

$$=nx^2-\frac{2}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}x+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}$$

$$=nx^2-(n+1)x+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$$

$$=n\left(x-\frac{n+1}{2n}\right)^2+\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}-\frac{(n+1)^2}{4n}$$

따라서 주어진 이차함수의 최솟값은

$$a_n=\frac{2(n+1)(2n+1)-3(n+1)^2}{12n}=\frac{n^2-1}{12n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{12n^2}=\frac{1}{12}$$

22) [정답] ②

[해설]

직선P_0P_1의 기울기가 1이므로

직선P_1P_2의 기울기는 -1이다.

점$P_1(1,1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-1=-(x-1)$ 즉, $y=-x+2$이므로

점P_2의 좌표를 구하면

$x^2=-x+2$에서 $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$, $x<0$ 이므로 $x=-2$ $\therefore$ $P_2(-2,4)$

점$P_2(-2,4)$를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y-4=x+2$ 즉, $y=x+6$이므로 점P_3의 좌표를 구하면

$x^2=x+6$에서 $x^2-x-6=0\Leftrightarrow(x+2)(x-3)=0$

$x>0$ 이므로 $x=3$ $\therefore$ $\mathrm{P}_3(3,9)$

점$\mathrm{P}_3(3,9)$를 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-9=-(x-3)$ 즉, $y=-x+12$ 이므로 점P_4의 좌표를 구

하면 $x^2=-x+12$ 에서 $x^2+x-12=0 \Leftrightarrow (x+4)(x-3)=0$

$x<0$ 이므로 $x=-4$ $\therefore$ $\mathrm{P}_4(-4,16)$

이와 같은 방법으로 $\mathrm{P_n}$의 좌표를 구하면

$\mathrm{P}_{2\mathrm{m}-1}(2\mathrm{m}-1, 4\mathrm{m}^2-4\mathrm{m}+1)$

$\mathrm{P}_{2\mathrm{m}}(-2\mathrm{m}, 4\mathrm{m}^2)$

$n=2m$ 일 때, $l_n=l_{2m}=\overline{\mathrm{P}_{2\mathrm{m}-1}\mathrm{P}_{2\mathrm{m}}}$

$=\overline{\mathrm{P}_{2\mathrm{m}-1}\mathrm{P}_{2\mathrm{m}}}=\sqrt{(4m-1)^2+(4m-1)^2}$

$=\sqrt{2}(4m-1)=\sqrt{2}(2n-1)$

$n=2m+1$ 일 때, $l_n=l_{2m+1}=\overline{\mathrm{P}_{2\mathrm{m}}\mathrm{P}_{2\mathrm{m}+1}}$

$=\sqrt{(4m+1)^2+(4m+1)^2}=\sqrt{2}(4m+1)=\sqrt{2}(2n-1)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}(2n-1)}{n}=2\sqrt{2}$$

23) [정답] ②

[해설]

주어진 조건에서 $a_n=\sqrt{n^2+1}$ 이다.

$n<\sqrt{n^2+1}<\sqrt{n^2+2n+1}=n+1$이므로 $[\,a_n\,]=n$이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\,a_1\,]+[\,a_2\,]+[\,a_3\,]+\cdots+[\,a_n\,]}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

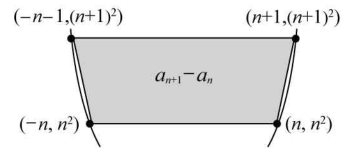
24) [정답] ③

[해설]

$a_{n+1}-a_n=(2n+1)^2$

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)^2$$

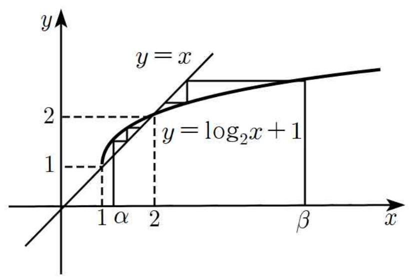
$$=\frac{4n^3-n}{3}$$



$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\frac{4}{3}$$

25) [정답] ④

[해설]



ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 위의 그래프를 참고하면,

ㄱ. $m<n$이면,

$x=1$, $x=2$일 때, $f_m(x)=f_n(x)$

$1<x<2$일 때, $f_m(x)<f_n(x)$

$x>2$일 때, $f_m(x)>f_n(x)$ (거짓)

ㄴ. $x=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=1$

$x>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=2$

따라서 $x\geq 1$에서 모두 수렴하므로 $x\geq\frac{3}{2}$일 때 역시 수렴한다. (참)

ㄷ. ㄱ에 의해 참이다. (참)

따라서 <보기> 중 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

26) [정답] ②

[해설]

점 $\mathrm{A_n}$의 좌표를 (x_n, y_n)이라 하면

조건 (나)에 의하여 점 $\mathrm{B_n}$의 좌표는 (y_n+1, x_n)이고

조건 (다)에 의하여 점 $\mathrm{A}_{\mathrm{n}+1}$의 좌표는 (x_n+1, y_n+2)이다.

$\therefore$ $x_{n+1}=x_n+1$, $y_{n+1}=y_n+2$

조건 (가)에 의하여 $x_1=1$, $y_1=2$이므로

$x_n=n$, $y_n=2n$이다.

$\therefore$ $\mathrm{A_n}(n, 2n)$, $\mathrm{B_n}(2n+1, n)$

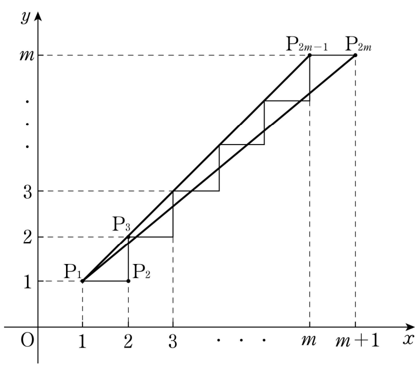
$\therefore$ $\overline{\mathrm{A_nB_n}}=\sqrt{(n+1)^2+(-n)^2}=\sqrt{2n^2+2n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{A_nB_n}}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+2n+1}}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\sqrt{2}$$

27) [정답] ②

[해설]



$a_3=\sqrt{1^2+1^2}$, $a_4=\sqrt{2^2+1^2}$, $a_5=\sqrt{2^2+2^2}$,

$\cdots$, $a_{2m-1}=\sqrt{(m-1)^2+(m-1)^2}$,

$a_{2m}=\sqrt{m^2+(m-1)^2}$

ⅰ) $n=2m-1$(m은 자연수)일 때,

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{m\to\infty}(a_{2m}-a_{2m-1})$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\sqrt{2m^2-2m+1}-\sqrt{2(m-1)^2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ⅱ) $n=2m$(m은 자연수)일 때,

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{m\to\infty}(a_{2m+1}-a_{2m})$$

$$=\lim_{m\to\infty}\left(\sqrt{2m^2}-\sqrt{2m^2-2m+1}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 ⅰ), ⅱ)에 의해 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

28) [정답] 5

[해설]

점 $\mathrm{A}_n(n,\ \sqrt{3n})$, $\mathrm{B}_n(n,\ \sqrt{n})$ 이므로

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\sqrt{3n}-\sqrt{n}=\sqrt{n}(\sqrt{3}-1)$

$S_n=\frac{\sqrt{n}(\sqrt{3}-1)}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(S_{n+1}-S_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

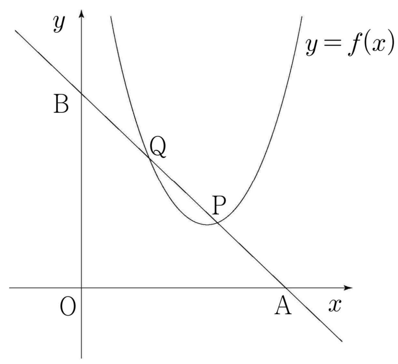
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

이므로 $a=-\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{4}$

따라서 $40(a^2+b^2)=5$

29) [정답] 40

[해설]



$\mathrm{A}(n,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ n)$이고 $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3}n,\ \frac{n}{3}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{n}{3},\ \frac{2}{3}n\right)$이다.

이차함수 $f(x)=x^2+a_nx+b_n$라고 하자.

함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+n$의 교점이 P, Q

이므로 방정식 $x^2+a_nx+b_n=-x+n$의 두 근이 두 점P, Q

의 x좌표이다. 따라서 이차방정식

$x^2+(a_n+1)x+(b_n-n)=0$

의 두 근이 $\frac{n}{3},\frac{2n}{3}$이므로 근과 계수의 관계에 의해

$$-(a_n+1)=\frac{n}{3}+\frac{2n}{3}=n,\ b_n-n=\frac{n}{3}\frac{2n}{3}=\frac{2}{9}n^2$$

$$a_n=-n-1,\ b_n=\frac{2}{9}n^2+n$$

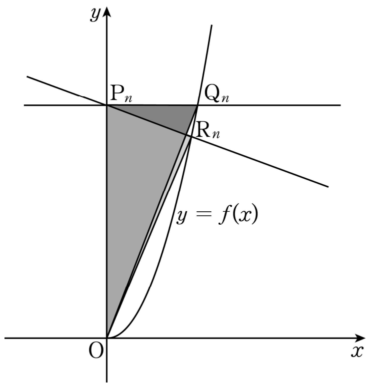
이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9b_n}{na_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+9n}{-n^2-n}=-2$$

이므로 $k=-2$이고 $10k^2=40$이다.

30) [정답] ①

[해설]



삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$ 의 넓이 S_n 은

$S_n=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OP}_n}\cdot\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\frac{1}{2}(3n+1)\sqrt{3n+1}$ 이다.

점 R_n 은 곡선 위의 점이고 y 의 좌표가 자연수이므로

자연수 a에 대하여 $(\sqrt{a},\ a)$로 놓을 수 있다.

그런데 직선 P_nR_n 의 기울기가 음수이므로

$a<3n+1$

삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OR}_n$의 넓이가 최대가 되기 위해서는 R_n 의 x좌표 $\sqrt{a}$ 가 최대일 때이다. 그러므로 $a=3n$인 경우이고, 이때 점 R_n 의 좌표는 $(\sqrt{3n},\ 3n)$이다.

즉, 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OR}_n$의 넓이는

$T_n=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{OP}_n}\cdot\sqrt{3n}=\frac{1}{2}(3n+1)\sqrt{3n}$ 이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n-T_n}{\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left\{\frac{1}{2}(3n+1)\sqrt{3n+1}-\frac{1}{2}(3n+1)\sqrt{3n}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2\sqrt{n}}(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2\sqrt{n}}\frac{(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n})(\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n})}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2(\sqrt{3n^2+n}+\sqrt{3}\,n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2\left(\sqrt{3+\frac{1}{n}}+\sqrt{3}\right)}=\frac{3}{4\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

31) [정답] ④

[해설]

원점을 지나고 기울기가 b_n인 직선의 방정식은 $y=b_nx$이다.

이 직선이 곡선 $y=-(x-n)(x-n-2)$에 접하므로

이차방정식 $b_nx=-(x-n)(x-n-2)$의 근 $x=a_n$은

중근이다.

그러므로 이차방정식 $x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)=0$에서

이차식 $x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)$는 완전제곱식으로

나타내어진다.

즉,

$$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)$$

$$=\{x+\sqrt{n(n+2)}\}^2$$

또는

$$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)$$

$$=\{x-\sqrt{n(n+2)}\}^2$$

그런데 $a_n>0$이므로

$$x^2+\{b_n-2(n+1)\}x+n(n+2)$$

$$=\{x-\sqrt{n(n+2)}\}^2=0$$

에서 $a_n=\boxed{\sqrt{n(n+2)}}$이고, x항의 계수에서

$b_n-2(n+1)=-2\sqrt{n(n+2)}$, 즉

$$b_n=\boxed{2\{n+1-\sqrt{n(n+2)}\}}$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}2\sqrt{n(n+2)}\{n+1-\sqrt{n(n+2)}\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n(n+2)}}{n+1+\sqrt{n(n+2)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$$

$$=\boxed{1}$$

이다.

$f(n)=\sqrt{n(n+2)}$, $g(n)=2\{n+1-\sqrt{n(n+2)}\}$,

$\alpha=1$이고 $f(1)=\sqrt{3}$, $g(1)=2(2-\sqrt{3})$

따라서 $2f(1)+g(1)=2\sqrt{3}+2(2-\sqrt{3})=4$

32) [정답] 5

[해설]

$f(x)=x(x-n)(x-3n^2)$

$=x^3-(3n^2+n)x^2+3n^3x$

$f'(x)=3x^2-2(3n^2+n)x+3n^3$

$f'(x)=0$ 에서

$x=\dfrac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

또는 $x=\dfrac{3n^2+n+\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$x=\dfrac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$ 에서 극댓값을 갖는다.

즉 $a_n=\dfrac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n-\sqrt{9n^4-3n^3+n^2}}{3n}$

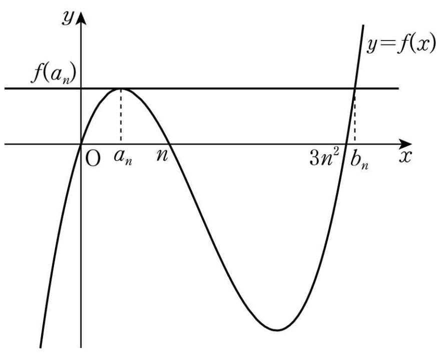
$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1-\sqrt{9n^2-3n+1}}{3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n+1)^2-(9n^2-3n+1)}{3(3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1})}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{3n+1+\sqrt{9n^2-3n+1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{3+\dfrac{1}{n}+\sqrt{9-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}$

$=\dfrac{1}{2}$



방정식 $f(x)-f(a_n)=0$은 $x=a_n$을 중근으로 가지고, a_n이 아닌 근이 b_n이므로

$f(x)-f(a_n)=(x-a_n)^2(x-b_n)$

$x=0$을 대입하면 $f(0)=0$이므로 $f(a_n)=a_n^2b_n$에서

$a_n^2b_n=a_n^3-(3n^2+n)a_n^2+3n^3a_n$

양변을 n^3a_n으로 나누면

$\dfrac{a_nb_n}{n^3}=\dfrac{a_n^2-(3n^2+n)a_n+3n^3}{n^3}$

이때

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_nb_n}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n^2-(3n^2+n)a_n+3n^3}{n^3}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{n}\times\left(\dfrac{a_n}{n}\right)^2-\dfrac{3n^2+n}{n^2}\times\dfrac{a_n}{n}+3\right\}$

$=0-3\times\dfrac{1}{2}+3=\dfrac{3}{2}$

$p=2,\ q=3$이므로

$p+q=5$

33) [정답] ③

[해설]

두 점 $\mathrm{S_n}$, $\mathrm{T_n}$의 좌표를 자연수 n에 대하여 나타내면

$\mathrm{S_n(a_n,b_n)=S_n\left(\dfrac{2n}{n^2+1},\dfrac{2n^2}{n^2+1}\right)}$, $\mathrm{T_n(c_n,d_n)=T_n\left(\dfrac{2}{n},2\right)}$이다.

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n^2+1}=2$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n-a_n}{d_n-b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{n}-\dfrac{2n}{n^2+1}}{2-\dfrac{2n^2}{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$(거짓)

ㄷ. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{n(d_n-b_n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{n}}{n\left(2-\dfrac{2n^2}{n^2+1}\right)}=1$ (참)

34) [정답] ③

[해설]

S_n는 삼각형 $\mathrm{A_nOB_n}$의 $\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}+n+1}$이다.

($\because$ 둘레의 길이)

$S_n=\dfrac{n}{2}\times\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}+n+1}$이므로

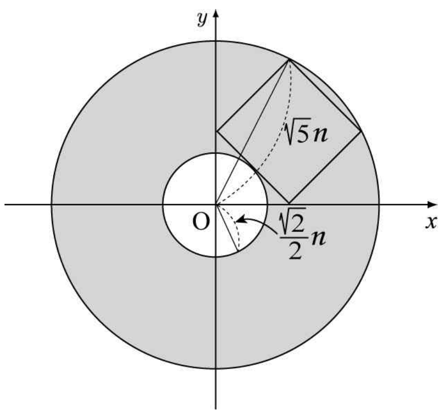
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2}\times\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+1}+n+1}}{n}=\frac{1}{4}$$

35) [정답] 15

[해설]

원점에서 점 $(n,\ 2n)$까지의 거리는 $\sqrt{5}n$이므로

사각형이 지나간 부분은 그림과 같다.



$$a_n=5n^2\pi-\frac{1}{2}n^2\pi=\frac{9}{2}n^2\pi$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{9}{2}\pi\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10}{\pi n^3}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{\pi n^3}\,\frac{9\pi n(n+1)(2n+1)}{12}=15$$

36) [정답] ①

[해설]

원 C_n의 중심이 $\mathrm{P}_n(n,\ n^2)$이고 y축에 접하므로, 반지름의 길이는 n이다. 또 원점을 지나고 기울기가 a_n인 직선의 방정식은 $y=a_nx$ 즉, $a_nx-y=0$이다.

원 C_n과 직선 $a_nx-y=0$이 접하므로 원의 중심 $\mathrm{P}_n(n,\ n^2)$에서 직선 $a_nx-y=0$에 이르는 거리가 n이다.

$$\therefore\ \frac{|na_n-n^2|}{\sqrt{a_n^2+1}}=n\Leftrightarrow\frac{|a_n-n|}{\sqrt{a_n^2+1}}=1$$

양변을 제곱하여 정리하면 $a_n^2-2na_n+n^2=a_n^2+1$

$$\therefore\ a_n=\frac{n^2-1}{2n}\quad\therefore$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{2}=\frac{1}{2}$$

<다른 풀이>

원의 방정식은 $(x-n)^2+(y-n^2)^2=n^2$

$y=a_nx$를 대입하면 $(x-n)^2+(a_nx-n^2)^2=n^2$

$x^2-2nx+n^2+a_n^2x^2-2n^2a_nx+n^4=n^2$

$(1+a_n^2)x^2-2(n+n^2a_n)x+n^4=0$ 직선과 원이 접하므로

판별식 $\frac{D}{4}=(n+n^2a_n)^2-n^4(1+a_n^2)=0$이다.

$$2n^3a_n=n^4-n^2\quad\therefore\ a_n=\frac{n^2-1}{2n}\quad\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}$$

37) [정답] ④

[해설]

원 C_n의 중심을 $\mathrm{C}_n(a_n,\ 0)$이라 하면

직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{C}_n$은 점 $\mathrm{P}_n(n,\ n^2)$에서의 곡선 $y=x^2$의 접선에 수직이다.

점 P_n에서의 곡선 $y=x^2$의 접선의 기울기는 $2n$이므로

$$2n\times\frac{n^2-0}{n-a_n}=-1$$

$\therefore\ a_n=2n^3+n$

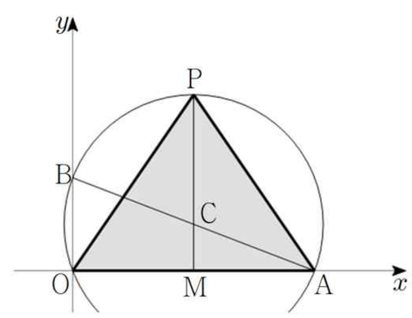
따라서 원 C_n의 넓이 S_n은

$$\begin{aligned}S_n&=\pi\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{C}_n}^2\\&=\pi\{(-2n^3)^2+(n^2)^2\}\\&=\pi(4n^6+n^4)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n^6}=\lim_{n\to\infty}\pi\times\left(4+\frac{1}{n^2}\right)=4\pi$$

38) [정답] 54

[해설]



그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원은 원점 O를

지난다. ($\because \angle BOA=90^\circ$) 선분 OA의 중점을 M이라 하면, 점 M을 지나고 x축에 수직인 직선이 제1사분면에서 원과 만나는 점이 P일 때, 삼각형 OAP의 넓이가 최대이다. 이때, 선분 AB와 선분 PM의 교점 C가 원의 중심이다.

$$\overline{PC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{\sqrt{(12n+1)^2+(5n)^2}}{2}=\frac{\sqrt{169n^2+24n+1}}{2}$$

$$\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{BO}=\frac{5n}{2},\ \overline{PM}=\overline{PC}+\overline{CM}=\frac{\sqrt{169n^2+24n+1}+5n}{2}$$

$$\therefore S(n)=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{PM}=\frac{(12n+1)\left(\sqrt{169n^2+24n+1}+5n\right)}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{(12n+1)\left(\sqrt{169n^2+24n+1}+5n\right)}{4n^2}=54$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{n^2}=54$

39) [정답] 64

[해설]

직각삼각형 P_nOQ_n에서 $\angle P_nOQ_n=\frac{\pi}{3}$이고

$\overline{OP_n}=n+2$이므로 $\overline{OQ_n}=\frac{1}{2}(n+2)$, $\overline{P_nQ_n}=\frac{\sqrt{3}}{2}(n+2)$

$$\triangle P_nOQ_n=\frac{1}{2}\times\overline{OQ_n}\times\overline{P_nQ_n}=\frac{\sqrt{3}(n+2)^2}{8}$$

S_n은 $\triangle P_nOQ_n$의 넓이에서 원 C_n의 넓이의 $\frac{1}{6}$을 빼면 된다.

$$\therefore S_n=\frac{\sqrt{3}(n+2)^2}{8}-\frac{n\pi}{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{\sqrt{3}(n+2)^2}{8}-\frac{n\pi}{6}}=\frac{8}{\sqrt{3}}=a$$

따라서 $3a^2=64$

40) [정답] ②

[해설]

그림과 같이 삼각형 OA_nB_n에 내접하는 원의 중심을 $C_n(r_n,\ r_n)$이라 하고 내접하는 원이 삼각형 OA_nB_n의 세 변과 만나는 점을 각각 D_n, E_n, F_n이라 하자.

$$\triangle B_nF_nC_n \backsim \triangle B_nOP_n$$

$$\overline{B_nF_n}:\overline{B_nO}=\overline{F_nC_n}:\overline{OP_n}$$

$$n+1-r_n : n+1=r_n : \overline{OP_n}$$

$$\overline{OP_n}=\frac{(n+1)r_n}{n+1-r_n}\cdots\cdots ㉠$$

$\overline{B_nF_n}=\overline{B_nE_n}$, $\overline{D_nA_n}=\overline{E_nA_n}$이고
$\overline{B_nE_n}+\overline{E_nA_n}=\overline{B_nA_n}$이므로

$$(n+1-r_n)+(n-r_n)=\sqrt{2n^2+2n+1}$$

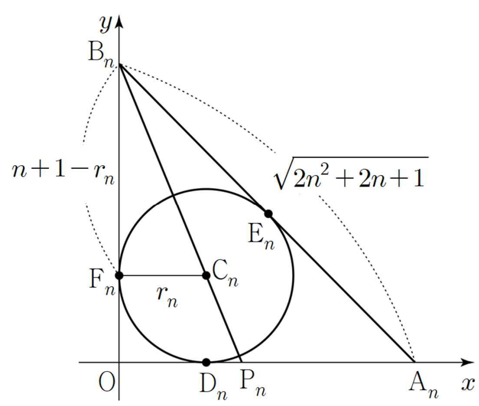
$$r_n=\frac{1}{2}\left(2n+1-\sqrt{2n^2+2n+1}\right)\cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하여 계산하면

$$\overline{OP_n}=\frac{(n+1)\left(2n+1-\sqrt{2n^2+2n+1}\right)}{1+\sqrt{2n^2+2n+1}}$$

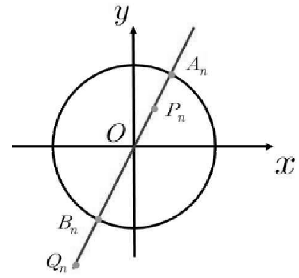
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{OP_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(2n+1-\sqrt{2n^2+2n+1}\right)}{n\left(1+\sqrt{2n^2+2n+1}\right)}$$

$$=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$$



41) [정답] ③

[해설]
문제에는 A_n과 B_n의 위치가 나와 있지 않지만, 편의상 A_n을 제1사분면 B_n을 제2사분면에 잡도록 하자. 문제 조건에 의하여 P_n과 Q_n을 찾으면 다음과 같다.



원과 직선 식을 연립하여 B_n의 좌표를 구하면,

$B_n\left(-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}},\ -\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$이며,

이때 Q_n은 OB_n을 $3:1$로 외분하는 점이므로

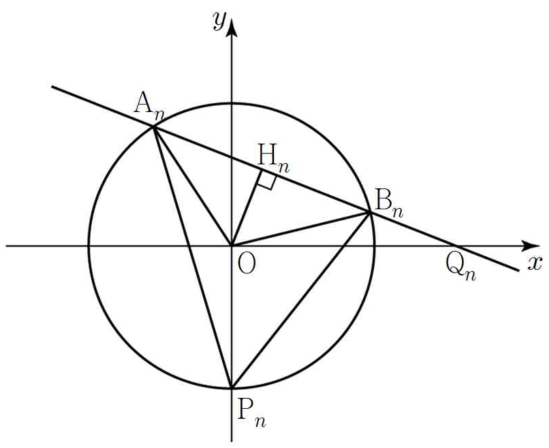
$Q_n\left(-\frac{3}{2\sqrt{n^2+1}},\ -\frac{3n}{2\sqrt{n^2+1}}\right)$이다.

따라서

$\lim_{n\to\infty}|na_n+b_n|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{-3n}{\sqrt{n^2+1}}\right|=3$이다.

42) [정답] ④

[해설]



원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle A_nP_nB_n=60^\circ$ 이므로 $\angle A_nOB_n=120^\circ$

원점 O에서 직선 A_nB_n에 내린 수선의 발을 H_n이라 하자.

삼각형 A_nOB_n이 이등변 삼각형이고

$\overline{OA_n}=n$, $\angle A_nOH_n=60^\circ$ 이므로 $\overline{OH_n}=\frac{n}{2}$

원점 O와 직선 $a_nx-y-(n+1)a_n=0$ 사이의 거리는 $\frac{n}{2}$

이므로 $\frac{|-(n+1)a_n|}{\sqrt{a_n^2+1}}=\frac{n}{2}$

$\frac{(n+1)^2a_n^2}{a_n^2+1}=\frac{n^2}{4}$

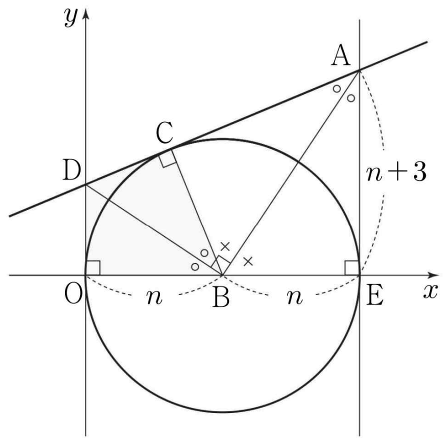
$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{a_n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4(n+1)^2}=\frac{1}{4}$

43) [정답] 4

[해설]

그림과 같이 점 A에서 원에 그은 두 접선의 접점 중

점 C가 아닌 점을 $E(2n, 0)$이라 하자.



$\triangle AEB$와 $\triangle BOD$는 서로 닮음이므로

$\overline{AE}:\overline{EB}=\overline{BO}:\overline{OD}$

$n+3:n=n:\overline{OD}$

$\therefore \overline{OD}=\frac{n^2}{n+3}$

$\overline{OD}=\overline{CD}$, $\overline{BO}=\overline{BC}$

$l_n=2\times\left(\frac{n^2}{n+3}+n\right)=\frac{4n^2+6n}{n+3}$

$S_n=2\times(\triangle BOD$의 넓이$)$

$=2\times\left(\frac{1}{2}\times n\times\frac{n^2}{n+3}\right)=\frac{n^3}{n+3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n\times S_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^3}\times\frac{4n^2+6n}{n+3}\times\frac{n^3}{n+3}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+6n}{(n+3)^2}=4$

44) [정답] ①

[해설]

점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

삼각형 PAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH}$이고

선분 PH의 길이는 직선 PH가 원의 중심 O를

지날 때 최대이다.

직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

점 P는 직선 $y=-2x$와 원 $x^2+y^2=n$이 만나는

점 중 x좌표가 양수인 점이다.

점 $P(a_n, -2a_n)$이라 하면

$a_n^2+4a_n^2=n$

$\therefore a_n=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{5}}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(a_{n+1}-a_n)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{5}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{5}}{10}$

45) [정답] **50**

[해설]

접선 l_n의 방정식은 $y=2nx-n^2$이므로

$\mathrm{Y}_n(0,\ -n^2)$

직선 l_n이 x축과 만나는 점을 X_n이라 하면

$\mathrm{X}_n\left(\dfrac{1}{2}n,\ 0\right)$

$\overline{\mathrm{OX}_n}=\dfrac{1}{2}n$

$\overline{\mathrm{X}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{X}_n\mathrm{P}_n}=\sqrt{n^4+\dfrac{1}{4}n^2}$

$\overline{\mathrm{Y}_n\mathrm{R}_n}=\overline{\mathrm{Y}_n\mathrm{P}_n}=\sqrt{4n^4+n^2}$

이므로

$\displaystyle\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OQ}_n}}{\overline{\mathrm{Y}_n\mathrm{R}_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{OX}_n}+\overline{\mathrm{X}_nQ_n}}{\overline{\mathrm{Y}_nR_n}}$

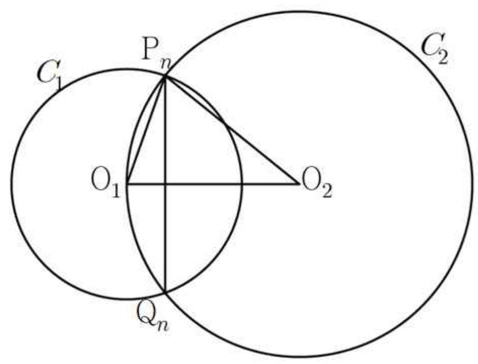
$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n+\sqrt{n^4+\frac{1}{4}n^2}}{\sqrt{4n^4+n^2}}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n}+\sqrt{1+\frac{1}{4n^2}}}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1}{2}$

따라서 $100\alpha=50$

46) [정답] ⑤

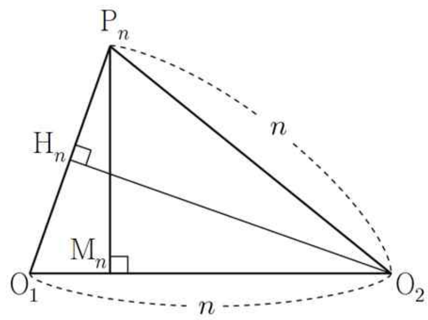
[해설]



원 C_1, C_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하자.

점 O_2에서 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{P}_n$에 내린 수선의 발을 H_n, 점 P_n에서 선분

$\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$에 내린 수선의 발을 M_n이라 하자.



삼각형 $\mathrm{O}_2\mathrm{P}_nO_1$이 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{P}_nH_n}=\dfrac{n-1}{2}$

직각삼각형 $\mathrm{P}_nH_nO_2$에서

$\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{H}_n}=\sqrt{n^2-\left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3n^2+2n-1}}{2}$

삼각형 $\mathrm{O}_2\mathrm{P}_nO_1$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P}_nO_1}\times\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{H}_n}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}\times\overline{\mathrm{P}_nM_n}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times(n-1)\times\dfrac{\sqrt{3n^2+2n-1}}{2}=\dfrac{1}{2}\times n\times\overline{\mathrm{P}_nM_n}$

$\overline{\mathrm{P}_nM_n}=\dfrac{(n-1)\sqrt{3n^2+2n-1}}{2n}$

$\overline{\mathrm{P}_nQ_n}=2\overline{\mathrm{P}_nM_n}$이므로

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{P}_nQ_n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)\sqrt{3n^2+2n-1}}{n^2}=\sqrt{3}$

47) [정답] **6**

[해설]

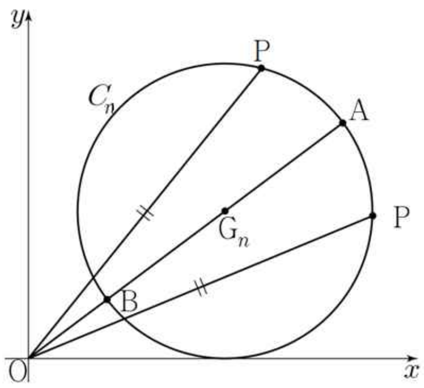
원 C_n은 x축에 접하는 원이므로 반지름의 길이는 $3n$이다.

원 C_n의 중심을 $G_n(4n, 3n)$이라 하면

$$\overline{OG_n}=\sqrt{(4n)^2+(3n)^2}=5n$$

그림과 같이 직선 OG_n과 원 C_n이 만나는 점을 각각 A,B라 하면 선분 OP의 길이는 $\overline{OB}\le\overline{OP}\le\overline{OA}$

$$\overline{OA}=\overline{OG_n}+3n=8n, \overline{OB}=\overline{OG_n}-3n=2n$$



$\overline{OP}=2n$ 또는 $\overline{OP}=8n$일 때 점 P의 개수는 각각 1개이고, $2n+1\le\overline{OP}\le 8n-1$일 때 선분 OP의 길이가 자연수인 점 P의 개수는 각각 2개이다.

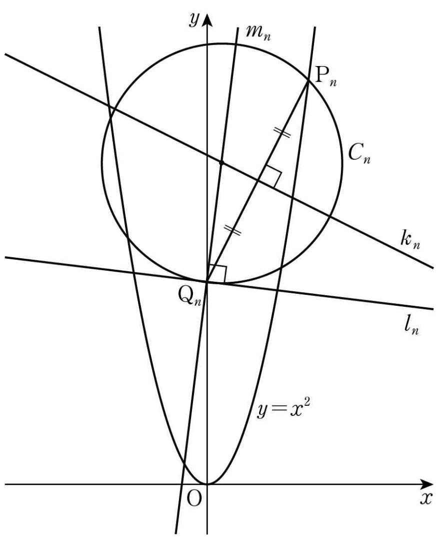
그러므로 구하는 점 P의 개수는 $2+2\times(6n-1)=12n$이므로

$$a_n=12n$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2}\times\frac{12n(n+1)}{2}\right\}=6$

48) [정답] 12

[해설]



점 Q_n을 지나고 직선 l_n에 수직인 직선을 m_n이라 하면 원 C_n의 중심은 직선 m_n 위에 존재한다. 직선 m_n은 곡선 $y=x^2$ 위의 점 P_n에서의 접선과 평행하고 $y'=2x$이므로 직선 m_n의 기울기는 $4n$이다. 직선 m_n이 점 Q_n을 지나므로 직선 m_n의 방정식은

$$y=4nx+2n^2$$

선분 P_nQ_n의 수직이등분선을 k_n이라 하면 원 C_n의 중심은 직선 k_n 위에 존재한다.

직선 P_nQ_n의 기울기는 n, 선분 P_nQ_n의 중점의 좌표는 $(n, 3n^2)$이므로 직선 k_n의 방정식은

$$y=-\frac{1}{n}(x-n)+3n^2$$

$$y=-\frac{1}{n}x+3n^2+1$$

원 C_n의 중심은 두 직선 m_n, k_n의 교점이므로 원 C_n의 중심의 좌표를 (x_n, y_n)이라 하면

$$4nx_n+2n^2=-\frac{1}{n}x_n+3n^2+1\text{에서}$$

$$\left(4n+\frac{1}{n}\right)x_n=n^2+1$$

$$x_n=\frac{n^3+n}{4n^2+1}$$

$$y_n=4n\times\frac{n^3+n}{4n^2+1}+2n^2=\frac{12n^4+6n^2}{4n^2+1}$$

원점을 지나고 원 C_n의 넓이를 이등분하는 직선은 이 원의 중심을 지나야 하므로

$$a_n=\frac{y_n}{x_n}=\frac{12n^4+6n^2}{n^3+n}=\frac{12n^3+6n}{n^2+1}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2+6}{n^2+1}=12$$

49) [정답] 80

[해설]

점 P_n의 x좌표를 t라 하면 y좌표는 $\frac{\sqrt{3}}{n+1}t^2$

$\overline{OP_n}=2n+2$이므로 $\sqrt{t^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{n+1}t^2\right)^2}=2n+2$에서

$t=n+1$

직각삼각형 P_nOH_n에서 $\overline{OH_n}:\overline{P_nH_n}=1:\sqrt{3}$이므로

$\tan(\angle P_nOH_n)=\sqrt{3}$즉 $\angle P_nOH_n=\frac{\pi}{3}$

$$\angle R_nP_nH_n=2\times\angle OP_nH_n=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

점 R_n을 포함하지 않는 호 Q_nH_n과 선분 OH_n, 곡선 T_n으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $h(n)$이라 하자.

(i) 곡선 T_n과 x축 및 선분 P_nH_n으로 둘러싸인 부분의

넓이는 $f(n)+h(n)$이므로

$f(n)+h(n)=\int_0^{n+1}\frac{\sqrt{3}}{n+1}x^2dx$

$=\left[\frac{\sqrt{3}}{3(n+1)}x^3\right]_0^{n+1}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}(n+1)^2$ …… ㉠

(ii) 점 Q_n을 포함하는 호 R_nH_n과 두 선분 OR_n, OH_n으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $g(n)+h(n)$이고, 이 값은 사각형 $OH_nP_nR_n$의 넓이에서 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 $P_nR_nH_n$의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$g(n)+h(n)=2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{OH_n}\times\overline{P_nH_n}\right)-\frac{1}{2}\times\overline{P_nH_n}^2\times\frac{\pi}{3}$

$=\sqrt{3}(n+1)^2-\frac{\pi(n+1)^2}{2}$

$=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)(n+1)^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f(n)-g(n)=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)(n+1)^2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)-g(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)(n+1)^2}{n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$

$=\frac{\pi}{2}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

그러므로 $k=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 $60k^2=60\times\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=80$

50) [정답] 24

[해설]

$\overline{AC_n}-\overline{OC_n}=\sqrt{n^2+48^2}-n$,

$\overline{B_1D_n}=\frac{48}{n}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{\overline{AC_n}-\overline{OC_n}}{\overline{B_1D_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+48^2}-n}{\frac{48}{n}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+48^2}-n)(\sqrt{n^2+48^2}+n)}{\frac{48}{n}(\sqrt{n^2+48^2}+n)}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{48^2}{48\left(\sqrt{1+\frac{48^2}{n^2}}+1\right)}=\frac{48}{2}=24$

51) [정답] ⑤

[해설]

한 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$2(n-1)r_n+2\sqrt{3}\,r_n=2 \quad \therefore\ r_n=\frac{1}{(n-1)+\sqrt{3}}$

또, 원의 총 개수는

$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ 이므로 원의 총 넓이는

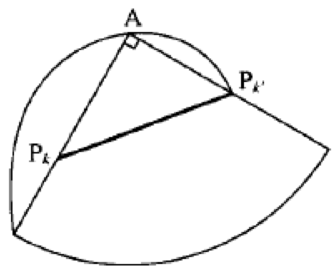
$S_n=\frac{n(n+1)}{2}\cdot(\pi r_n^2)=\frac{n(n+1)\pi}{2((n-1)+\sqrt{3})^2}$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{-1+\sqrt{3}}{n}\right)^2}=\frac{\pi}{2}$

52) [정답] ①

[해설]

주어진 그림의 전개도에서 $l_k=\overline{P_kP_k'}=100\sqrt{2}\cdot\frac{k}{n}$



$\therefore\sum_{k=1}^{n}l_k=\frac{100\sqrt{2}}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=50\sqrt{2}(n+1)$

$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{50\sqrt{2}(n+1)}{n}=50\sqrt{2}$

53) [정답] ①

[해설]

[그림1]의 점 B를 수직선의 원점으로 생각하고 삼각형 ABC가 회전하면서 수직선 위를 움직인다고 생각하자.

변 BC가 수직선 위에 놓이는 순간의 점 B의 좌표를 차례로 나열하면 3, 6, 9, 12, ⋯

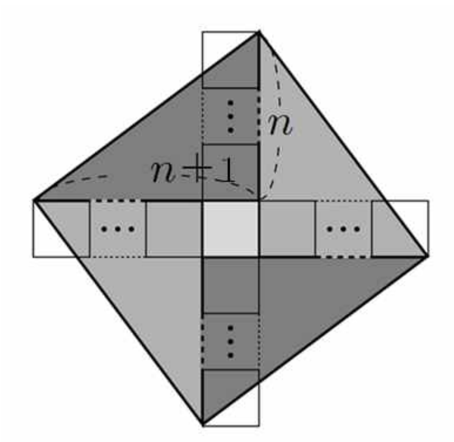
그런데, 정사각형의 둘레의 길이는 8이므로 정삼각형이 정사각형의 둘레를 $3n-2$ 바퀴 도는 동안 수직선 위를 움직인 거리는 $8(3n-2)=24n-16$

이 때, 변 BC가 정사각형의 변 위에 놓이는 횟수는 수직선 위의 $0<x<24n-16$인 범위에서 x좌표가 3의 배수인 점의 개수와 같다. $\therefore\ a_{3n-2}=\left[\dfrac{24n-16}{3}\right]=8n-6$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{3n-2}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n-6}{n}=8$$

54) [정답] 20

[해설]



$S_n=2n(n+1)+1=2n^2+2n+1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{10S_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{10(2n^2+2n+1)}{n^2}=20$$

55) [정답] 10

[해설]

$\{a_n\}$: 12, 33, 64, ⋯

따라서 $a_n=12+\dfrac{(n-1)\{42+(n-2)10\}}{2}$
$=(n+1)(5n+1)$

$b_n=2n^2+4n=2n(n+2)$ 이므로 $\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_nb_n}{n^4}=10$

56) [정답] 25

[해설]

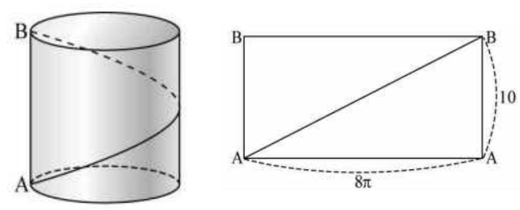
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n^2M}{(6n+3)^2}+\frac{(2n+1)^2M}{(6n+3)^2}+\frac{(3n+2)^2M}{(6n+3)^2}\right\}$$

$=\dfrac{7}{18}M$ $\therefore\ p+q=25$

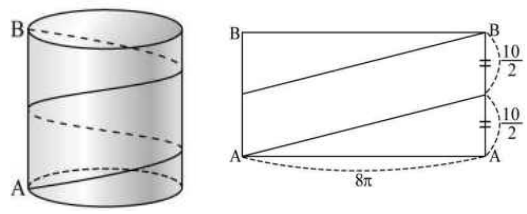
57) [정답] ①

[해설]

다음은 직원기둥의 옆면의 전개도에서 최단거리의 선을 나타낸 것이다.



$a_1=\sqrt{64\pi^2+10^2}$



$a_2=2\times\sqrt{64\pi^2+\left(\dfrac{10}{2}\right)^2}$

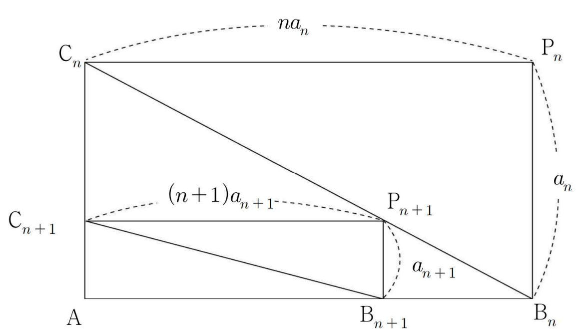
⋮

같은 방법으로 $a_n=n\times\sqrt{64\pi^2+\left(\dfrac{10}{n}\right)^2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{64\pi^2+\left(\frac{10}{n}\right)^2}=8\pi$$

58) [정답] ⑤

[해설]



$\triangle C_nAB_n \backsim \triangle P_{n+1}B_{n+1}B_n$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB_n}} : \overline{\mathrm{C_nA}} = \overline{\mathrm{B_{n+1}B_n}} : \overline{\mathrm{P_{n+1}B_{n+1}}}$

$na_n : a_n = \{na_n - (n+1)a_{n+1}\} : a_{n+1} \Leftrightarrow na_n = (2n+1)a_{n+1}$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n}{2n+1}$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{2}$

59) [정답] 3

[해설]

선분 $\mathrm{CP_0}$의 길이를 $a(0<a<1)$이라 하면

$\overline{\mathrm{P_0P_1}} = \overline{\mathrm{P_2P_3}} = \overline{\mathrm{P_4P_5}} = \cdots = a$

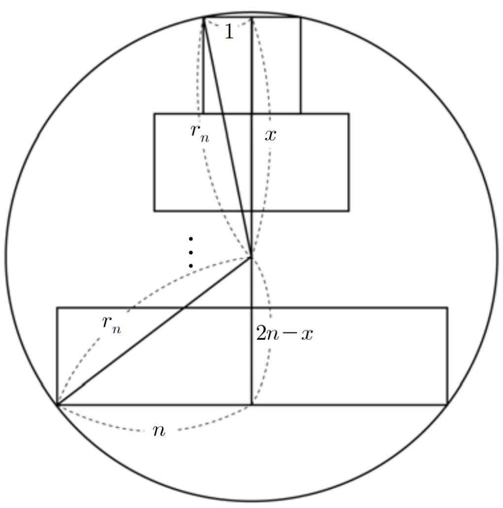
$\overline{\mathrm{P_1P_2}} = \overline{\mathrm{P_3P_4}} = \overline{\mathrm{P_5P_6}} = \cdots = 1-a$

이므로 $l_{2n} = n$이다.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{l_{2n}}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2n+1} = \dfrac{1}{2}$ $\therefore a+b=3$

60) [정답] 125

[해설]



[도형 n]을 포함하는 원들 중 가장 작은 원은 위의 그림과 같이 네 꼭짓점을 지나게 된다. 이 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, 원의 중심에서 도형의 윗변까지의 길이를 x라 하면

$(r_n)^2 = x^2+1$, $(r_n)^2 = (2n-x)^2+n^2$

이다. 따라서 $x^2+1 = (2n-x)^2+n^2$이므로

$x = \dfrac{5n^2-1}{4n}$이다. 따라서

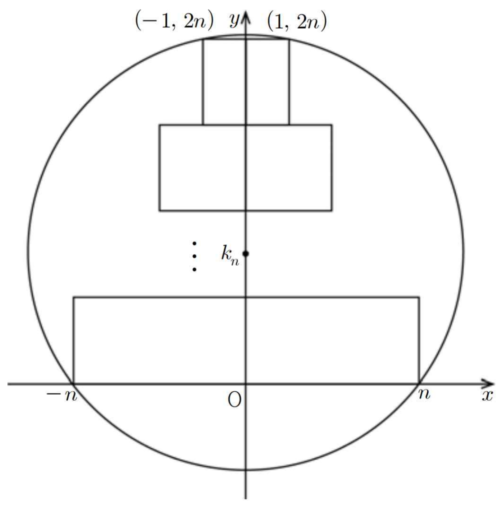
$(r_n)^2 = \left(\dfrac{5n^2-1}{4n}\right)^2 + 1 = \dfrac{25n^4+6n^2+1}{16n^2}$이다.

그러므로

$a_n = \pi(r_n)^2 = \dfrac{25n^4+6n^2+1}{16n^2}\pi$이다.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{80a_n}{\pi n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{125n^4+30n^2+5}{n^4} = 125$

[다른 풀이]



[도형 n]을 포함하는 원들 중 가장 작은 원은 위의 그림처럼 네 점을 지나게 된다. 이 원의 방정식을

$x^2+(y-k_n)^2 = r_n^2$이라 하자. 이 원은 $(n, 0)$과 $(1, 2n)$을 지나므로

$$\begin{cases} n^2+(k_n)^2 = (r_n)^2 \\ 1+(2n-k_n)^2 = (r_n)^2 \end{cases}$$

이다. 따라서

$n^2+(k_n)^2 = 1+(2n-k_n)^2$

이므로 $k_n = \dfrac{3n^2+1}{4n}$이다. 따라서

$(r_n)^2 = n^2 + \left(\dfrac{3n^2+1}{4n}\right)^2 = \dfrac{25n^4+6n^2+1}{16n^2}$이다.

그러므로 $a_n = \pi(r_n)^2 = \dfrac{25n^4+6n^2+1}{16n^2}\pi$이다.

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{80a_n}{\pi n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{125n^4+30n^2+5}{n^4} = 125$

61) [정답] ②

[해설]

$a_n = 1+2+3+4+\cdots+(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

$a_{2n}=\dfrac{(2n+1)(2n+2)}{2}=(2n+1)(n+1)$

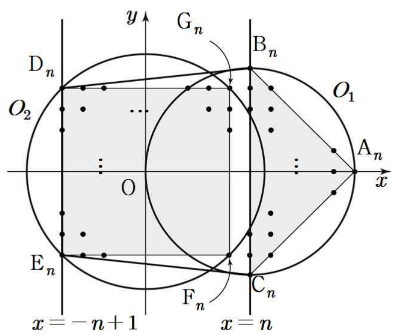
$b_{2n}=b_{2n+1}=(n+1)^2$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{2n}}{b_{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)(n+1)}{(n+1)^2}=2$

62) [정답] ①

[해설]

각 점의 좌표는 그림과 같다.



$A_n(2n,\ 0)$, $B_n(n,\ n)$, $C_n(n,\ -n)$,

$D_n(-n+1,\ n-1)$, $E_n(-n+1,\ -n+1)$,

$F_n(n-1,\ -n+1)$, $G_n(n-1,\ n-1)$

오각형 $A_nB_nD_nE_nC_n$에서 삼각형 $A_nB_nC_n$의 둘레 및 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점들의 개수는

$1+3+\cdots+(2n+1)=(n+1)^2$

변 D_nE_n 위의 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점들의 개수는 $2n-1$이므로 정사각형 $E_nF_nG_nD_n$의 둘레 및 내부에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점들의 개수는

$(2n-1)^2$

$a_n=(n+1)^2+(2n-1)^2=5n^2-2n+2$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{5}\,n-\sqrt{a_n}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{5}\,n-\sqrt{5n^2-2n+2}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-2}{\sqrt{5}\,n+\sqrt{5n^2-2n+2}}$

$=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

63) [정답] ③

[해설]

$P_n(2n,\ 0)$, $Q_n(0,\ 4n^2)$이므로 직선 P_nQ_n의 기울기는

$\dfrac{0-4n^2}{2n-0}=\dfrac{-4n^2}{2n}$

$=-2n$이고

y절편은 $4n^2$이므로

직선 P_nQ_n의 방정식은 $y=\boxed{-2n}\times x+4n^2$

x좌표가 k(k는 $2n-1$ 이하의 자연수)일 때 영역에 속하는 점의

y좌표는 $(k-2n)^2$부터 $\boxed{-2n}\times k+4n^2$까지이므로 그 개수는

$\boxed{-2n}\times k+4n^2-(k-2n)^2+1=\boxed{-k^2+1}+2nk$

$a_n=\sum\limits_{k=1}^{2n-1}\left(\boxed{-k^2+1}+2nk\right)$

$=-\dfrac{(2n-1)\times 2n\times(4n-1)}{6}+(2n-1)+2n\times\dfrac{(2n-1)\times 2n}{2}$

$=-\dfrac{n(2n-1)(4n-1)}{3}+(2n-1)+2n^2(2n-1)$

$=(2n-1)\left\{2n^2-\dfrac{n(4n-1)}{3}+1\right\}$

$=(2n-1)\left(\dfrac{2}{3}n^2+\dfrac{n}{3}+1\right)$

그러므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n-1)\left(\dfrac{2}{3}n^2+\dfrac{n}{3}+1\right)}{n^3}=\boxed{\dfrac{4}{3}}$

$f(n)=-2n$, $g(k)=-k^2+1$, $p=\dfrac{4}{3}$이고

$f(3)=-6$, $g(4)=-15$

따라서

$p\times f(3)\times g(4)=\dfrac{4}{3}\times(-6)\times(-15)$

$=120$

64) [정답] ④

[해설]

n일 후 정오에 측정한 2호 댐의 저수량을 x_n(만톤)이라 하면 $x_n\times 0.98+100=x_{n+1}$

$(x_{n+1}-5000)=0.98\,(x_n-5000)$

$\therefore\ x_n-5000=(x_1-5000)0.98^{n-1}$

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=5000+\lim\limits_{n\to\infty}(x_1-5000)0.98^{n-1}=5000$

따라서, 측정되는 저수량은 5000만톤에 한없이 가까워진다.

65) [정답] 240

[해설]

$a_{n+1}=a_n\times0.88+x$ 이므로

$a_n=a_{n-1}\times0.88+x$

$=a_{n-2}\times0.88^2+(1+0.88)x$

$\cdots$

$=1200\times0.88^n+(1+0.88+0.88^2+\cdots+0.88^{n-1})x$

$=1200\times0.88^n+\dfrac{1-0.88^n}{1-0.88}x$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1200\times0.88^n+\dfrac{1-0.88^n}{0.12}x\right)=\dfrac{x}{0.12}$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n\le2000$ 에서 $\dfrac{x}{0.12}\le2000$ $\therefore\ x\le240$

따라서 구하는 x의 최대값은 240이다.

66) [정답] ③

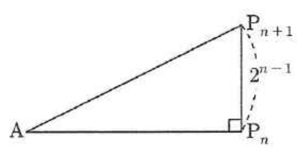
[해설]

$\overline{\mathrm{P_1P_2}}=1$이고 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=2\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$이므로 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=2^{n-1}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}^2=4^{n-1}$

$\overline{\mathrm{AP}_{n+1}}^2=\overline{\mathrm{AP}_n}^2+\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}^2$

$=\overline{\mathrm{AP}_n}^2+4^{n-1}$



$\therefore\ \overline{\mathrm{AP_n}}^2=\overline{\mathrm{AP}_1}^2+\sum\limits_{k=1}^{n-1}4^{k-1}=1+\dfrac{4^{n-1}-1}{4-1}=\dfrac{4^{n-1}}{3}+\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}}{\overline{\mathrm{AP}_n}}\right)^2=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n-1}}{\dfrac{4^{n-1}}{3}+\dfrac{2}{3}}=3$

67) [정답] 379

[해설]

$a_1=1$

$a_2=2\times10+1$

$a_3=4\times10^2+2\times(10+1)$

$a_4=8\times10^3+4\times(10^2+10+1)$

$\vdots$

$\therefore\ a_n=2^{n-1}\times10^{n-1}+2^{n-2}\times(10^{n-2}+10^{n-3}+\cdots+10+1)$

$=(20)^{n-1}+2^{n-2}\times\dfrac{10^{n-1}-1}{10-1}$

$=\dfrac{19}{18}(20)^{n-1}-\dfrac{1}{9}\cdot2^{n-2}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{20^n}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\dfrac{19}{360}-\dfrac{1}{36}\left(\dfrac{1}{10}\right)^n\right\}=\dfrac{19}{360}$

$\therefore\ p=360,\ q=19,\ p+q=379$

[별해]

$\begin{cases}a_n=10\cdots00+10\cdots01+\cdots+11\cdots11\\a_n=11\cdots11+11\cdots01+\cdots+10\cdots00\end{cases}$

에서 변끼리 더하면

$2a_n=21\cdots11\times2^{n-1}$

$\therefore\ a_n=21\cdots11\times2^{n-2}=(2\times10^{n-1}+1\cdots11)\times2^{n-2}$

$=20^{n-1}+\dfrac{10^{n-1}-1}{9}\times2^{n-2}$

$=20^{n-1}+\dfrac{20^{n-1}}{18}-\dfrac{2^{n-2}}{9}$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{20^n}=\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{20\cdot18}=\dfrac{19}{360}$ 이므로 $360+19=379$

68) [정답] 25

[해설]

$a_n=\sum\limits_{k=1}^{2^{n-1}}M(2k)=M(2)+M(4)+M(6)+\cdots+M(2^n)$

이므로 a_n은 집합 B의 원소 중에서 집합 A의 원소인

$2,4,6,8,\cdots,2^n$ 에서 각각 가장 큰 약수를 찾아 합한 것과 같다.

그리고 $2,4,6,8,\cdots,2^n$ 의 개수는 2^{n-1}개이다.

$n=1$이면 $a_1=M(2)=2$이다.

$n\ge2$일 때,

(ⅰ) $M(2k)=2$ 인 k의 개수는 $2,4,6,8,\cdots,2^n$ 을 $2\times$(홀수)로 나타낼 수 있는 수의 개수와 같으므로 2의 배수 중 4의 배수가 아닌 것의 개수와 같다.

따라서 k의 개수는

$$\frac{2^n}{2}-\frac{2^n}{2^2}=\frac{2^{n-1}}{2}=2^{n-2}\ (n\geq 2)$$

개이다.

(ⅱ) $M(2k)=4$ 인 k의 개수는 $2,4,6,8,\cdots,2^n$ 을 $4\times$(홀수)로 나타낼 수 있는 수의 개수와 같으므로 4의 배수 중 8의 배수가 아닌 것의 개수와 같다.

따라서 k의 개수는

$$\frac{2^n}{2^2}-\frac{2^n}{2^3}=\frac{2^{n-1}}{2^2}=2^{n-3}\ (n\geq 3)$$

개이다.

(ⅲ) $M(2k)=8$ 인 k의 개수는 $2,4,6,8,\cdots,2^n$ 을 $8\times$(홀수)로 나타낼 수 있는 수의 개수와 같으므로 8의 배수 중 16의 배수가 아닌 것의 개수와 같다.

따라서 k의 개수는

$$\frac{2^n}{2^3}-\frac{2^n}{2^4}=\frac{2^{n-1}}{2^3}=2^{n-4}\ (n\geq 4)$$

개이다.

이와 같은 방법으로 계속하면 $n\geq 2$인 n에 대하여 $M(2k)=2^i(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1)$인 k의 개수는 $2,4,6,8,\cdots,2^n$ 중에서 $2^i\times$(홀수)로 나타낼 수 있는 수의 개수와 같으므로 2^i의 배수 중 2^{i+1}의 배수가 아닌 것의 개수와 같다.

따라서 k의 개수는

$$\frac{2^n}{2^i}-\frac{2^n}{2^{i+1}}=\frac{2^{n-1}}{2^i}=2^{n-i-1}\ (n\geq i+1)$$

개이다.

또한, $M(2k)=2^n$ 을 만족하는 k는 2^{n-1} 뿐이므로 k의 개수는 1개이다.

따라서 $n\geq 2$일 때

$$a_n=\sum_{k=1}^{2^{n-1}}M(2k)=M(2)+M(4)+M(6)+\cdots+M(2^n)$$

$$=\left(2\times 2^{n-2}+2^2\times 2^{n-3}+\ \cdots\ +2^{n-1}\times 2^0\right)+2^n\times 1$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\left(2^i\cdot 2^{n-i-1}\right)+2^n\cdot 1$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}2^{n-1}+2^n\cdot 1$$

$$=2^{n-1}(n-1)+2^n$$

$$=2^{n-1}(n+1)$$

이다.

그러므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{150a_n}{(3n+1)\times 2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{150(n+1)2^{n-1}}{(3n+1)\times 2^n}=25\text{이다.}$$

69) [정답] ③

[해설]

$h(x)=x^{n+2}-3(3^{n+1}-1)-3^{n+1}(n+2)(x-3)$

$h(x)$는 $(n+2)$차 다항함수이다.

$h'(x)=(n+2)x^{n+1}-(n+2)3^{n+1}$

$=(n+2)\times\left(\boxed{\ x^{n+1}-3^{n+1}\ }\right)$

$x>3$에서 $h'(x)>0$이므로 $h(x)$는 증가한다.

$x\geq 3$에서 $h(x)$의 최솟값은 $h(3)$

$h(3)=3^{n+2}-3(3^{n+1}-1)=3$

$h(x)$의 최솟값은 $\boxed{\ 3\ }$

$x\geq 3$에서 $h(x)\geq\boxed{\ 3\ }>0$이므로

$f(x)-g(x)>0$

$x\geq 3$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$

$\therefore A(x)=x^{n+1}-3^{n+1},\ p=3$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p\times A(4)}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3(4^{n+1}-3^{n+1})}{4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{12-9\times\left(\frac{3}{4}\right)^n\right\}=12$$

70) [정답] ③

[해설]

정사각형의 넓이를 a^2이라 하면 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$이므로

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(1+3+3^2+\cdots+3^{n-1})$$

$$=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\cdot\frac{3^n-1}{3-1}=\frac{4-\sqrt{3}}{8}(3^n-1)$$

∴

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8(a_1+a_2+\cdots+a_n)}{3^n}=\lim_{n\to\infty}(4-\sqrt{3})\cdot\frac{3^n-1}{3^n}=4-\sqrt{3}$$

71) [정답] ②

[해설]

방정식 $f(x)=1$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 x좌표와 같다.

$\therefore A_1=\{0,\ 1\}$ ⋯ ㉠

㉠에서 $f(f(x))=1 \Leftrightarrow f(x)=0$ 또는 $f(x)=1$

따라서 방정식 $f^2(x)=1$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=0$, $y=1$의 교점의 x좌표와 같다.

$\therefore A_2=\left\{0,\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$ ⋯ ㉡

㉡에서 $f(f(f(x)))=1$

$\Leftrightarrow f(x)=0$ 또는 $f(x)=\frac{1}{2}$ 또는 $f(x)=1$

따라서 방정식 $f^3(x)=1$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 세 직선 $y=0$, $y=\frac{1}{2}$, $y=1$의 교점의 x좌표와 같다.

$\therefore A_3=\left\{0,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1\right\}$

이와 같은 방법으로 $a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$이 성립함을 알 수 있다.

이때, $(a_{n+1}-1)=2(a_n-1)$이므로

$a_n-1=(a_1-1)\times 2^{n-1}$ $\therefore a_n=2^{n-1}+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}+1}{2^n+1}=\frac{1}{2}$$

72) [정답] ⑤

[해설]

$\triangle C_1OQ_1$에서 $\angle C_1OQ_1=30^\circ$이고, $\overline{OC_1}=2$이므로 $\overline{C_1Q_1}=1$이다. 이 때, 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n, 원 C_{n+1}의 반지름의 길이를 r_{n+1}이라 하면, $r_1=1$이고

$\sin 30^\circ=\frac{r_{n+1}-r_n}{r_{n+1}}=\frac{1}{2}$에서 $r_{n+1}=2r_n$이므로

$S_{n+1}=4S_n$이 된다. $S_1=2\times\triangle C_2C_1B_1=\frac{\sqrt{15}}{2}$이므로

$S_n=\frac{\sqrt{15}}{2}4^{n-1}$이

다. 따라서, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{15}}{8}4^n}{4^n+3^n}=\frac{\sqrt{15}}{8}$이다.

73) [정답] ③

[해설]

C_1은 중심이 $\mathrm{O}_1(2-1,\ 0)$, 반지름의 길이가 1인 원

C_2는 중심이 $\mathrm{O}_2\left(2-\frac{1}{2},\ 0\right)$, 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 원

C_3은 중심이 $\mathrm{O}_3\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^2,\ 0\right)$, 반지름의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^2$인 원

C_n은 중심이 $\mathrm{O}_n\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ 0\right)$, 반지름의 길이가 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$인 원

$\mathrm{B}(-1,\ 0)$을 지나고, 기울기가 a_n인 직선의 방정식을 $y=a_n(x+1)$이라 하자.

점 O_n부터 직선 $a_nx-y+a_n=0$까지의 거리는 원 C_n의 반지름의 길이 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$과 같다.

$$\frac{\left|a_n\left(3-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\right|}{\sqrt{a_n^{\ 2}+1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\Leftrightarrow\sqrt{a_n^{\ 2}+1}=2^{n-1}a_n\left(3-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow a_n^{\ 2}+1=4^{n-1}a_n^{\ 2}\left(3-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2=a_n^{\ 2}(9\cdot4^{n-1}-3\cdot2^n+1)$$

$$\Leftrightarrow a_n^{\ 2}=\frac{1}{9\cdot4^{n-1}-3\cdot2^n}\Leftrightarrow a_n=\frac{1}{\sqrt{9\cdot4^{n-1}-3\cdot2^n}}$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{\sqrt{9\cdot 4^{n-1}-3\cdot 2^n}} = \dfrac{2}{3}$

74) [정답] ④

[해설]

C_1: $x^2+y^2=1$

C_2: $(x-2)^2+y^2=2^2$

C_3: $\{x-(2+2^2)\}^2+y^2=(2^2)^2$

⋮

C_n: $\{x-(2+2^2+\cdots+2^{n-1})\}^2+y^2=(2^{n-1})^2$

원 C_n 의 중심의 x 좌표

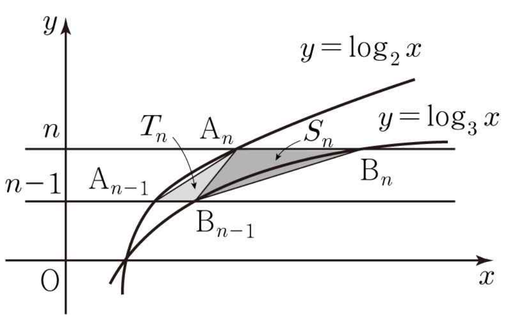
$a_n=2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-2\,(n\ge 2)$

원 C_n 의 반지름의 길이 $r_n=2^{n-1}$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{r_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-2}{2^{n-1}}=2$

75) [정답] ④

[해설]



점 A_n은 $y=n$과 $y=\log_2 x$의 교점이므로 A_n의 x좌표는

$\log_2 x=n$, $x=2^n$ 따라서 $A_n(2^n, n)$

점 B_n은 $y=n$과 $y=\log_3 x$의 교점이므로 B_n의 x좌표는

$\log_3 x=n$, $x=3^n$ 따라서 $B_n(3^n, n)$

삼각형 $A_nB_{n-1}B_n$의 넓이 S_n은

$S_n=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \overline{A_nB_n}=\dfrac{1}{2}(3^n-2^n)$

삼각형 $A_nA_{n-1}B_{n-1}$의 넓이 T_n은

$T_n=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot \overline{A_{n-1}B_{n-1}}=\dfrac{1}{2}(3^{n-1}-2^{n-1})$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{T_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}(3^n-2^n)}{\frac{1}{2}(3^{n-1}-2^{n-1})}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^{n-1}-2^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}$

$=3$

76) [정답] 9

[해설]

점 $A_n(0, n+1)$, 점 $B_n(n+1, 0)$

점 $C_n(3^{n+1}+n, n+1)$,

점 $D_n(n+1, 3^{n+1}+n)$이므로

선분 C_nD_n을 대각선으로 하는 정사각형의 넓이 S_n은

$S_n=(3^{n+1}-1)^2$
$=3^{2n+2}-2\times 3^{n+1}+1$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{3^{2n}}=9$

77) [정답] 192

[해설]

원 O_n 이 직선 AB와 점 P_n 에서 접하므로

직선 AB와 직선 O_nQ_n은 서로 수직이다.

직선 l과 직선 BC가 평행이므로

$\angle Q_nAB=\angle ABC=60^\circ$

두 직각삼각형 AP_nQ_n 과 AP_nO_n 은 합동이므로

$\overline{Q_nO_n}=2\overline{P_nO_n}=2\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

직각삼각형 AP_nO_n 에서

$\dfrac{\overline{O_nP_n}}{\overline{AP_n}}=\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{AP_n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\overline{BP_n}=\overline{AB}-\overline{AP_n}=4-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

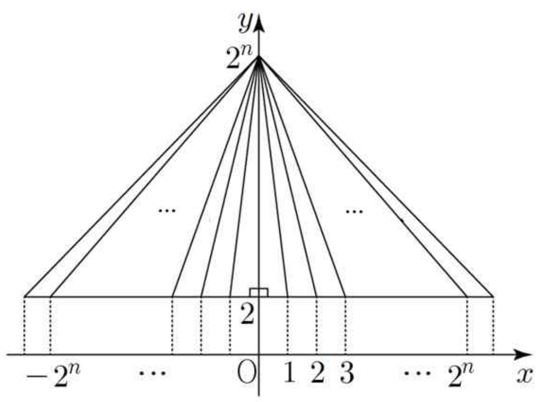
$S_n=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\left\{4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$

$k=\lim\limits_{n\to\infty}2^n S_n=\lim\limits_{n\to\infty}2\sqrt{3}\left\{4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=8\sqrt{3}$

따라서 $k^2=192$

78) [정답] 32

[해설]



조건 (가)에 의하여 $b=2,\ a\neq 0$

조건 (나)에 의하여 a는 $-2^n\leq a\leq -1,\ 1\leq a\leq 2^n$인 정수

(ⅰ) $1\leq a\leq 2^n$인 경우
모든 삼각형 ABC의 넓이의 합은

$\frac{1}{2}\times(2^n-2)\times\{1+2+3+\cdots+(2^n-1)+2^n\}$

$=\frac{1}{2}\times(2^n-2)\times\frac{2^n(1+2^n)}{2}$

$=\frac{1}{4}(8^n-4^n-2^{n+1})$

(ⅱ) $-2^n\leq a\leq -1$인 경우
모든 삼각형 ABC의 넓이의 합은 (ⅰ)과 같다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$S_n=2\times\frac{1}{4}(8^n-4^n-2^{n+1})=\frac{1}{2}(8^n-4^n-2^{n+1})$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{8^{n-2}}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8^n-4^n-2^{n+1}}{8^{n-2}}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{2^n}-\frac{2}{4^n}}{\frac{1}{64}}=32$

79) [정답] ①

[해설]

x축, y축에 동시에 접하고 원의 중심이 직선 $y=x$ 위에 있는 두 원의 반지름의 길이를 각각 $a,\ b$라 하면 두 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2,\ (x+b)^2+(y+b)^2=b^2$

이다. 두 원의 중심 $(a,a),\ (-b,-b)$에서

직선 $3x-4y+4^n=0$까지의 거리가 각각 $a,\ b$이므로

$a=\frac{|3a-4a+4^n|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-a+4^n|}{5}$

$a=\frac{4^n}{6},\ -\frac{4^n}{4}\ \therefore a=\frac{4^n}{6}\ (\because a>0)$

$b=\frac{|-3b+4b+4^n|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|b+4^n|}{5}$

$b=\frac{4^n}{4},\ -\frac{4^n}{6}\ \therefore b=\frac{4^n}{4}\ (\because b>0)$

이다. 두 원의 반지름의 길이는 각각 $\frac{4^n}{6},\ \frac{4^n}{4}$이므로

$a_n=\frac{4^n}{6}+\frac{4^n}{4}=\frac{5\times 4^n}{12}$ 이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{5\times 4^n}{12}}{4^n+1}=\frac{5}{12}$ 이다.

80) [정답] ②

[해설]

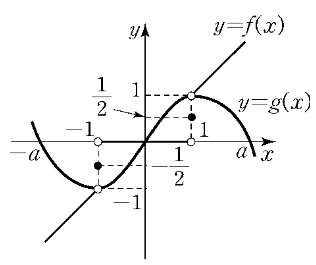
$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$에서

(i) $|x|>1$일 때 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=x$

(ii) $|x|<1$일 때 $f(x)=0$

(iii) $x=1$일 때 $f(x)=\frac{1}{2}$

(iv) $x=-1$일 때 $f(x)=-\frac{1}{2}$



방정식 $f(x)-g(x)=0$이 단 하나의 실근을 가지려 면 $f(x)=g(x)$에서 $y=f(x)$와

$y=g(x)$의 그래프가 오직 한 점에서만 만나야 한다.
$y=g(x)$의 그래프는 원점 대칭이므로 점 $(1, 1)$, $(-1, -1)$을 지날 때 a의 값이 최대이다.
$g(1)=1$에서 $1=-(1-a^2) \Leftrightarrow a^2=2$
$\therefore\ a=\pm\sqrt{2}$
따라서, a의 최댓값은 $\sqrt{2}$이다.

81) [정답] ④

[해설]

ㄱ. $-|b_n| \le b_n \le |b_n|$에서 $\lim_{n\to\infty}(-|b_n|)=\lim_{n\to\infty}|b_n|=0$

이므로 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이다. (참)

ㄴ. $(3n+1)a_n=c_n$라 하면, $\lim_{n\to\infty}c_n=6$이고 $a_n=\dfrac{c_n}{3n+1}$

이므로 $\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{nc_n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n+1}c_n=\dfrac{1}{3}\times 6=2$

이다. (참)

ㄷ. (반례) $a_n=(-1)^n$, $b_n=2(-1)^n$에 대하여

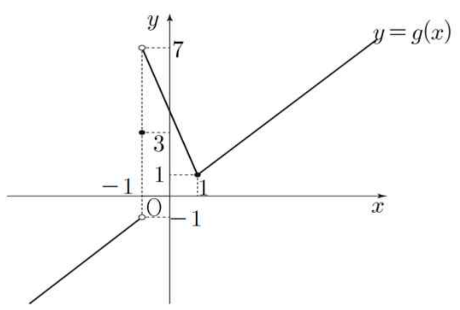
$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=2$ (수렴)이지만, 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 각각

발산한다. (거짓)

82) [정답] ③

[해설]

$$g(x)=\begin{cases} x & (|x|>1) \\ 3 & (x=-1) \\ -3x+4 & (|x|<1) \\ 1 & (x=1)\end{cases}$$ 이므로



(i) $f(x)=-2x+1$은 $y=g(x)$와
한 점 $(-1, 3)$에서 만나므로 $h(-2)=1$

(ii) 함수 $h(m)$에서
$0<m<1$일 때, $h(m)=2$

$\lim_{m\to 1-}h(m)=2$

$1<m<2$일 때, $h(m)=2$

$\lim_{m\to 1+}h(m)=2$

$\therefore \lim_{m\to 1}h(m)=2$

따라서

$h(-2)+\lim_{m\to 1}h(m)=3$

83) [정답] ③

[해설]

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+x}{x^{2n}+2}$에서

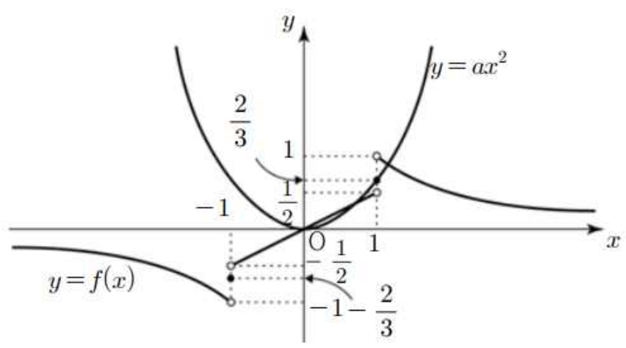
i) $|x|>1$일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{x^{2n}}}{1+\dfrac{2}{x^{2n}}}=\dfrac{1}{x}$

ii) $x=1$일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+1}{1+2}=\dfrac{2}{3}$

iii) $x=-1$일 때, $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{-1-1}{1+2}=-\dfrac{2}{3}$

iv) $|x|<1$일 때, $f(x)=\dfrac{0+x}{0+2}=\dfrac{x}{2}$

주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지기 위해서는 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $y=ax^2(a>0)$의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로 그림과 같이 $y=ax^2(a>0)$의 그래프는 점 $\left(1, \dfrac{2}{3}\right)$을 지나야 한다.



따라서 $a=\dfrac{2}{3}$이다.

$\therefore 60a=40$

[참고]

닫힌구간 $[0,\ 1]$ 에서

$y=ax^2$ 과 $y=\dfrac{x}{2}$ 을 연립하여

풀면 $x=0,\ \dfrac{1}{2a}$ 이다.

$0<\dfrac{1}{2a}<1$ 이면

$y=ax^2$ 과 $y=\dfrac{1}{2}x$ 의 그래프는 구간 $[0,\ 1)$ 에서

서로 다른 두 점에서 만나므로 구간 $[1,\ \infty)$ 에서

$y=f(x)$ 의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나면

된다.

84) [정답] ①

[해설]

ⅰ) $0<x<1$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=0$ 이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^n}{1+x^n}=0 \text{ 이다.}$$

ⅱ) $x=1$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^n=1$ 이므로

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^n}{1+x^n}=\frac{a}{2} \text{ 이다.}$$

ⅲ) $x>1$ 일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$ 이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^n}{1+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\frac{1}{x^n}+1}=a \text{ 이다.}$$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (0<x<1) \\ \dfrac{a}{2} & (x=1) \\ a & (x>1) \end{cases}$$

이다.

$$f\left(\frac{1}{5}\right)=f\left(\frac{2}{5}\right)=f\left(\frac{3}{5}\right)=f\left(\frac{4}{5}\right)=0,$$

$$f\left(\frac{5}{5}\right)=f(1)=\frac{a}{2},$$

$$f\left(\frac{6}{5}\right)=f\left(\frac{7}{5}\right)=f\left(\frac{8}{5}\right)=f\left(\frac{9}{5}\right)=f(2)=a$$

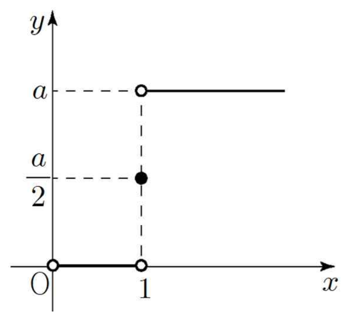
이므로

$$\sum_{n=1}^{10}f\left(\frac{k}{5}\right)=\frac{a}{2}+5a=\frac{11}{2}a$$

이다. $\dfrac{11}{2}a=33$ 이므로 $a=6$ 이다.

[참고]

$a>0$ 일 때, $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



85) [정답] ②

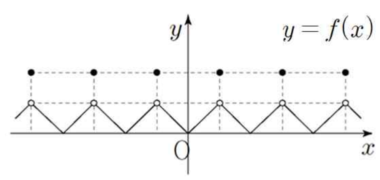
[해설]

$-1<x\le 1$ 일 때, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3x^{2n}+|x|}{x^{2n}+1}$ 이므로

(ⅰ) $|x|<1$ 일 때, $f(x)=\dfrac{0+|x|}{0+1}=|x|$

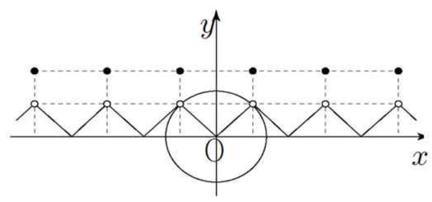
(ⅱ) $x=1$ 일 때, $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+1}{1+1}=2$

이고, $f(x+2)=f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



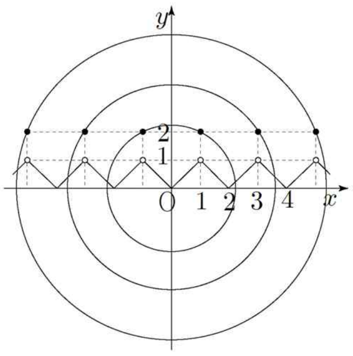
ㄱ. $f(3)=2$ (참)

ㄴ.



원 $x^2+y^2=2$는 $y=f(x)$ 의 그래프와 만나지 않는다. (참)

ㄷ.



원 $x^2+y^2=k$가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 서로 다른 네 점

에서 만나려면 $(1,2)$, $(3,2)$, $(5,2)$, $\cdots$을 지나야 한다.

즉, 자연수 n에 대하여 $(2n-1,2)$를 지나야 한다. 이때

$(2n-1)^2+2^2=k$이고 $k\le 100$이므로

$n=1,2,3,4,5$이다.

따라서 100이하의 k의 개수는 5이다. (거짓)

86) [정답] ④

[해설]

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2x^{2n+1}}{1+x^{2n}}$ 을 구하면

(i) $|x|>1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2x}{\frac{1}{x^{2n}}+1}=2x$$

(ii) $|x|<1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=0$$

(iii) $x=1$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n+1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=1$$

(iv) $x=-1$일 때,

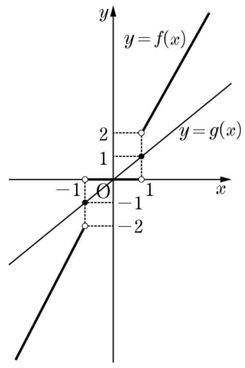
$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=1$이고, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}}{1+x^{2n}}=-1$$

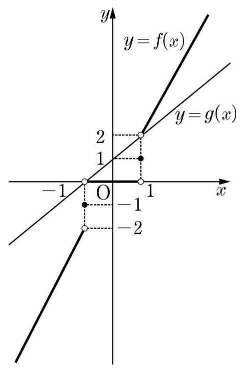
i)~iv)에 의해 $f(x)=\begin{cases}2x & (|x|>1)\\ 0 & (|x|<1)\\ 1 & (x=1)\\ -1 & (x=-1)\end{cases}$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.

(1) $a=0$인 경우, 서로 다른 세 점에서 만난다.



(2) $a=1$인 경우, 서로 만나지 않는다.



$h(0)=3$이고, $h(1)=0$에서 $\lim\limits_{a\to1+}h(a)=1$이다.

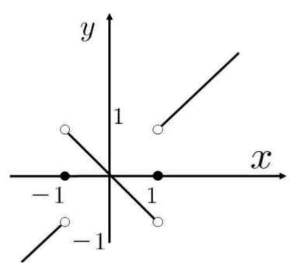
따라서 $h(0)+\lim\limits_{a\to1+}h(a)=3+1=4$

87) [정답] ①

[해설]

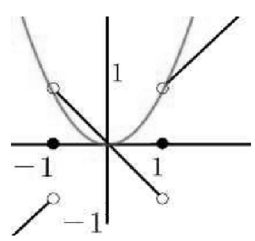
$$f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\left(x^{2n}-x^{-2n}\right)}{x^{2n}+x^{-2n}} & (x\ne0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}-x & (-1<x<1)\\ 0 & (x=\pm1)\\ x & (x<-1,\ x<1)\end{cases}$$



이때, $f(x)=(x-k)^2$이 서로 다른 실근의 개수가 3인 조건은

ㄱ. $k=0$일 때,



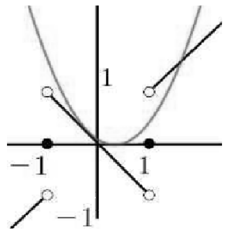
ㄴ. $y=-x$와 $y=(x-k)^2$접할 때,

$-x=(x-k)^2$

$x^2-(2k-1)x+k^2=0$

$D=(2k+1)^2-4k^2=-4x+1=0$

$k=\frac{1}{4}$



ㄱ, ㄴ의 사이 영역에서 실근 개수가 3개 성립

$\therefore\ 0<k<\frac{1}{4}$

$\therefore\ \ a+b=0+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

88) [정답] ③

[해설]

(i) $|x|>1$일 때

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x+\frac{2}{x^{2n-1}}}{3+\frac{1}{x^{2n}}}$

$=\frac{a-2}{3}x$

(ii) $|x|<1$일 때

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}=2x$

(iii) $x=1$일 때

$f(1)=\frac{a}{4}$

(iv) $x=-1$일 때

$f(-1)=-\frac{a}{4}$

(i)~(iv)에서 $f(1)=\frac{a}{4}$이므로

$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{5}{4}$

㉠ $\left|\frac{a}{4}\right|>1$, 즉 $|a|>4$일 때

$f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a-2}{3}\times\frac{a}{4}=\frac{5}{4}$에서

$a^2-2a-15=0$

$(a-5)(a+3)=0$

$|a|>4$이므로 $a=5$

㉡ $\left|\frac{a}{4}\right|<1$, 즉 $|a|<4$일 때

$f\left(\frac{a}{4}\right)=2\times\frac{a}{4}=\frac{5}{4}$에서 $a=\frac{5}{2}$

㉢ $\frac{a}{4}=1$, 즉 $a=4$일 때

$f\left(\frac{a}{4}\right)=f(1)=1\neq\frac{5}{4}$

㉣ $\frac{a}{4}=-1$, 즉 $a=-4$일 때

$f\left(\frac{a}{4}\right)=f(-1)=1\neq\frac{5}{4}$

따라서 모든 a의 값은 $a=5$ 또는 $a=\frac{5}{2}$이고, 그 합은

$5+\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$

89) [정답] ④

[해설]

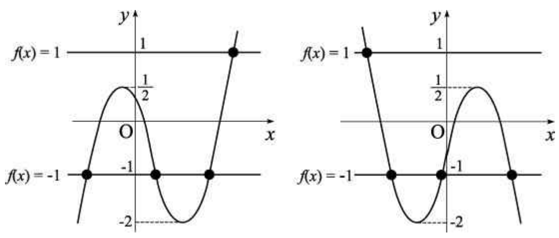
(i) $|f(x)|<1$ 일 때 $g(x)=1$

(ii) $|f(x)|=1$ 일 때 $g(x)=\frac{1}{2}$

(iii) $|f(x)|>1$ 일 때 $g(x)=0$

따라서 함수 $y=g(x)$ 는

$f(x)=1$ 또는 $f(x)=-1$ 일 때 불연속이다.



그림과 같이 $f(x)=1$ 인 x 는 1 개, $f(x)=-1$ 인 x 는 3 개이므로 실수전체의 집합에서 불연속인 x 는 4 개다.

90) [정답] ③

[해설]

$f(x)=(x-2)^2+a-4$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭인 연속함수이다.

한편, $g(x)$를 간단히 하면 다음과 같다.

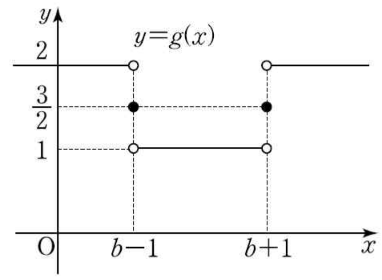
(i) $|x-b|>1$일 때 $g(x)=2$

(ii) $|x-b|=1$일 때 $g(x)=\frac{3}{2}$

(iii) $|x-b|<1$일 때 $g(x)=1$

이때, $|x-b|=1 \Leftrightarrow x=b-1$ 또는 $x=b+1$

이므로 함수 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, 함수 $g(x)$는 $x=b-1$, $x=b+1$일 때 불연속이므로 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 모든 실수 x에 연속이 되려면

$f(b-1)=f(b+1)=0$이어야 한다.

따라서 $y=f(x)$의 대칭축의 방정식은 $x=2=b$ …㉠

이고, $f(3)=9-12+a=0$ …㉡ 이어야 한다.

㉠, ㉡에서 $a=3$, $b=2$ $\therefore$ $a+b=5$

91) [정답] 90

[해설]

$g(x)$를 x의 범위에 따라 구하면 다음과 같다.

(i) $|x|>1$일 때,

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{-1}-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$$

(ii) $|x|=1$일 때,

$$g(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2n-1}-1}{1^{2n}+1}=0$$

(iii) $|x|<1$일 때,

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}-1}{x^{2n}+1}=-1$$

$$\therefore g(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (|x|>1)\\ 0 & (|x|=1)\\ -1 & (|x|<1)\end{cases}$$

또, $h(x)=\begin{cases}\frac{|x|}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}=\begin{cases}1 & (x>0)\\ 0 & (x=0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=x^2+ax+b$

로 놓으면 $f(x)g(x)$가 연속이므로 $x=1$에서 연속이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=f(1)g(1)$$

이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}\left\{(x^2+ax+b)\times\frac{1}{x}\right\}=1+a+b$$

$$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}\{(x^2+ax+b)\times(-1)\}=-1-a-b$$

$f(1)g(1)=(1+a+b)\times0=0$에서

$1+a+b=0$ …… ㉠

또, 함수 $f(x)h(x)$가 연속이므로 $x=0$에서 연속이어야 한다. 즉,

$$\lim_{x\to0+}f(x)h(x)=\lim_{x\to0-}f(x)h(x)=f(0)h(0)$$

이므로

$$\lim_{x\to0+}f(x)h(x)=\lim_{x\to0+}\{(x^2+ax+b)\times1\}=b$$

$$\lim_{x\to0-}f(x)h(x)=\lim_{x\to0-}\{(x^2+ax+b)\times(-1)\}=-b$$

$f(0)h(0)=b\times0=0$에서

$b=0$ …… ㉡

㉠과 ㉡에서 $a=-1$, $b=0$이므로 $f(x)=x^2-x$

따라서

$f(10)=10^2-10=90$

92) [정답] 8

[해설]

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}+1}{x^{2n}+1}$에서 $f(x)=\begin{cases}x & (|x|>1)\\ 1 & (|x|<1)\\ 1 & (x=1)\\ 0 & (x=-1)\end{cases}$ 이므로

함수 $f(x)g(x-a)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$에서 연속이어야 한다.

$$\lim_{x\to-1-}f(x)g(x-a)=\lim_{x\to-1-0}x\{(x-a)^2+10(x-a)\}$$

$=-(a+1)(a-9)$ …… ㉠

$$\lim_{x\to-1+}f(x)g(x-a)=\lim_{x\to-1+}1\cdot\{(x-a)^2+10(x-a)\}$$

$=(a+1)(a-9)$ …… ㉡

$f(-1)g(-1-a)=0\times g(-1-a)=0$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 값이 모두 같아야 하므로

$a=-1$ 또는 $a=9$이다.

따라서 모든 상수 a의 값의 합은 8

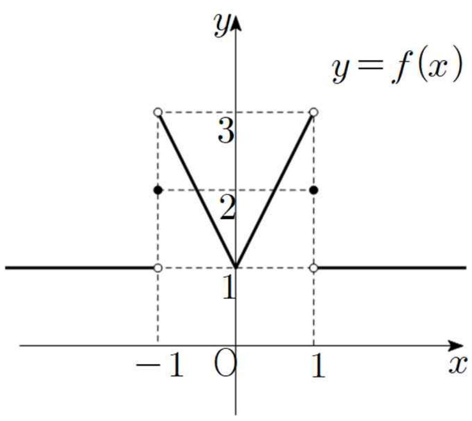
93) [정답] ⑤

[해설]

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^n+2|x|+1}{|x|^n+1}$에서

ⅰ) $|x|<1$일 때, $f(x)=2|x|+1$, ⅱ) $|x|=1$일 때, $f(x)=2$

ⅲ) $|x|>1$일 때, $f(x)=1$



ㄱ. $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\left|\dfrac{1}{2}\right|+1=2$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=\lim\limits_{x\to1-0}(2|x|+1)=3$ (참)

ㄷ. $g(x)=(x^2-1)f(x)$라 하면, 함수 $y=x^2-1$은 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $y=f(x)$는 $x\neq\pm1$인 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$, $x=-1$에서의 연속성을 조사하면 된다.

ⅰ) $x=1$일 때, $g(1)=0$이고

$\lim\limits_{x\to1+0}g(x)=\lim\limits_{x\to1+0}\{(x^2-1)\times1\}=0$

$\lim\limits_{x\to1-0}g(x)=\lim\limits_{x\to1-0}(x^2-1)(2|x|+1)=0$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ⅱ) $x=-1$일 때, $g(-1)=0$이고

$\lim\limits_{x\to-1+0}g(x)=\lim\limits_{x\to-1+0}(x^2-1)(2|x|+1)=0$

$\lim\limits_{x\to-1-0}g(x)=\lim\limits_{x\to-1-0}\{(x^2-1)\times1\}=0$이므로 $g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

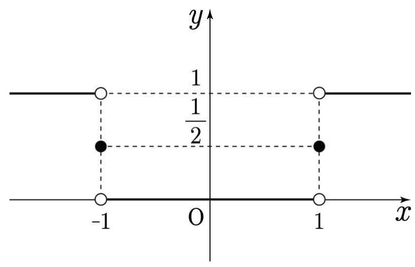
ⅰ), ⅱ)에 의하여 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

94) [정답] **63**

[해설]

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=-1$, 1에서 불연속이다.

함수 $g(x)=x^2+ax+b$라 하면

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$과 $x=-1$에서 연속이다.

$x=1$에서 연속이므로

$f(1)g(1)=\lim\limits_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)g(x)$

$\dfrac{1}{2}(1+a+b)=1(1+a+b)=0$에서

$a+b=-1$ …… ㉠

$x=-1$에서 연속이므로

$f(-1)g(-1)=\lim\limits_{x\to-1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to-1-}f(x)g(x)$

$\dfrac{1}{2}(1-a+b)=0=1(1-a+b)$에서

$a-b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=0$, $b=-1$이므로

$g(x)=x^2-1$

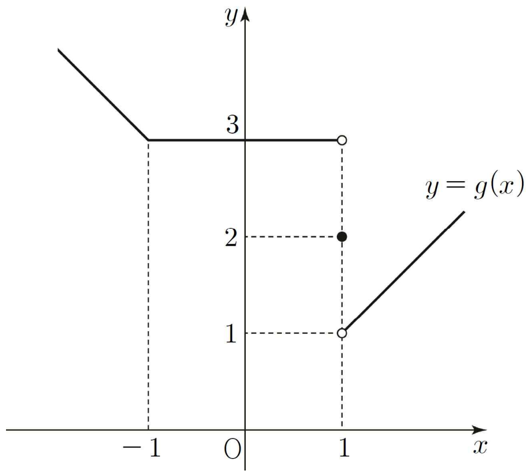
따라서 $g(8)=63$

95) [정답] 30

[해설]

함수 $g(x)=\begin{cases}-x+2 & (x\le-1)\\ 3 & (|x|<1)\\ 2 & (\ x=1\ )\\ x & (\ x>1\ )\end{cases}$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서만 불연속이다.



함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$f(1)g(1)=\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)g(x)$

$(3+a)\times2=\lim_{x\to1+}(3x+a)x=\lim_{x\to1-}(3x+a)\times3$

$a=-3$이므로

$f(x)=3x-3$

따라서 $f(11)=30$

96) [정답] 28

[해설]
함수 $f(x)$를 구하면 다음과 같다.
(i) $|x|<1$이면 $\lim x^n=0$이므로 $f(x)=-1$

(ii) $x=1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^n=1$이므로 $f(x)=\frac{1}{2}$

(iii) $x=-1$이면 $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이고 $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$

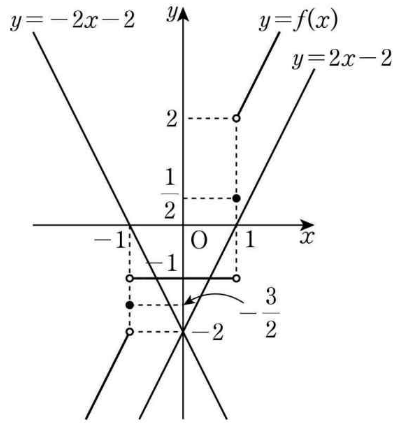
이므로 $f(x)=-\frac{3}{2}$

(iv) $|x|>1$이면 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{2x-\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}=2x$$

그러므로 $f(x)=\begin{cases}-1 & (-1<x<1)\\ \frac{1}{2} & (x=1)\\ -\frac{3}{2} & (x=-1)\\ 2x & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=tx-2$는 점 $(0,\ -2)$를 지나므로 기울기 t의 값에 따른 교점의 개수 $g(t)$를 구해 보면

$-1\le t<-\frac{1}{2}$ 또는 $-\frac{1}{2}<t\le0$일 때 $g(t)=0$

$t<-1$ 또는 $t=-\frac{1}{2}$ 또는 $0<t\le1$ 또는 $t=2$

또는 $t\ge4$일 때 $g(t)=1$

$1<t<2$ 또는 $2<t<\frac{5}{2}$ 또는 $\frac{5}{2}<t<4$일 때 $g(t)=2$

$t=\frac{5}{2}$일 때 $g(t)=3$

즉 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값은

$-1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1,\ 2,\ \frac{5}{2},\ 4$

이므로 $m=7,\ a_m=4$

따라서 $m\times a_m=7\times4=28$

97) [정답] ⑤

[해설]

ㄱ. $x=-1$에서 연속이기 위해서 $f(-1)$과 $\lim_{x\to-1}f(x)$가 서로 같아야 한다.

$$f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{2(-1)^{2n+1}+(-1)^2+1}{(-1)^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{0}{2}=0$$

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}+x^2+1}{x^{2n}+1}\right\}=2$$

$$\lim_{n\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}+x^2+1}{x^{2n}+1}\right\}=-2$$

따라서 $\lim_{x\to-1}f(x)$의 값은 존재하지 않고, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다. (거짓)

ㄴ. $-1<x<1$일 때 $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}x^{2n}=0$이므로

$f(x)=x^2+1$ $\cdots$ (1)

따라서 $x=0$에서 극솟값 1을 갖는다. (참)

ㄷ. $x=1$에서 연속성을 조사하면

$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 1^{2n+1}+1^2+1}{1^{2n}+1}=2$

$\lim_{x\to 1+}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}+x^2+1}{x^{2n}+1}\right\}=2$

$\lim_{x\to 1-}\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{2x^{2n+1}+x^2+1}{x^{2n}+1}\right\}=2$

$\therefore\ f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)$

그러므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$x>1$ 일 때 $f(x)=2x$ 이고 $-1<x<1$ 일 때 $f(x)=x^2+1$ 이므로

$x>1$ 일 때 $f'(x)=2$ 이고 $-1<x<1$ 일 때 $f'(x)=2x$ 이다.

따라서 $x=1$ 에서 미분가능하다. (참)

98) [정답] ④

[해설]

ㄱ. $0<a_n<b_n$ 이고, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}\times\frac{a_n}{b_n}=0\times 0=0$ (참)

ㄴ. $\{a_n\}$;$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots$ 이고

$\{b_n\}$;$0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots$ 이면

수열 $\{a_n\}$은 발산하고 수열 $\{a_nb_n\}$은 수렴하지만

$\lim_{n\to\infty}b_n$ 은 발산한다. (거짓)

ㄷ. $a_n<b_n<c_n\ (n=1,2,3,\cdots)$이고

$\lim_{n\to\infty}(n+1)a_n=\lim_{n\to\infty}(n-1)c_n=1$ 이므로

$a_n=\frac{1}{n+a},\ c_n=\frac{1}{n+b}\quad(a>b)$ 꼴이다.

$\therefore\ \frac{1}{n+a}<b_n<\frac{1}{n+b}\quad(a>b)$ 에서

$\frac{n}{n+a}<nb_n<\frac{n}{n+b}\quad(a>b)$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}nb_n=1$ 이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

99) [정답] ③

[해설]

ㄱ. 수열 $\{a_n\}$은 $1,\ 2,\ 1,\ 2,\ \cdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다. (참)

ㄴ. 수열 $\{b_n\}$은

$p+q,\ -p+q,\ p+q,\ -p+q,\ \cdots$

이므로 $p=0$인 경우 수열 $\{b_n\}$은 $q,\ q,\ q,\ \cdots$

가 되어 수렴한다. (참)

ㄷ. 수열 $\{a_n+b_n\}$은

$1+p+q,\ 2-p+q,\ 1+p+q,\ 2-p+q,\ \cdots$

이므로 수열 $\{a_n+b_n\}$이 수렴하기 위해서는

$1+p+q=2-p+q$

$p=\frac{1}{2}$

수열 $\{a_nb_n\}$은

$1\times(p+q),\ 2\times(-p+q),\ 1\times(p+q),\ 2\times(-p+q),\ \cdots$ 이므로

수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴하기 위해서는

$1\times(p+q)=2\times(-p+q)$

$q=3p$

그러므로

$q=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

그러면 $1+p+q=2-p+q=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3$

또한, $1\times(p+q)=2\times(-p+q)=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=2$

그러므로

$\lim_{n\to\infty}\{(a_n)^2+(b_n)^2\}$

$=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n$

$=3^2-2\times 2=5$ (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

[다른 풀이]

ㄷ. $a_n+b_n=\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^n+\frac{3}{2}\right\}+\{p\times(-1)^{n+1}+q\}$

$=\left(\frac{1}{2}-p\right)(-1)^n+\frac{3}{2}+q$이므로

수열 $\{a_n+b_n\}$이 수렴하려면

$\frac{1}{2}-p=0$, 즉 $p=\frac{1}{2}$ 이어야 한다.

$p=\frac{1}{2}$일 때,

$a_nb_n=\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^n+\frac{3}{2}\right\}\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^{n+1}+q\right\}$

$=\left\{\frac{1}{2}\times(-1)^n+\frac{3}{2}\right\}\left\{-\frac{1}{2}\times(-1)^n+q\right\}$

$=-\frac{1}{4}\times(-1)^{2n}+\left(\frac{q}{2}-\frac{3}{4}\right)(-1)^n+\frac{3}{2}q$

$=\left(\frac{q}{2}-\frac{3}{4}\right)(-1)^n-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}q$이므로

수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴하려면

$\frac{q}{2}-\frac{3}{4}=0$, 즉 $q=\frac{3}{2}$ 이어야 한다.

그러므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\frac{3}{2}+q=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}q=-\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=2$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\left\{(a_n)^2+(b_n)^2\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2-\lim_{n\to\infty}2a_nb_n$

$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty}a_nb_n$

$=3^2-2\times2=5$