[준킬러][미적] 3미분법1

06 미적 03 지수, 로그함수의 미분

01 자연상수 e의 정의

04 e를 포함한 지수함수와 로그함수의 계산

[출처] 2019 모의_공공 평가원 고3 09월 15

1. 함수 $y=e^{x}$의 그래프 위의 x좌표가 양수인 점 A와 함수 $y=-\ln x$의 그래프 위의 점 B가 다음 조건을 만족시킨다. 직선 OA의 기울기는? (단, O는 원점이다.)

(가) $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{OB}}$

(나) $\angle \mathrm{AOB}=90°$

① e ② $\frac{3}{\ln 3}$ ③ $\frac{2}{\ln 2}$

④ $\frac{5}{\ln 5}$ ⑤ $\frac{e^{2}}{2}$

06 미적 03 지수, 로그함수의 미분

02 지수, 로그함수의 극한

06 e를 포함한 극한의 계산3 (지수식. 무한소)

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 03월 1

2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{4x}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{5}{6}$ ⑤ 1

[준킬러][미적] 3미분법1

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 04월 1

3. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{4x}$ 의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

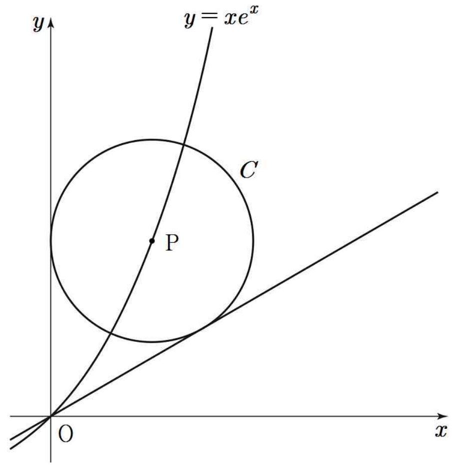
06 미적 03 지수, 로그함수의 미분

02 지수, 로그함수의 극한

11 극한의 활용2 (지수식 극한)

[출처] 2017 모의_공공 교육청 고2 11월 28

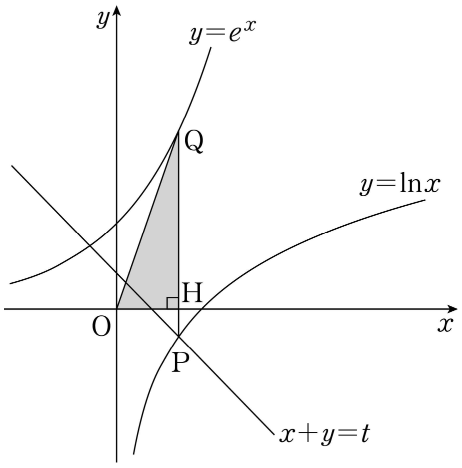
4. 그림과 같이 곡선 $y = xe^x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, te^t)$ $(t > 0)$을 중심으로 하고 y축에 접하는 원을 C라 하자. 원 C의 반지름의 길이를 $r(t)$, 원점 O를 지나고 원 C에 접하는 직선 중에서 y축이 아닌 직선의 기울기를 $m(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 0+} \frac{4r(t) - e^t \times m(t)}{t}$ 의 값을 구하시오.



[출처] 2017 모의_공공 교육청 고3 10월 17

5. $t<1$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln x$와 직선 $x+y=t$가 만나는 점을 P라 하자. 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 직선 PH와 곡선 $y=e^x$이 만나는 점을 Q라 할 때, 삼각형 OHQ의 넓이를 $S(t)$라 하자.

$\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{2S(t)-1}{t}$ 의 값은?



① 1 ② $e-1$ ③ 2

④ e ⑤ 3

06 미적 03 지수, 로그함수의 미분

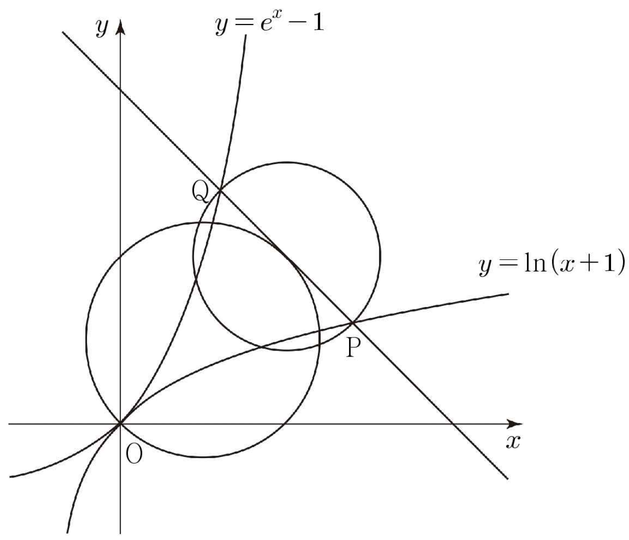
02 지수, 로그함수의 극한

12 극한의 활용3 (로그식 극한)

[출처] 2015 모의_공공 교육청 고2 11월 21

6. 곡선 $y=\ln(x+1)$위를 움직이는 점 P(a, b)가 있다. 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=e^x-1$과 만나는 점을 Q라 하자. 두 점 P, Q를 지름의 양 끝점으로 하는 원의 넓이를 $S(a)$, 원점 O와 선분 PQ의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 넓이를 $T(a)$라 할 때,

$\lim\limits_{a\to0+}\dfrac{4T(a)-S(a)}{\pi a^2}$의 값은? (단, $a>0$)



① 1 ② $\dfrac{5}{4}$ ③ $\dfrac{3}{2}$

④ $\dfrac{7}{4}$ ⑤ 2

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 04월 17

7. $a>e$인 실수 a에 대하여 두 곡선 $y=e^{x-1}$과 $y=a^x$이 만나는 점의 x좌표를 $f(a)$라 할 때, $\lim_{a \to e+} \frac{1}{(e-a)f(a)}$의 값은?

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1

④ e ⑤ e^2

06 미적 03 지수, 로그함수의 미분

03 지수, 로그함수의 도함수

01 미분법 공식1 (지수함수)

[출처] 2011 모의_공공 교육청 고3 03월 26

8. 실수 전체의 집합에서 정의된 미분 가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x, y에 대하여
$$f(x+y)=f(x)f(y)+4f(x)+4f(y)+12$$
(나) $f(\ln 12)=0$, $f'(0)=2$

이때, $f'(\ln 2)$의 값을 구하시오.

06 미적 03 지수, 로그함수의 미분

03 지수, 로그함수의 도함수

05 조건해석3 (함수의 해석)

[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 07월 20

9. 두 함수 $f(x)=\ln x$, $g(x)=\ln\frac{1}{x}$ 의 그래프가 만나는 점을 P라 할 때 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보 기>

ㄱ. 점 P의 좌표는 $(1, 0)$이다.

ㄴ. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 각각의 접선은 서로 수직이다.

ㄷ. $t>1$일 때, $-1<\frac{f(t)g(t)}{(t-1)^2}<0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

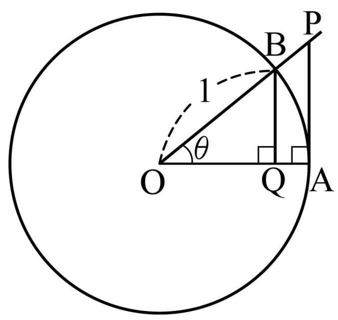
06 미적 04 삼각함수의 덧셈정리

01 삼각함수의 정의

04 정의4 (해석 및 활용)

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고2 03월 13

10. 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O 위에 두 점 A, B가 있다. 점 A에서의 접선이 $\overline{\text{OB}}$의 연장선과 만나는 점을 P, 점 B에서 $\overline{\text{OA}}$에 내린 수선의 발을 Q라 하고 $\angle\text{AOB}=\theta$라 한다. $\overline{\text{OQ}}=2\overline{\text{AP}}\times\overline{\text{BQ}}$가 성립할 때 $\csc\theta\times\sec\theta\times\cot\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)



① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

06 미적 04 삼각함수의 덧셈정리

03 삼각함수의 해석 및 활용

02 해석 및 활용2 (방정식 또는 부등식)

[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 07월 15

11. $\tan\alpha = -\frac{5}{12}\left(\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi\right)$이고 $0 \le x < \frac{\pi}{2}$일 때, 부등식

$$\cos x \le \sin(x+\alpha) \le 2\cos x$$

를 만족시키는 x에 대하여 $\tan x$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① $\frac{31}{12}$ ② $\frac{37}{12}$ ③ $\frac{43}{12}$

④ $\frac{49}{12}$ ⑤ $\frac{55}{12}$

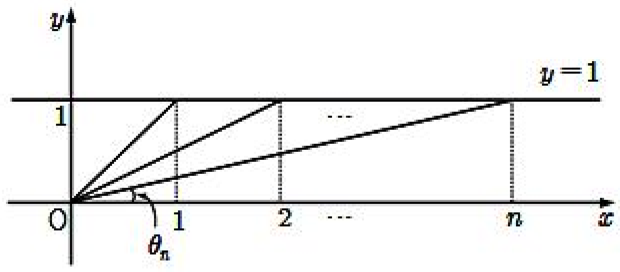
06 미적 04 삼각함수의 덧셈정리

03 삼각함수의 해석 및 활용

05 해석 및 활용5 (두 직선이 이루는 각)

[출처] 2007 모의_공공 교육청 고3 04월 미분과 적분 30

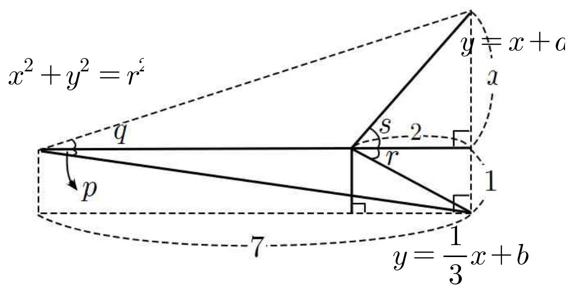
12. 원점과 점 $(1, 1)$을 이은 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_1, 원점과 점 $(2, 1)$을 이은 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_2, $\cdots$, 원점과 점 $(n, 1)$을 이은 선분이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_n이라 하자.



$\theta_1 - \theta_2 = \theta_p - \theta_q$가 되도록 하는 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오. (단, $1 < p < q$이고 p, q는 자연수이다.)

[출처] 2008 모의_공공 교육청 고3 07월 미분과 적분 29

13. 두 직선 $y=x+a$, $y=\frac{1}{3}x+b$가 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하는 점을 각각 P_1, P_2라 하고 $\angle \mathrm{P}_1\mathrm{O}\mathrm{P}_2=\alpha$일 때, $\tan\alpha$의 값은? (단, $a<0$, $b<0$)

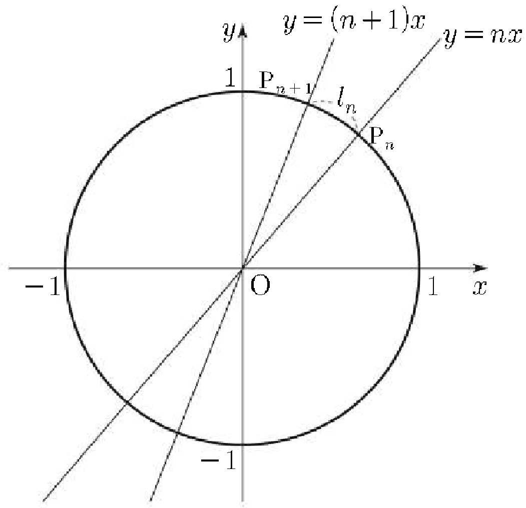


① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

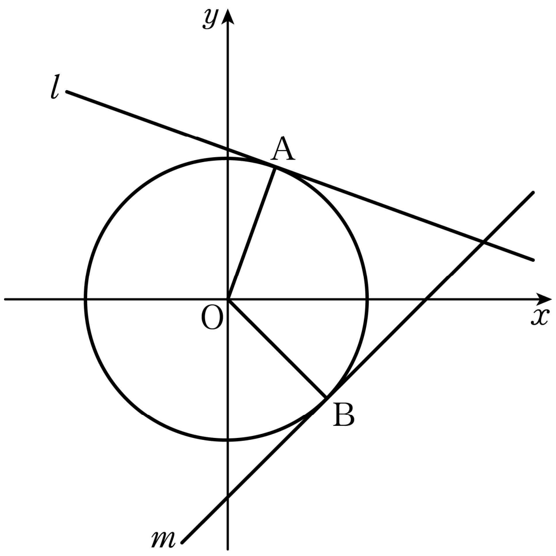
[출처] 2011 모의_공공 교육청 고2 11월 30

14. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 원 $x^2+y^2=1$과 두 직선 $y=nx$, $y=(n+1)x$가 제 1사분면에서 만나는 점을 각각 P_n, P_{n+1}이라 하자.
제 1사분면에 있는 원 위의 호 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 길이를 l_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{n} l_k \ge \frac{\pi}{6}$를 만족시키는 n의 최솟값을 구하시오.



[출처] 2016 모의_공공 교육청 고3 03월 26

15. 그림과 같이 기울기가 $-\frac{1}{3}$ 인 직선 l 이 원 $x^2+y^2=1$ 과 점 A에서 접하고, 기울기가 1인 직선 m 이 원 $x^2+y^2=1$ 과 점 B에서 접한다. $100\cos^2(\angle \mathrm{AOB})$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.)



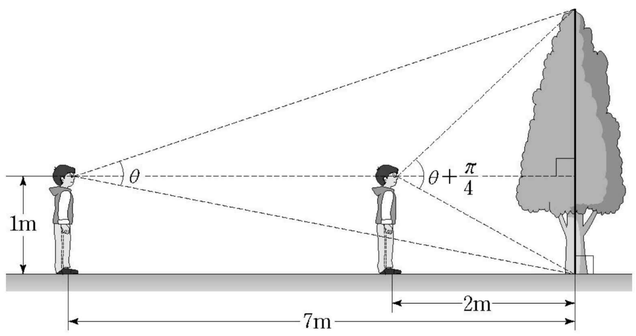
06 미적
04 삼각함수의 덧셈정리

03 삼각함수의 해석 및 활용

06 해석 및 활용6 (다각형의 성질)

[출처] 2008 모의_공공 평가원 고3 06월 미분과 적분 29

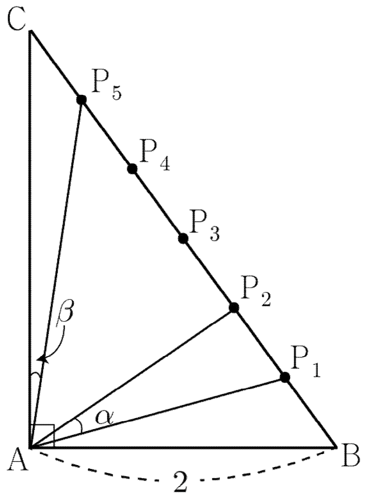
16. 눈높이가 1 m 인 어린이가 나무로부터 7 m 떨어진 지점에서 나무의 꼭대기를 바라본 선과 나무가 지면에 닿는 지점을 바라본 선이 이루는 각이 θ 이었다. 나무로부터 2 m 떨어진 지점까지 다가가서 나무를 바라보았더니 나무의 꼭대기를 바라본 선과 나무가 지면에 닿는 지점을 바라본 선이 이루는 각이 $\theta+\frac{\pi}{4}$ 가 되었다. 나무의 높이는 a (m) 또는 b (m) 이다. $a+b$ 의 값은?



① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

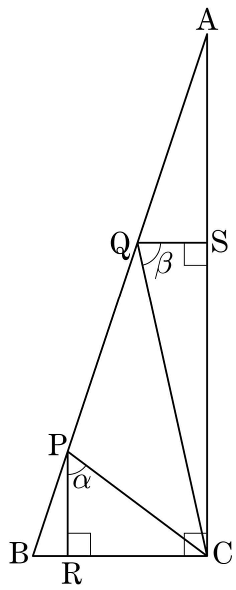
[출처] 2014 모의_공공 교육청 고2 11월 28

17. 그림과 같이 $\overline{AB}=2$이고 $\angle A=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에 대하여 선분 BC를 6등분한 점을 점 B에서 가까운 순서대로 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5라 하고, $\angle P_1AP_2=\alpha$, $\angle P_5AC=\beta$라 하자. $2\tan\alpha=3\tan\beta$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 S이다. $9S^2$의 값을 구하시오.



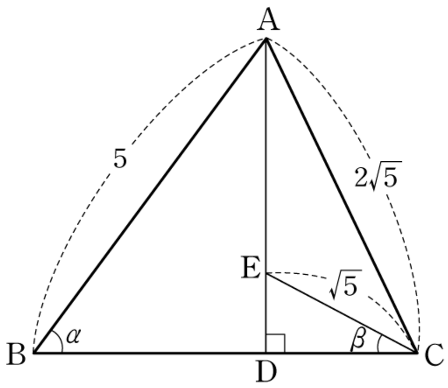
[출처] 2014 모의_공공 교육청 고3 03월 27

18. $\overline{AC}=3$, $\overline{BC}=1$, $\angle C=90°$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 4 : 1로 내분하는 점을 P, 선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점을 Q라 하자. 점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 R, 점 Q에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 S라 하자. $\angle CPR=\alpha$, $\angle CQS=\beta$라 할 때, $\tan(\beta-\alpha)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 14

19. 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=2\sqrt{5}$ 인 삼각형 ABC 의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하자. 선분 AD를 3 : 1로 내분하는 점 E에 대하여 $\overline{EC}=\sqrt{5}$ 이다. $\angle ABD=\alpha$, $\angle DCE=\beta$라 할 때, $\cos(\alpha-\beta)$의 값은?



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$　② $\frac{\sqrt{5}}{4}$　③ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

④ $\frac{7\sqrt{5}}{20}$　⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 14

20. 그림과 같이 $\overline{AB_1}=2$, $\overline{AD_1}=4$인 직사각형 $AB_1C_1D_1$이 있다.

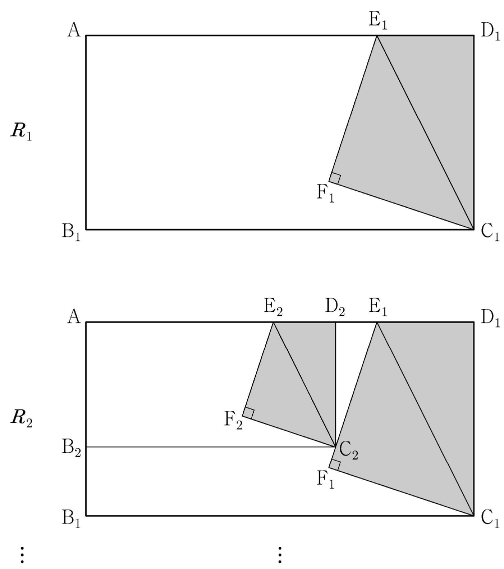
선분 AD_1을 3 : 1로 내분하는 점을 E_1이라 하고, 직사각형 $AB_1C_1D_1$의 내부에 점 F_1을 $\overline{F_1E_1}=\overline{F_1C_1}$, $\angle E_1F_1C_1=\frac{\pi}{2}$가 되도록 잡고 삼각형 $E_1F_1C_1$을 그린다.

사각형 $E_1F_1C_1D_1$을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 선분 AB_1위의 점 B_2, 선분 E_1F_1위의 점 C_2, 선분 AE_1위의 점 D_2와 점 A를 꼭짓점으로 하고 $\overline{AB_2}$: $\overline{AD_2}=1$: 2인 직사각형 $AB_2C_2D_2$를 그린다.

그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 직사각형 $AB_2C_2D_2$에 삼각형 $E_2F_2C_2$를 그리고 사각형 $E_2F_2C_2D_2$를 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값은?

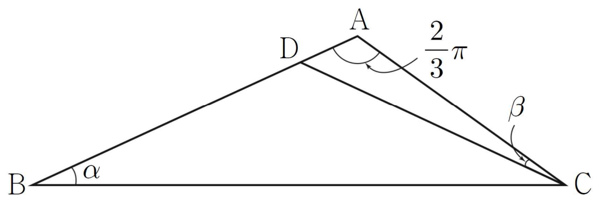


① $\frac{441}{103}$　② $\frac{441}{109}$　③ $\frac{441}{115}$

④ $\frac{441}{121}$　⑤ $\frac{441}{127}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 29

21. 그림과 같이 $\angle \mathrm{BAC}=\frac{2}{3}\pi$이고 $\overline{\mathrm{AB}}>\overline{\mathrm{AC}}$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{CD}}$인 선분 AB 위의 점 D에 대하여 $\angle \mathrm{CBD}=\alpha$, $\angle \mathrm{ACD}=\beta$라 하자. $\cos^2\alpha=\frac{7+\sqrt{21}}{14}$일 때, $54\sqrt{3}\times\tan\beta$의 값을 구하시오.

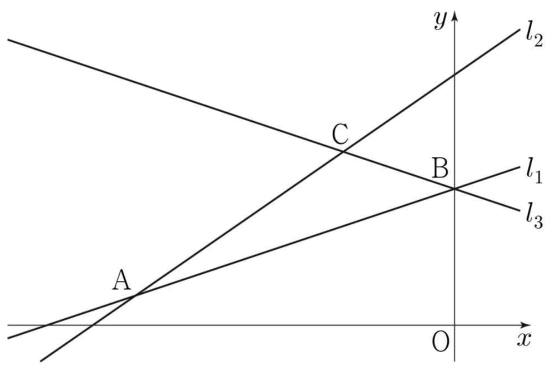


[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 29

22. 그림과 같이 좌표평면 위의 제 2사분면에 있는 점 A를 지나고 기울기가 각각 m_1, $m_2(0<m_1<m_2<1)$인 두 직선을 l_1, l_2라 하고, 직선 l_1을 y축에 대하여 대칭이동한 직선을 l_3이라 하자. 직선 l_3이 두 직선 l_1, l_2와 만나는 점을 각각 B, C라 하면 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{AB}}=12$, $\overline{\mathrm{AC}}=9$ (나) 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{15}{2}$이다.

$78\times m_1\times m_2$의 값을 구하시오.



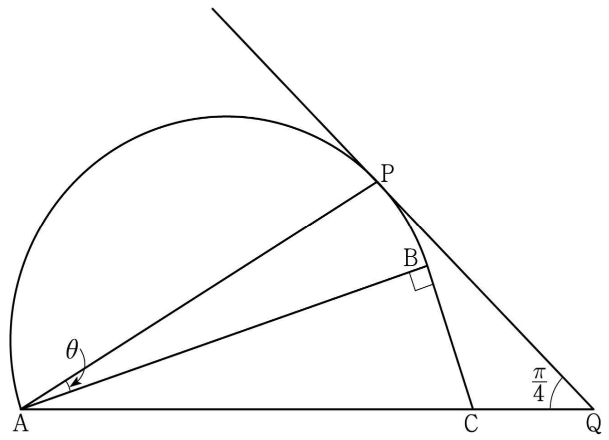
06 미적 04 삼각함수의 덧셈정리

03 삼각함수의 해석 및 활용

07 해석 및 활용7 (원의 성질)

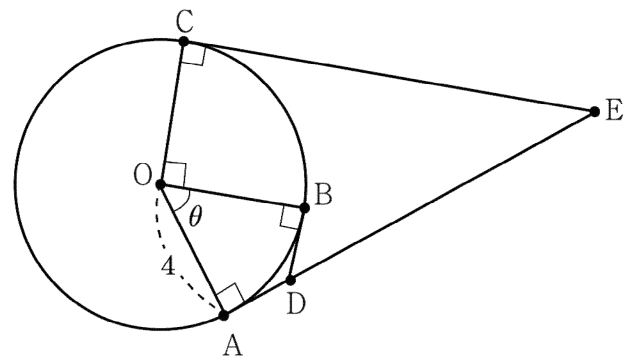
[출처] 2012 모의_공공 교육청 고3 10월 27

23. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=1$이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에서의 접선과 AC의 연장선이 만나는 점을 Q라 하자. $\angle PQA=\frac{\pi}{4}$이고 $\angle PAB=\theta$라 할 때, $60\tan 2\theta$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{6}$)



[출처] 2013 모의_공공 교육청 고3 04월 27

24. 그림과 같이 평면에서 중심이 O이고 반지름의 길이가 4인 원 위의 점 A를 점 O를 중심으로 시계 반대 방향으로 각 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$만큼 회전시킨 원 위의 점을 B, 점 B를 점 O를 중심으로 시계 반대 방향으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전시킨 원 위의 점을 C라 하자. 점 A에서의 접선이 점 B에서의 접선과 만나는 점을 D, 점 C에서의 접선과 만나는 점을 E라 하자. 사각형 OADB의 넓이가 8일 때, 사각형 OAEC의 넓이를 구하시오.



06 미적 05 삼각함수의 미분

01 삼각함수의 극한

05 극한의 계산4 (치환)

[출처] 2011 모의_공공 사관학교 고3 07월 29

25. 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 3 이상인 모든 자연수 n에 대하여

$$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{a_n}{2+a_n}=\frac{b_n}{2-b_n}$$

을 만족시킬 때, $\frac{1}{\pi^3}\lim_{n\to\infty}n^3(a_n+b_n)(a_n-b_n)$의 값을 구하시오.

06 미적 05 삼각함수의 미분

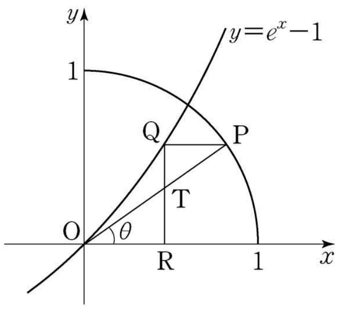
02 극한의 해석 및 활용

03 활용1 (함수의 그래프)

[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 11월 미분과 적분 30

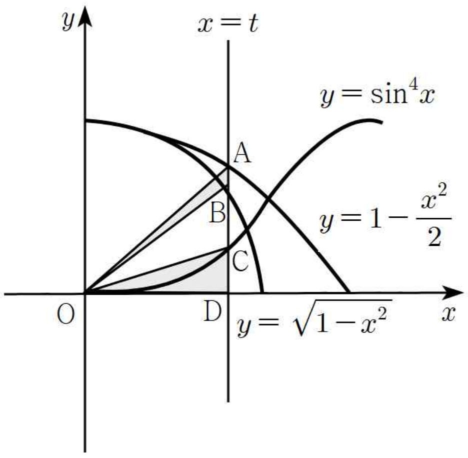
26. 좌표평면에서 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에 대하여 선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$라 하자. 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=e^x-1$과 만나는 점을 Q라 하고, 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 R라 하자. 선분 OP와 선분 QR의 교점을 T라 할 때, 삼각형 ORT의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=a$일 때, $60a$의 값을 구하시오.



[출처] 2014 모의_공공 사관학교 고3 07월 15

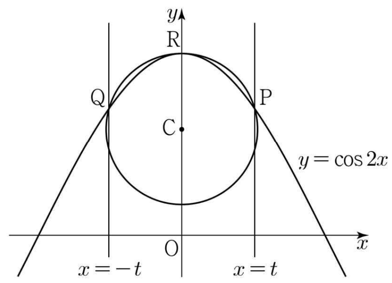
27. 그림과 같이 직선 $x=t(0<t<1)$이 세 곡선 $y=1-\dfrac{x^2}{2}$, $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=\sin^4 x$및 x축과 만나는 점을 각각 A, B, C, D라 하자. 두 삼각형 AOB, COD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 할 때, $\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{S_1}{S_2}$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\dfrac{1}{8}$ ② $\dfrac{1}{4}$ ③ $\dfrac{3}{8}$
④ $\dfrac{1}{2}$ ⑤ $\dfrac{5}{8}$

[출처] 2015 모의_공공 사관학교 고3 07월 27

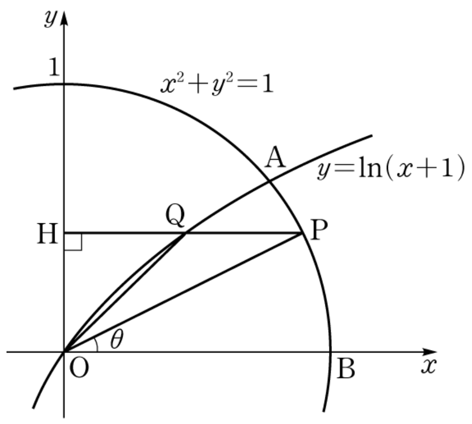
28. 좌표평면에서 곡선 $y=\cos 2x$가 두 직선 $x=t$, $x=-t\left(0<t<\dfrac{\pi}{4}\right)$와 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, 곡선 $y=\cos 2x$가 y축과 만나는 점을 R라 하자. 세 점 P, Q, R를 지나는 원의 중심을 C$(0, f(t))$라 할 때, $\lim\limits_{t\to 0+}f(t)=\alpha$이다. 100α의 값을 구하시오.



[출처] 2015 모의_공공 평가원 고3 11월

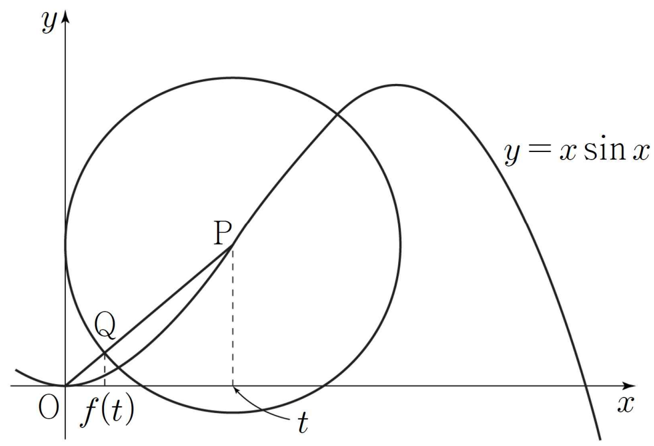
29. 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=1$과 곡선 $y=\ln(x+1)$이 제 1사분면에서 만나는 점을 A라 하자. 점 B(1, 0)에 대하여 호 AB 위의 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H, 선분 PH와 곡선 $y=\ln(x+1)$이 만나는 점을 Q라 하자. $\angle POB=\theta$라 할 때, 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(\theta)$, 선분 HQ의 길이를 $L(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{L(\theta)}=k$일 때, $60k$의 값을 구하시오.

$\left(\text{단, } 0<\theta<\frac{\pi}{6}\text{이고, O는 원점이다.}\right)$



[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 미적분 27

30. 그림과 같이 곡선 $y=x\sin x$ 위의 점 $P(t, t\sin t)$ $(0<t<\pi)$를 중심으로 하고 y축에 접하는 원이 선분 OP와 만나는 점을 Q라 하자. 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t^3}$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ 1

06 미적

05 삼각함수의 미분

02 극한의 해석 및 활용

04 활용2 (다각형의 성질)

[출처] 2004 모의_공공 평가원 고3 예비 미분과 적분 29

31. 그림의 직각삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$, $\angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{6}$이다. 변 BC의 연장선 위에 점 C_1, C_2, C_3, $\cdots$과 변의 길이 a_1, a_2, a_3, $\cdots$ 을 다음과 같이 정한다.

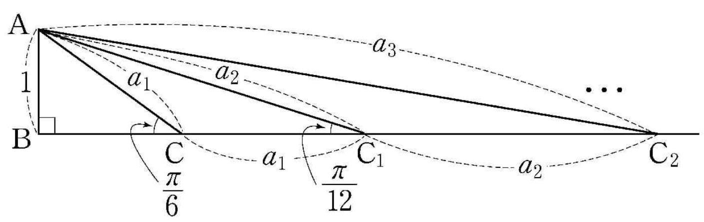
$\overline{\mathrm{CC}_1}=\overline{\mathrm{AC}}=\mathrm{a}$

$\overline{\mathrm{C}_1\mathrm{C}_2}=\overline{\mathrm{AC}_1}=a_2$

$\overline{\mathrm{C}_2\mathrm{C}_3}=\overline{\mathrm{AC}_2}=a_3$

……

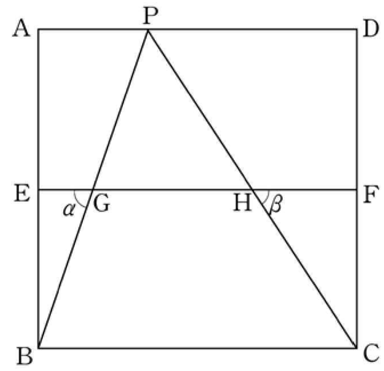
이때, 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi a_n}{2^n}$의 값은?



① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

[출처] 2005 모의_공공 평가원 고3 06월 미분과 적분 29

32. 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에서 변 AB의 중점을 E, 변 CD의 중점을 F라 하자. 선분 AD 위의 양 끝점이 아닌 임의의 점 P에 대하여 선분 BP와 선분 EF의 교점을 G, 선분 CP와 선분 EF의 교점을 H라 하자. $\angle\mathrm{BGE}=\alpha$, $\angle\mathrm{CHF}=\beta$라 할 때, <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



<보 기>

ㄱ. $\overline{\mathrm{GH}}$는 점 P의 위치에 관계없이 일정하다.

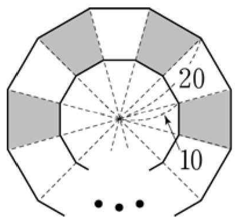
ㄴ. $\alpha+\beta$는 점 P의 위치에 관계없이 일정하다.

ㄷ. $\lim_{\alpha\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\frac{\pi}{2}-\alpha}=2$

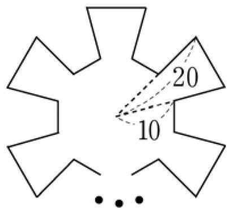
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[출처]　2005 모의_공공 평가원 고3 06월 미분과 적분 30

33. [그림 1]은 중심이 같은 두 개의 정$2n$각형에서 큰 정$2n$각형의 꼭짓점, 작은 정$2n$각형의 꼭짓점과 중심이 한 직선 위에 있도록 연결한 것이다. 중심에서 두 개의 정$2n$각형의 꼭짓점까지의 거리는 각각 10, 20이다. [그림 1]의 어두운 부분을 잘라내어 만든 [그림 2]와 같은 도형의 넓이를 S_n이라 하자. $\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty} S_n$의 값을 구하시오.



[그림 1]

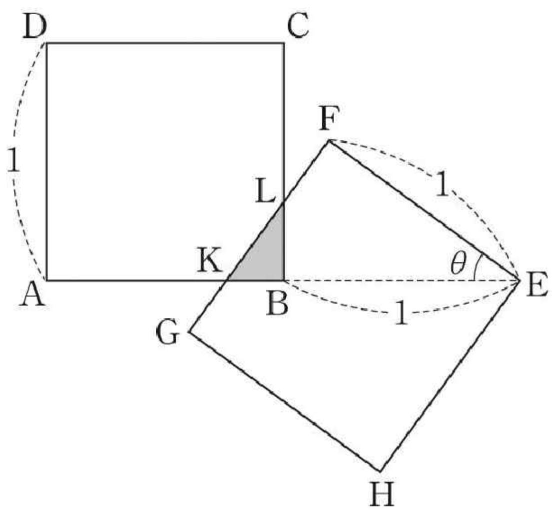


[그림 2]

[출처]　2008 모의_공공 평가원 고3 06월 미분과 적분 30

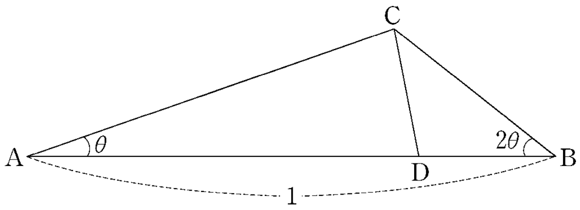
34. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 변 AB를 연장한 직선 위에 $\overline{BE}=1$인 점 E가 있다. 점 E를 꼭짓점으로 하고 한 변의 길이가 1인 정사각형 EFGH에 대하여 $\angle BEF=\theta$일 때, 변 FG와 변 AB의 교점을 K, 변 FG와 변 BC의 교점을 L이라 하자. 삼각형 KBL의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오.

(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이고, p, q는 서로소인 자연수이다.)



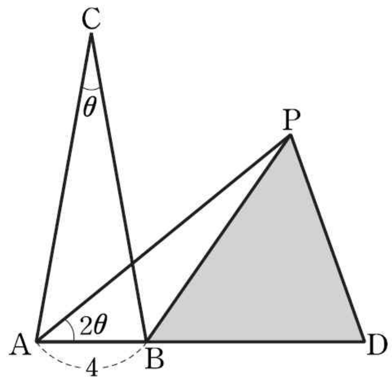
[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 11월 29

35. 삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=1$이고 $\angle A=\theta$, $\angle B=2\theta$이다. 변 AB 위의 점 D를 $\angle ACD=2\angle BCD$가 되도록 잡는다. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{\overline{CD}}{\theta}=a$일 때, $27a^2$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이다.)



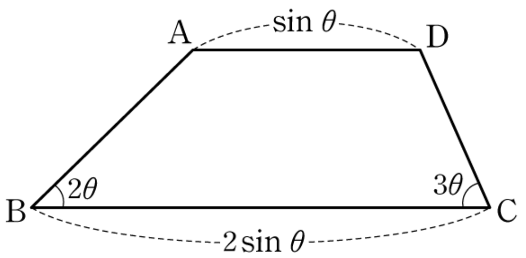
[출처] 2013 모의_공공 평가원 고3 11월 28

36. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 한 변으로 하고, $\overline{AC}=\overline{BC}$, $\angle ACB=\theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 $\overline{AC}=\overline{AD}$인 점 D를 잡고, $\overline{AC}=\overline{AP}$이고 $\angle PAB=2\theta$인 점 P를 잡는다. 삼각형 BDP의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to 0+}(\theta\times S(\theta))$의 값을 구하시오. $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{6}\right)$



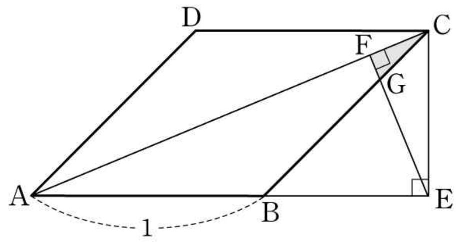
[출처] 2014 모의_공공 평가원 고3 06월

37. 그림과 같이 사다리꼴 ABCD 에서 변 AD와 변 BC 가 평행하고 $\angle \mathrm{B}=2\theta$, $\angle \mathrm{C}=3\theta$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sin\theta$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sin\theta$ 이다. 사다리꼴 ABCD 의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오.
$\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{6}\text{이고, } p\text{와 } q\text{는 서로소인 자연수이다.}\right)$



[출처] 2017 모의_공공 평가원 고3 11월 17

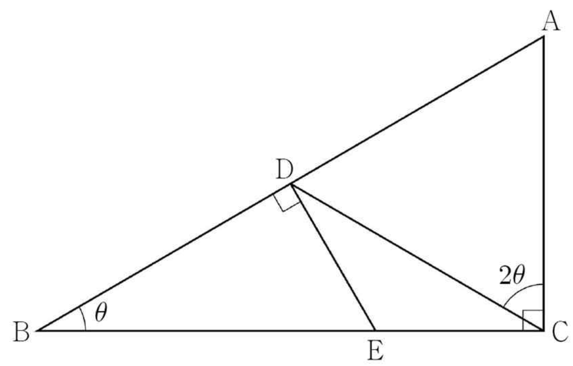
38. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 마름모 ABCD 가 있다. 점 C에서 선분 AB의 연장선에 내린 수선의 발을 E, 점 E에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 F, 선분 EF와 선분 BC 의 교점을 G라 하자. $\angle \mathrm{DAB}=\theta$일 때, 삼각형 CFG 의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{20}$ ③ $\frac{1}{16}$
④ $\frac{1}{12}$ ⑤ $\frac{1}{8}$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고2 11월 20

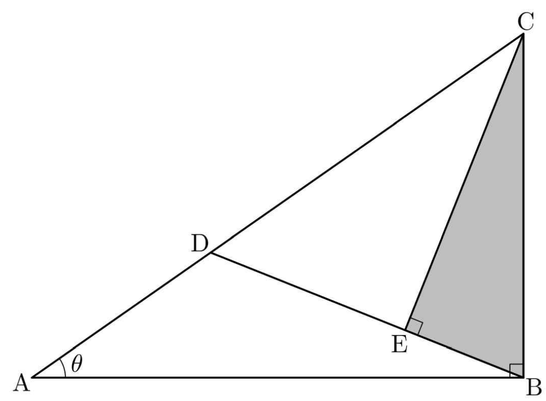
39. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$, $\angle CBA=\theta$ 인 직각삼각형 ABC 가 있다. 선분 AB 위에 $\angle ACD=2\theta$ 가 되도록 점 D 를 잡고, 선분 BC 위에 $\angle BDE=\frac{\pi}{2}$ 가 되도록 점 E 를 잡는다. 삼각형 CDE 의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



① 8　② $\frac{17}{2}$　③ 9　④ $\frac{19}{2}$　⑤ 10

[출처] 2019 모의_공공 사관학교 고3 07월 28

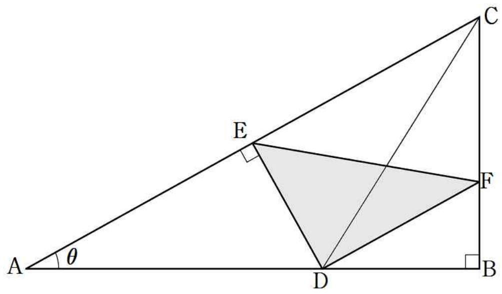
40. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 $\angle CAB=\theta$라 하자. 선분 AC를 4:7로 내분하는 점을 D라 하고 점 C에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 E라 할 때, 삼각형 CEB의 넓이를 $S(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[출처] 2019 모의_공공 교육청 고3 04월 19

41. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\angle B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에서 선분 AB위에 $\overline{AD}=\overline{CD}$가 되도록 점 D를 잡는다. 점 D에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 E, 점 D를 지나고 직선 AC에 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 F라 하자. $\angle BAC=\theta$일 때, 삼각형 DEF의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta}$의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$

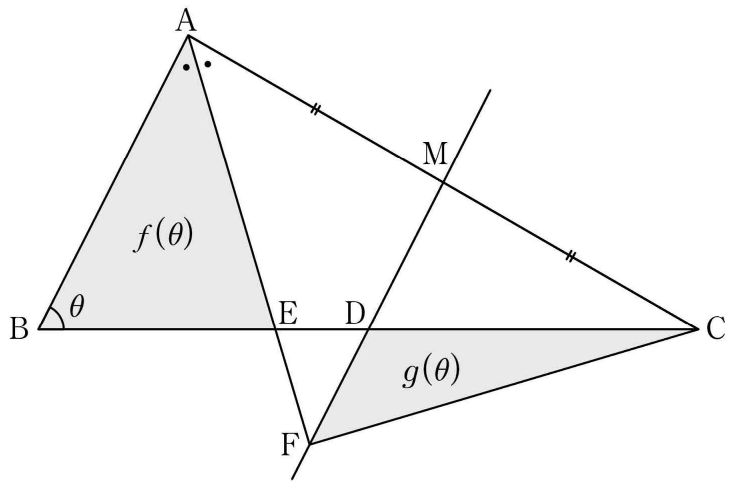


① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{3}{32}$

④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{5}{32}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 미적분 28

42. 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$인 삼각형 ABC에 대하여 선분 AC의 중점을 M이라 하고, 점 M을 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. $\angle BAC$의 이등분선이 두 직선 BC, DM과 만나는 점을 각각 E, F라 하자. $\angle CBA=\theta$일 때, 삼각형 ABE의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 DFC의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 \times f(\theta)}$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$)



① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{2}$

④ 1 ⑤ 2

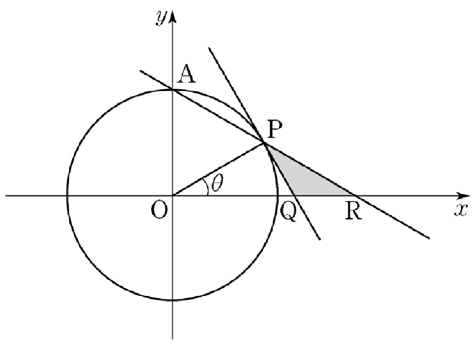
06 미적 05 삼각함수의 미분

02 극한의 해석 및 활용

05 활용3 (원의 방정식)

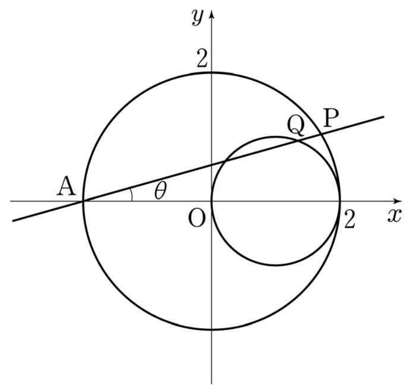
[출처] 2010 모의_공공 평가원 고3 06월 미분과 적분 30

43. 좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 A(0, 1)과 점 P를 지나는 직선이 x축과 만나는 점을 R라 하자. $\angle \mathrm{QOP}=\theta$라 하고 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라고 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}=\alpha$일 때, 100α의 값을 구하시오. (단, 점 P는 제 1사분면 위의 점이다.)



[출처] 2012 모의_공공 평가원 고3 09월 20

44. 그림과 같이 점 A$(-2, 0)$과 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P에 대하여 직선 AP가 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 두 점에서 만날 때 두 점 중에서 점 P에 가까운 점을 Q라 하자. $\angle \mathrm{OAP}=\theta$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta^2}$의 값은?

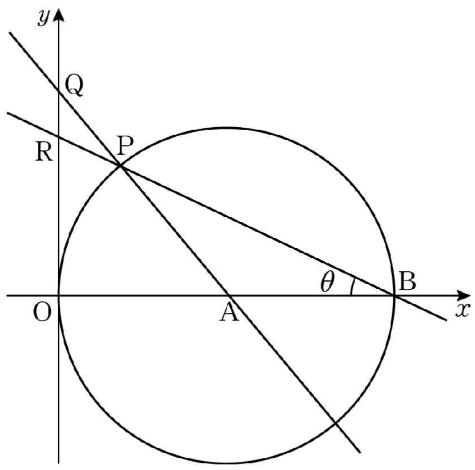


① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$

④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

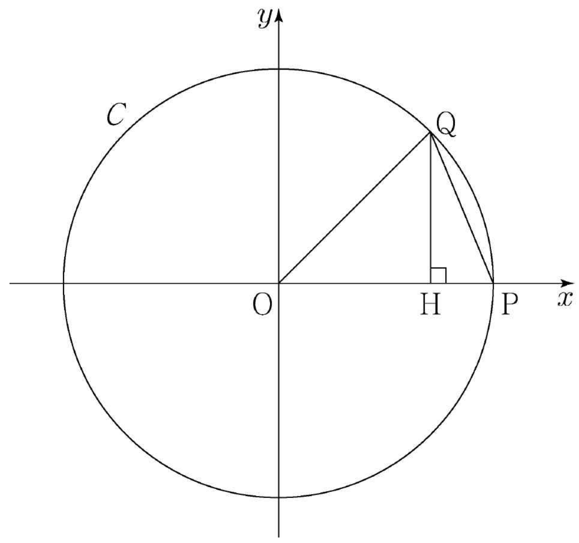
[출처] 2015 모의_공공 교육청 고3 03월 29

45. 그림과 같이 중심이 A(3, 0)이고 점 B(6, 0)을 지나는 원이 있다. 이 원 위의 점 P를 지나는 두 직선 AP, BP가 y축과 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. $\angle \mathrm{PBA}=\theta$라 하고, 삼각형 PQR의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^5}$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



[출처] 2018 모의_공공 평가원 고3 09월 19

46. 자연수 n에 대하여 중심이 원점 O이고 점 $\mathrm{P}(2^n, 0)$을 지나는 원 C가 있다. 원 C 위에 점 Q를 호 PQ의 길이가 π가 되도록 잡는다. 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim_{n\to\infty}(\overline{\mathrm{OQ}}\times\overline{\mathrm{HP}})$의 값은?

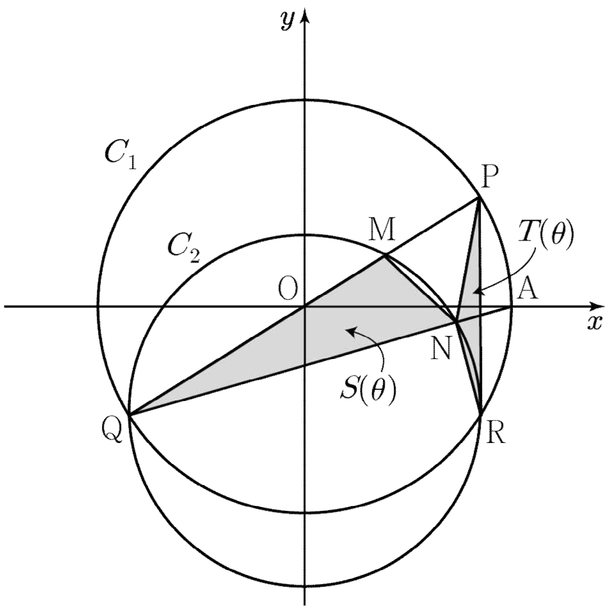


① $\frac{\pi^2}{2}$ ② $\frac{3}{4}\pi^2$ ③ π^2

④ $\frac{5}{4}\pi^2$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi^2$

[출처] 2018 모의_공공 교육청 고3 07월 21

47. 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 O(0, 0)이고 점 A(1, 0)을 지나는 원 C_1 위의 제 1사분면 위의 점을 P라 하자. 점 P를 원점에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q, x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 R라 하자. 선분 QR를 지름으로 하는 원 C_2와 두 선분 PQ, AQ와의 교점을 각각 M, N이라 하자. $\angle\mathrm{POA}=\theta$라 할 때, 두 삼각형 MQN, PNR의 넓이를 각각 $S(\theta)$, $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{\theta^2 \times S(\theta)}{T(\theta)}$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

[준킬러][미적] 3미분법1(빠른 정답)

준킬러미적 2023.01.06

1. [정답] ③
2. [정답] ②
3. [정답] ②
4. [정답] **3**
5. [정답] ①

6. [정답] ⑤
7. [정답] ②
8. [정답] 8
9. [정답] ⑤
10. [정답] ③

11. [정답] ④
12. [정답] **9**
13. [정답] ②
14. [정답] 3
15.[정답] **20**

16. [정답] ①
17. [정답] **40**
18. [정답] **61**
19. [정답] ⑤
20. [정답] ③

21. [정답] 18
22. [정답] 18
23. [정답] **30**
24. [정답] **48**
25. [정답] 16

26. [정답] 30
27. [정답] ①
28. [정답] 75
29. [정답] 30
30. [정답] ③

31. [정답] ②
32. [정답] ⑤
33. [정답] 250
34. [정답] 65
35. [정답] 16

36. [정답] **16**
37. [정답] 14
38. [정답] ③
39. [정답] ①
40. [정답] **9**

41. [정답] ④
42. [정답] ③
43. [정답] 50
44. [정답] ④
45. [정답] 18

46. [정답] ①
47. [정답] ②

[준킬러][미적] 3미분법1(해설)

준킬러미적 2023.01.06

1) [정답] ③

[해설]

함수 $y=e^{x}$ 위의 점 A의 좌표를 $(a,\ e^{a})$라 하고 직선 OA와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 α라고 하자.
마찬가지로 $y=-\ln x$ 위의 점 B의 좌표를 $(b,\ -\ln b)$라고 하고 직선 OB와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기를 β라고 하면 (나)에 의하여 $\alpha+\beta=90^{\circ}$이다.

한편, 함수 $y=-\ln x$의 그래프는 $y=e^{x}$의 그래프를 $y=x$에 대하여 대칭이동 한 후 x축에 대하여 대칭이동 한 것과 같으므로 점 $\mathrm{C}(\ln b,\ b)$는 $y=e^{x}$ 위의 점이고 $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}$이며 직선 OC와 y축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 β이다.

따라서 직선 OC와 x축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 $90^{\circ}-\beta=\alpha$이므로 세 점 O, A, C는 한 직선 위에 있다.

(가)에서 $\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{OB}}=2\overline{\mathrm{OC}}$이므로 $(2\ln b,\ 2b)=(a,\ e^{a})$이고 이를 연립하면 $a=2\ln 2$이다.

$\therefore$ 직선 OA의 기울기는 $\dfrac{e^{a}}{a}=\dfrac{4}{2\ln 2}=\dfrac{2}{\ln 2}$

2) [정답] ②

[해설]

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{4x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{2x}{4x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\lim_{x\to 0}\frac{2x}{4x}$$
$$=1\times\frac{2}{4}$$
$$=\frac{1}{2}$$

3) [정답] ②

[해설]

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

4) [정답] **3**

[해설]

$r(t)=t$이고, 원점 O를 지나는 원 C의 접선의 방정식은

$y=m(t)x$

점 P에서 접선까지의 거리는 원 C의 반지름의 길이와 같으므로

$$t=\frac{|\,t\times m(t)-te^{t}\,|}{\sqrt{\{m(t)\}^{2}+1}},\quad |\,m(t)-e^{t}\,|=\sqrt{\{m(t)\}^{2}+1}$$

$$\{m(t)-e^{t}\}^{2}=\{m(t)\}^{2}+1$$

$$e^{t}\times m(t)=\frac{e^{2t}-1}{2}$$

$$\therefore\ \lim_{t\to 0+}\frac{4r(t)-e^{t}\times m(t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{4t-\frac{e^{2t}-1}{2}}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\left(4-\frac{e^{2t}-1}{2t}\right)$$
$$=3$$

5) [정답] ①

[해설]

점 P의 좌표를 $(a,\ \ln a)\ (a>0)$라 하면 점 Q의 좌표는 $(a,\ e^{a})$

점 P는 직선 $x+y=t$ 위의 점이므로 $a+\ln a=t$

$\ln ae^{a}=t$ 이므로 $ae^{a}=e^{t}$

그러므로 삼각형 OHQ의 넓이 $S(t)$는

$$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{HQ}}$$
$$=\frac{1}{2}\times a\times e^{a}$$
$$=\frac{1}{2}ae^{a}$$
$$=\frac{1}{2}e^{t}$$

따라서

$$\lim_{t\to 0+}\frac{2S(t)-1}{t}=\lim_{t\to 0+}\frac{2\times\frac{1}{2}e^{t}-1}{t}=1$$

6) [정답] ⑤

[해설]

두 곡선 $y=\ln(x+1)$, $y=e^x-1$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 두 점 P, Q는 기울기가 -1인 직선 위의 점이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

두 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$, $\mathrm{Q}(b,\ a)$에 대하여

선분 PQ의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a+b}{2}\right)$

$\overline{\mathrm{PM}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$ $(\because a>b)$

$\therefore\ S(a)=\dfrac{\pi}{2}(a-b)^2$

$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{OM}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(a+b)$

$\therefore\ T(a)=\dfrac{\pi}{8}(a+b)^2$

$4T(a)-S(a)=2\pi ab$

$\qquad=2\pi a\ln(a+1)$

따라서 $\displaystyle\lim_{a\to 0+}\frac{4T(a)-S(a)}{\pi a^2}=\lim_{a\to 0+}\frac{2\ln(a+1)}{a}=2$

7) [정답] ②

[해설]

두 곡선 $y=e^{x-1}$과 $y=a^x$이 만나는 점의 x좌표는

방정식 $e^{x-1}=a^x$의 해이다.

양변에 $\dfrac{e}{a^x}$를 곱하면 $\left(\dfrac{e}{a}\right)^x=e$

$x=\dfrac{1}{\ln\frac{e}{a}}$이므로 $f(a)=\dfrac{1}{\ln\frac{e}{a}}$

$a-e=t$라 하면 $a=t+e$이고, $a\to e+$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\lim_{a\to e+}\frac{1}{(e-a)f(a)}=\lim_{a\to e+}\frac{\ln\frac{e}{a}}{(e-a)}=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln\frac{e}{t+e}}{-t}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\ln\left(1+\frac{t}{e}\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\ln\left\{\left(1+\frac{t}{e}\right)^{\frac{e}{t}}\right\}^{\frac{1}{e}}=\frac{1}{e}$$

8) [정답] 8

[해설]

$y=0$ 을 대입하면

$f(x)=f(x)f(0)+4f(x)+4f(0)+12$

$\{f(x)+4\}\{f(0)+3\}=0$

$f(0)=-3$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)+4f(x)+4f(h)+12-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)+3f(x)+4f(h)+12}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x)+4\}\{f(h)+3\}}{h}$$

$$=\{f(x)+4\}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+3}{h}$$

$$=\{f(x)+4\}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$=\{f(x)+4\}f'(0)=2\{f(x)+4\}$

$\therefore f'(\ln 2)=2\{f(\ln 2)+4\}=8$

[다른 풀이]

(가)에서 양변에 4를 더하여 인수분해하면

$f(x+y)+4=\{f(x)+4\}\{f(y)+4\}$

$f(x)+4=g(x)$라 하면 $g(x+y)=g(x)g(y)$ $\cdots$㉠

㉠에서 $y=0$이라 하면 $g(x)=g(x)g(0)$

$g(x)\{1-g(0)\}=0,\ g(0)=1$

$f'(x)=g'(x)$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(x)g(h)-g(x)}{h}$$

$$=g(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-1}{h}$$

$$=g(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(h)-g(0)}{h}$$

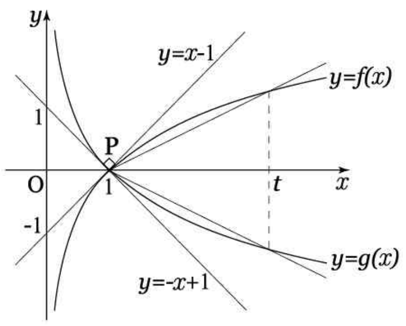
$=g(x)\,g'(0)$ $(\because g'(0)=f'(0)=2)$

$=2g(x)=2\{f(x)+4\}$

따라서 $f'(\ln 2)=2\{f(\ln 2)+4\}=2\times 4=8$

9) [정답] ⑤

[해설]



ㄱ. $\ln x = \ln\frac{1}{x}$에서 $x=1$

점 P의 좌표는 (1, 0) (참)

ㄴ. $f'(1)=1$, $g'(1)=-1$이므로

$f'(1)\times g'(1)=1\times(-1)=-1$

그러므로 두 곡선 위의 점 P에서의 각각의 접선은 서로 수직이다. (참)

ㄷ. $t>1$에서 함수 $f(t)$는 증가하고, $f'(t)=\frac{1}{t}$이고

$f'(1)=1$이므로

$t>1$인 t에 대하여 $0<\frac{f(t)-f(1)}{t-1}<1$

$t>1$에서 함수 $g(t)$는 감소하고, $g'(t)=-\frac{1}{t}$이고

$g'(1)=-1$이므로

$t>1$인 t에 대하여 $-1<\frac{g(t)-g(1)}{t-1}<0$

그러므로

$-1<\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\times\frac{g(t)-g(1)}{t-1}<0$

$-1<\frac{f(t)g(t)}{(t-1)^2}<0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

10) [정답] ③

[해설]

세 선분 OQ, AP, BQ의 길이를 θ로 나타내면

$\overline{OQ}=\cos\theta$, $\overline{AP}=\tan\theta$, $\overline{BQ}=\sin\theta$

$\overline{OQ}=2\,\overline{AP}\cdot\overline{BQ}$에서

$\cos\theta=2\tan\theta\cdot\sin\theta \Leftrightarrow \cos^2\theta=2\sin^2\theta \Leftrightarrow \cot^2\theta=2$

가 성립한다.

$\therefore \csc\theta\cdot\sec\theta\cdot\cot\theta$

$=\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}=\csc^2\theta=1+\cot^2\theta$

$=1+2=3$

11) [정답] ④

[해설]

$\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$에서 $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$이므로

$\sin\alpha=-\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=\frac{12}{13}$

$\sin(x+\alpha)=\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha$

$=\frac{12}{13}\sin x-\frac{5}{13}\cos x$

$\cos x\le\frac{12}{13}\sin x-\frac{5}{13}\cos x\le 2\cos x$

양변을 $\cos x$로 나누면

$1\le\frac{12}{13}\tan x-\frac{5}{13}\le 2$

$\frac{3}{2}\le\tan x\le\frac{31}{12}$에서 최댓값은 $\frac{31}{12}$, 최솟값은 $\frac{3}{2}$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{49}{12}$

12) [정답] 9

[해설]

$\tan\theta_1=1$, $\tan\theta_2=\frac{1}{2}$, $\tan\theta_p=\frac{1}{p}$, $\tan\theta_q=\frac{1}{q}$

$\tan(\theta_1-\theta_2)=\tan(\theta_p-\theta_q)$

$\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}=\frac{\tan\theta_p-\tan\theta_q}{1+\tan\theta_p\tan\theta_q}$

$\frac{1-\frac{1}{2}}{1+1\times\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{1+\frac{1}{p}\times\frac{1}{q}}$

$\frac{1}{3}=\frac{q-p}{pq+1}$, $(p-3)(q+3)=-10$

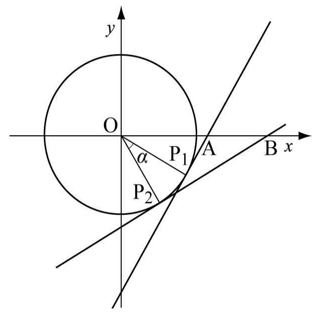
p, q는 자연수이고 $1<p<q$이므로

$(p-3, q+3)=(-1, 10)$

$p-3=-1$, $q+3=10p=2$, $q=7$ 따라서, $p+q=9$

13) [정답] ②

[해설]



두 직선 $y=x+a$, $y=\frac{1}{3}x+b$와 x축이 만나는 점을 각각 A, B라 하고 $\angle OAP_1=\theta_1$라 하면

$\tan\theta_1=1$이므로 $\theta_1=\frac{\pi}{4}$ 이다.

따라서 $\angle AOP_1=\frac{\pi}{4}$이다

같은 방법으로 $\angle OBP_2=\theta_2$, $\tan\theta_2=\frac{1}{3}$이고

$\overline{BP_2}=3r$이다. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=3$에 의해서 $\therefore \tan\alpha=\frac{1}{2}$

14) [정답] 3

[해설]
직선 $y=nx$가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_n, 직선 $y=(n+1)x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각을 θ_{n+1}이라 하면, $l_n=\theta_{n+1}-\theta_n$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} l_k &= l_1+l_2+\cdots+l_n\\ &=(\theta_2-\theta_1)+(\theta_3-\theta_2)+\cdots+(\theta_{n+1}-\theta_n)\\ &=\theta_{n+1}-\theta_1\end{aligned}$$

$\tan\theta_1=1$, $\tan\theta_{n+1}=n+1$이므로

$$\begin{aligned}\tan(\theta_{n+1}-\theta_1)&=\frac{\tan\theta_{n+1}-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_{n+1}\tan\theta_1}\\ &=\frac{(n+1)-1}{1+(n+1)\times 1}\\ &=\frac{n}{n+2}\end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^{n} l_k \geq \frac{\pi}{6}$이므로 $\tan(\theta_{n+1}-\theta_1)\geq \tan\frac{\pi}{6}$

$\frac{1}{n+2}\geq\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, $n\geq 1+\sqrt{3}$

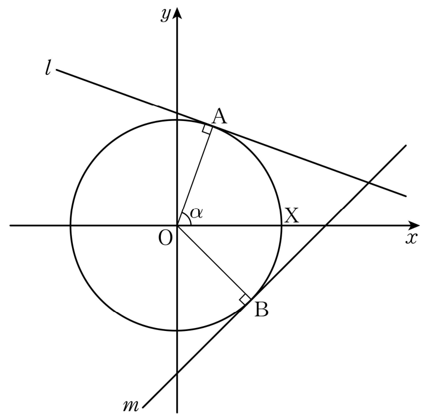
따라서 n의 최솟값은 3

15)[정답] 20

[해설]

두 직선 l과 m이 원 $x^2+y^2=1$과 접하는 점이 각각 A, B이므로 $\overleftrightarrow{OA}\perp l$, $\overleftrightarrow{OB}\perp m$

원 $x^2+y^2=1$이 x축의 양의 방향과 만나는 점을 X라 하고, $\angle AOX=\alpha$라 하자.



(ⅰ) 점 A가 제1사분면에 있고, 점 B가 제4사분면에 있을 때

직선 OA가 직선 l과 수직이므로 직선 OA의 기울기는 3이다. 따라서

$\tan\alpha=3$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

직선 OB가 직선 m과 수직이므로 직선 OB의 기울기는 -1이다.

따라서 $\angle XOB=\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned}\cos(\angle AOB)&=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}\\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)\\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{10}}{10}-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)\\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{5}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

(ⅱ) 점 A가 제1사분면에 있고, 점 B가 제2사분면에 있을 때

$\tan\alpha=3$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

직선 OB가 직선 m과 수직이므로 직선 OB의 기울기는 -1이다.

따라서 $\angle XOB=\frac{3}{4}\pi$

$\cos(\angle AOB)=\cos\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)$

$=\cos\frac{3}{4}\pi\cos\alpha+\sin\frac{3}{4}\pi\sin\alpha$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos\alpha+\sin\alpha)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}+\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

(ⅲ) 점 A가 제3사분면에 있고, 점 B가 제2사분면에 있을 때

$\cos(\angle\mathrm{AOB})=-\frac{\sqrt{5}}{5}$이다.

(ⅳ) 점 A가 제3사분면에 있고, 점 B가 제4사분면에 있을 때

$\cos(\angle\mathrm{AOB})=\frac{\sqrt{5}}{5}$이다.

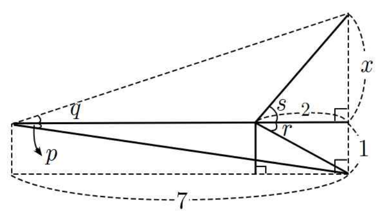
ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)로부터

$\cos(\angle\mathrm{AOB})=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\cos(\angle\mathrm{AOB})=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$100\cos^2(\angle\mathrm{AOB})=100\times\frac{1}{5}=20$

16) [정답] ①

[해설]



위의 그림에서 $\tan p=\frac{1}{7}$, $\tan q=\frac{x}{7}$이므로

$$\tan(p+q)=\frac{\frac{1}{7}+\frac{x}{7}}{1-\frac{1}{7}\cdot\frac{x}{7}}=\frac{7(x+1)}{49-x}$$

또, $\tan r=\frac{1}{2}$, $\tan s=\frac{x}{2}$이므로

$$\tan(r+s)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{x}{2}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2}}=\frac{2(x+1)}{4-x}$$

이 때 $a+b=\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}$이므로

$\tan\{(p+q)-(r+s)\}=\tan\frac{\pi}{4}$

$$\frac{\frac{2(x+1)}{4-x}-\frac{7(x+1)}{49-x}}{1+\frac{2(x+1)}{4-x}\cdot\frac{7(x+1)}{49-x}}=1$$

$$\frac{5x^2+75x+70}{15x^2-25x+210}=1$$

$\therefore x^2-10x+14=0$

위 방정식의 두 근을 $\alpha+\beta$라 하면 $\alpha+\beta=10$

이 때 $a=\alpha+1$, $b=\beta+1$이므로

$a+b=(\alpha+1)+(\beta+1)=10+2=12$

17) [정답] **40**

[해설]

선분 AC의 길이를 a라 하자. 점 A가 원점, $\overline{\mathrm{AB}}$를 x축 위에 오도록 직각삼각형ABC를 좌표평면 위에 놓으면 B(2, 0), C(0, a)이다.

세 점 $\mathrm{P}_1\left(\frac{5}{3}, \frac{a}{6}\right)$, $\mathrm{P}_2\left(\frac{4}{3}, \frac{a}{3}\right)$, $\mathrm{P}_5\left(\frac{1}{3}, \frac{5a}{6}\right)$ $\angle\mathrm{BAP}_1=\theta_1$,

$\angle\mathrm{BAP}_2=\theta_2$라 하면 $\tan\theta_1=\frac{a}{10}$, $\tan\theta_2=\frac{a}{4}$이므로

$\tan\alpha=\tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{6a}{40+a^2}$

$\tan\beta=\frac{2}{5a}$

$2\tan\alpha=3\tan\beta$에서

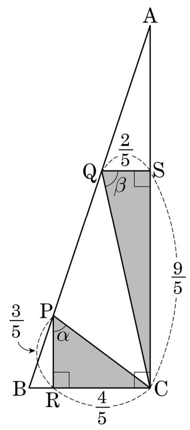
$\frac{12a}{40+a^2}=\frac{6}{5a}$이므로 $a^2=\frac{40}{9}$, $a=\frac{2\sqrt{10}}{3}$

삼각형 ABC의 넓이 $S=\frac{1}{2}\times2\times\frac{2\sqrt{10}}{3}$

따라서 $9S^2=40$

18) [정답] **61**

[해설]



점 P가 선분 AB를 4:1로 내분하는 점이므로

$\overline{PR}=\frac{1}{5}\overline{AC}=\frac{3}{5}$, $\overline{RC}=\frac{4}{5}\overline{BC}=\frac{4}{5}$

삼각형 PRC가 직각삼각형이므로 $\tan\alpha=\frac{\overline{RC}}{\overline{PR}}=\frac{4}{3}$

점 Q가 선분 AB를 2:3으로 내분하는 점이므로

$\overline{QS}=\frac{2}{5}\overline{BC}=\frac{2}{5}$, $\overline{SC}=\frac{3}{5}\overline{AC}=\frac{9}{5}$

삼각형 QCS가 직각삼각형이므로 $\tan\beta=\frac{\overline{SC}}{\overline{QS}}=\frac{9}{2}$

따라서

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\frac{9}{2}-\frac{4}{3}}{1+\frac{9}{2}\times\frac{4}{3}}=\frac{\frac{27-8}{6}}{\frac{6+36}{6}}=\frac{19}{42}$$

이므로 $p+q=42+19=61$이다.

19) [정답] ⑤

[해설]

$\overline{CD}=a(a>0)$라 하면 직각삼각형 CED에서

$\overline{DE}=\sqrt{5-a^2}$

이때 $\overline{AD}=4\overline{DE}$이므로

$\overline{AD}=4\sqrt{5-a^2}$

직각삼각형 CAD에서

$(2\sqrt{5})^2=a^2+(4\sqrt{5-a^2})^2$

$a^2=4 \therefore a=2(\because a>0)$

따라서 $\overline{DE}=1$, $\overline{AD}=4$이므로 직각삼각형 ABD에서

$\overline{BD}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$\therefore \sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$

삼각형 CED에서

$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

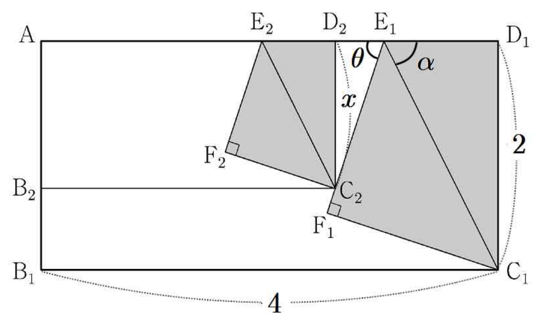
$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{5}\times\frac{1}{\sqrt{5}}$

$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

20) [정답] ③

[해설]



선분 AD_1을 3 : 1로 내분하는 점을 E_1이므로 $\overline{D_1E_1}=1$

위의 그림에서

$(\triangle C_1D_1E_1$의 넓이$)=\frac{1}{2}\times\overline{D_1E_1}\times\overline{C_1D_1}$

$=\frac{1}{2}\times1\times2$

$=1$ …… ㉠

삼각형 $C_1D_1E_1$에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{E_1C_1}^2=\overline{E_1D_1}^2+\overline{C_1D_1}^2$

$=1^2+2^2=5$

그런데 $\triangle E_1F_1C_1$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{E_1F_1}=\overline{C_1F_1}=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\therefore$ $(\triangle E_1F_1C_1$의 넓이$)=\frac{1}{2}\times\overline{E_1F_1}\times\overline{C_1F_1}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$=\frac{5}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $S_1=1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$

$\overline{D_2C_2}=x$, $\angle D_1E_1C_1=\alpha$, $\angle D_2E_1C_2=\theta$라 하면 조건에서

$\overline{AB_2}$: $\overline{AD_2}=1$: 2이므로 $\overline{AD_2}=2x$

즉, $\overline{AE_1}=3$이고, $\overline{AD_2}=2x$이므로 $\overline{D_2E_1}=3-2x$

$$\therefore \tan\alpha=2,\ \tan\theta=\frac{x}{3-2x}$$

그런데 $\theta+\alpha+\frac{\pi}{4}=\pi$이므로 $\theta=\frac{3}{4}\pi-\alpha$

즉. $\tan\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)=\frac{x}{3-2x}$

$$\tan\left(\frac{3}{4}\pi-\alpha\right)=\frac{\tan\frac{3}{4}\pi-\tan\alpha}{1+\tan\frac{3}{4}\pi\tan\alpha}$$

$$=\frac{-1-2}{1-2}=3$$

이므로 $\frac{x}{3-2x}=3$, $x=9-6x$, $7x=9$

$$\therefore x=\frac{9}{7}$$

따라서 $S_2=\frac{1}{2}\times\frac{9}{7}\times\frac{9}{14}+\frac{5}{4}\times\frac{9}{14}\times\frac{9}{14}=\frac{9}{4}\left(\frac{9}{14}\right)^2$

즉, 수열 $\{S_n\}$은 초항이 $\frac{9}{4}$이고 공비가 $\left(\frac{9}{14}\right)^2$인 등비급수이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{9}{4}}{1-\left(\frac{9}{14}\right)^2}=\frac{441}{115}$$

21) [정답] 18

[해설]

삼각형 BCD는 이등변삼각형이므로

$\angle CBD=\angle DCB=\alpha$이고 $\angle CDA=2\alpha$

삼각형 ADC에서 $\beta=\frac{\pi}{3}-2\alpha$

$$\cos 2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$=2\cos^2\alpha-1=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

$\sin^2 2\alpha=1-\cos^2 2\alpha=\frac{28}{49}$이고

$0<2\alpha<\pi$이므로 $\sin 2\alpha=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

$$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\beta=\tan\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)$$
$$=\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan 2\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{3}\times\tan 2\alpha}$$
$$=\frac{\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1+\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

따라서 $54\sqrt{3}\times\tan\beta=18$

22) [정답] 18

[해설]

두 직선 l_1, l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$m_1=\tan\alpha$, $m_2=\tan\beta$이고

$0<m_1<m_2<1$에서 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$이다.

직선 l_3은 직선 l_1을 y축에 대하여 대칭이동한 직선이므로

$\angle CBA=2\alpha$, $\angle BAC=\beta-\alpha$

$\angle ACB=\pi-2\alpha-(\beta-\alpha)=\pi-(\alpha+\beta)$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{9}{\sin 2\alpha}=\frac{12}{\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}}=15\cdots\cdots ㉠$$

$\sin 2\alpha=\frac{3}{5}$이고 $0<2\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos 2\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$, $\tan 2\alpha=\frac{3}{4}$

$\tan 2\alpha=\tan(\alpha+\alpha)=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{3}{4}$

$3\tan^2\alpha+8\tan\alpha-3=0$

$(3\tan\alpha-1)(\tan\alpha+3)=0$

$0<\alpha<\frac{\pi}{4}$이므로 $m_1=\tan\alpha=\frac{1}{3}$

㉠에서 $\sin\{\pi-(\alpha+\beta)\}=\sin(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$이고

$0<\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$, $\tan(\alpha+\beta)=\frac{4}{3}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{3}+\tan\beta}{1-\frac{1}{3}\tan\beta}=\frac{4}{3}$$

$1+3\tan\beta=4-\frac{4}{3}\tan\beta$

$\frac{13}{3}\tan\beta=3$에서 $m_2=\tan\beta=\frac{9}{13}$

따라서 $78\times m_1\times m_2=78\times\frac{1}{3}\times\frac{9}{13}=18$

23) [정답] 30

[해설]

원의 중심을 O라 하면 $\angle POB=2\theta$

직선 OP와 선분 AC가 만나는 점을 R, $\angle BAC=\alpha$라 하면

$\angle PRQ=\alpha+2\theta$ 이고 $\tan\alpha=\frac{1}{3}$

$\angle QPR=\frac{\pi}{2}$, $\angle PQA=\frac{\pi}{4}$ 이므로 $\angle PRQ=\alpha+2\theta=\frac{\pi}{4}$

$$\tan2\theta=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\tan\alpha}{1+1\cdot\tan\alpha}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}$$

따라서 $60\tan2\theta=30$

24) [정답] 48

[해설]

$\overline{OA}=4$, $\overline{AD}=4\tan\frac{\theta}{2}$이므로

$\square OADB=2\times\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{AD}=16\tan\frac{\theta}{2}=8$

$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore \square OAEC=2\times\frac{1}{2}\times4\times4\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

$$=16\times\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\theta}{2}}=16\times\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$$

$=48$

25) [정답] 16

[해설]

$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{a_n}{2+a_n}$에서

$$a_n=\frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{n}\left(1+\sin\frac{\pi}{n}\right)}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$$ 이고

$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{b_n}{2-b_n}$에서

$$b_n=\frac{2\sin\frac{\pi}{n}}{1+\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\sin\frac{\pi}{n}\right)}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$$ 이므로

$$a_n+b_n=\frac{4\sin\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}},\quad a_n-b_n=\frac{4\sin^2\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$$

$n\to\infty$일 때, $\frac{\pi}{n}\to0+$이므로 $\frac{\pi}{n}=\theta$라 하면

$$\frac{1}{\pi^3}\lim_{n\to\infty}n^3(a_n+b_n)(a_n-b_n)$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{\theta^3}\cdot\frac{4\sin\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{4\sin^3\theta}{\cos^2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0}16\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\cdot\frac{1}{\cos^4\theta}$$

$=16$

26) [정답] 30

[해설]

점 P의 좌표를 $P(\cos\theta, \sin\theta)$라고 하면

$Q(\ln(\sin\theta+1), \sin\theta)$, $R(\ln(\sin\theta+1), 0)$ 이고

이때 직선 OP의 방정식은 $y=\tan\theta x$이므로 점 T의 좌표는

$T(\ln(\sin\theta+1), \tan\theta\ln(\sin\theta+1))$이다.

따라서 삼각형 ORT의 넓이

$S(\theta)=\frac{1}{2}\tan\theta\{\ln(1+\sin\theta)\}^2$이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta\{\ln(1+\sin\theta)\}^2}{\theta^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta}{\theta}\lim_{\theta\to0+}\frac{\{\ln(1+\sin\theta)\}^2}{\theta^2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta}{\theta}\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\{\ln(1+\sin\theta)\}}{\theta}\right\}^2$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\theta\to0+}\frac{\tan\theta}{\theta}\lim_{\theta\to0+}\left[\ln(1+\sin\theta)^{\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}}\right]^2$$

$=\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}=a$

$\therefore\ 60a=60\times\frac{1}{2}=30$

27) [정답] ①

[해설]
두 삼각형 AOB, COD의 넓이를 구할 때, 두 삼각형의 밑변을 각각 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{CD}}$로 잡으면 점 O에서 직선 $x=t$에 이르는 거리가 두 삼각형의 높이이므로 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{CD}}}$이다.

$$\therefore\ \lim_{t\to0+}\frac{S_1}{S_2}=\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{CD}}}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{1-\frac{t^2}{2}-\sqrt{1-t^2}}{\sin^4 t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{t^4}{4}}{\sin^4 t\left(1-\frac{t^2}{2}+\sqrt{1-t^2}\right)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{1}{\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4}\cdot\frac{1}{4\left(1-\frac{t^2}{2}+\sqrt{1-t^2}\right)}$$

$$=1\cdot\frac{1}{4\cdot 2}=\frac{1}{8}$$

28) [정답] 75

[해설]
선분 PQ의 수직이등분선이 y축이므로 $f(t)$는 선분 PR을 수직이등분하는 직선의 y절편이다.
$\mathrm{P}(t,\ \cos 2t)$, $\mathrm{R}(0,\ 1)$이므로 선분 PQ의 중점은 $\left(\frac{t}{2},\ \frac{\cos 2t+1}{2}\right)$이고

선분 PQ의 기울기는 $\frac{\cos 2t-1}{t}$이다. 따라서 선분 PR을 수직이등분하는 직선의 방정식은

$$y=-\frac{t}{\cos 2t-1}\left(x-\frac{t}{2}\right)+\frac{\cos 2t+1}{2}$$

$$\therefore\ f(t)=-\frac{t}{\cos 2t-1}\left(0-\frac{t}{2}\right)+\frac{\cos 2t+1}{2}$$

$$=\frac{t^2}{2(\cos 2t-1)}+\frac{\cos 2t+1}{2}$$

$$=\frac{t^2(\cos 2t+1)}{2(\cos^2 2t-1)}+\frac{\cos 2t+1}{2}$$

$$=-\frac{t^2(\cos 2t+1)}{2\sin^2 2t}+\frac{\cos 2t+1}{2}$$

$$\therefore\ \alpha=\lim_{t\to0+}f(t)$$

$$=\lim_{t\to0+}\left(-\frac{t^2(\cos 2t+1)}{2\sin^2 2t}+\frac{\cos 2t+1}{2}\right)$$

$$=\lim_{t\to0+}\left(-\left(\frac{2t}{\sin 2t}\right)^2\cdot\frac{\cos 2t+1}{8}+\frac{\cos 2t+1}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$$

$\therefore\ 100\alpha=75$

29) [정답] 30

[해설]
$\overline{\mathrm{OP}}=1$이고 $\angle\mathrm{POB}=\theta$이므로

$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$

점 P와 점 Q의 y좌표가 같으므로 점 Q의 x좌표는

$\ln(x+1)=\sin\theta$에서

$x+1=e^{\sin\theta},\qquad x=e^{\sin\theta}-1$

$\therefore \mathrm{Q}(e^{\sin\theta}-1,\ \sin\theta)$

따라서

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QP}}\times\overline{\mathrm{HO}}$$

$$=\frac{1}{2}(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1)\sin\theta$$

$L(\theta)=\overline{\mathrm{HQ}}=e^{\sin\theta}-1$

이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{L(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\sin\theta}{e^{\sin\theta}-1}\times(\cos\theta-e^{\sin\theta}+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$$

즉 $k=\frac{1}{2}$이므로 $\quad 60k=60\times\frac{1}{2}=30$

30) [정답] ③

[해설]
점 P와 점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′이라 하면 $\overline{\mathrm{OP'}}=t$, $\overline{\mathrm{OQ'}}=f(t)$

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+t^2\sin^2 t}=t\sqrt{1+\sin^2 t}$

$\overline{OQ}=\overline{OP}-\overline{PQ}=t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)$

삼각형 OPP'과 삼각형 OQQ'은 서로 닮음이므로

$\overline{OP'}:\overline{OQ'}=\overline{OP}:\overline{OQ}$

$t:f(t)=t\sqrt{1+\sin^2 t}:t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)$에서

$$f(t)=\frac{t\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t^3}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{1+\sin^2 t}-1}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\left(\sqrt{1+\sin^2 t}-1\right)\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sin^2 t}{t^2\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\times\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}\left(\sqrt{1+\sin^2 t}+1\right)}$$

$$=1^2\times\frac{1}{\sqrt{1}\times\left(\sqrt{1}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

31) [정답] ②

[해설]

$a_n=\overline{C_{n-1}C_n}=\overline{AC_{n-1}}$이고,

$\triangle ABC$, $\triangle ABC_1$, $\cdots$ 직각삼각형이므로

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{a_1}$$

$$\therefore a_1=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{1}{a_2}$$

$$\therefore a_2=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}\right)}$$

$$\sin\frac{\pi}{24}=\frac{1}{a_3}$$

$$\therefore a_3=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{24}}=\frac{1}{\sin\left\{\frac{\pi}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}}$$

$$\vdots$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{\sin\left\{\frac{\pi}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$$

$$=\frac{1}{\sin\left\{\frac{\pi}{6}\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}}$$

$$=\frac{1}{\sin\left\{\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}}$$

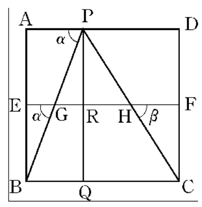
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\pi a_n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{\pi}{\sin\left\{\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}}{\sin\left\{\frac{\pi}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}}\cdot 3=3$$

32) [정답] ⑤

[해설]

아래 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 Q라 하고, $\overline{PQ}$와 $\overline{EF}$가 만나는 점을 R라 하자.



ㄱ. (참) $\overline{EG}=\overline{GR}$, $\overline{RH}=\overline{HF}$이므로

$\overline{GH}=\overline{GR}+\overline{RH}=\frac{1}{2}\overline{EF}=1$(일정)

ㄴ. (거짓) $\triangle PGH$에서 $\angle GPH+\alpha+\beta=180^\circ$

$\therefore$ $a+\beta=180^\circ-\angle GPH$

이때, 점 P의 위치에 따라 $\angle GPH$의 크기가 달라지고, $\angle GPH$의 크기가 달라지면 $\alpha+\beta$의 값이 달라진다.

ㄷ. (참) $\triangle ABP$에서 $\tan\alpha=\frac{2}{\overline{AP}}$이므로

$\overline{AP}=\frac{2}{\tan\alpha}=$2cotÿa

$$\therefore \lim_{a\to\frac{\pi}{2}}\frac{\overline{AP}}{\frac{\pi}{2}-a}=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cot a}{\frac{\pi}{2}-a}$$

$$=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\tan\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{\frac{\pi}{2}-a}=2$$

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ 이다.

33) [정답] 250

[해설]

[그림 2]의 도형의 넓이는 두 변의 길이가 20인 이등변 삼각형 n개의 넓이와 두 변의 길이가 10인 이등변삼각형 n개의 넓이의 합이다. 이때, 같은 두 변 사이의 끼인 각의 크기는 $\frac{2\pi}{2n}=\frac{\pi}{n}$이므로

$$S_n=n\cdot\frac{1}{2}\cdot 20^2\cdot\sin\frac{\pi}{n}+n\cdot\frac{1}{2}\cdot 10^2\cdot\sin\frac{\pi}{n}$$

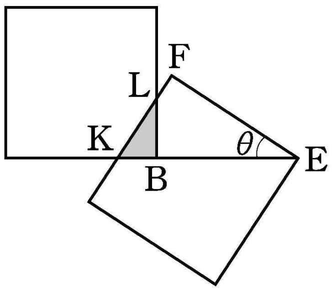
$$=250n\cdot\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\left(250n\cdot\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

$$=250\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}=250$$

34) [정답] 65

[해설]



$\frac{\overline{\mathrm{EF}}}{\overline{\mathrm{KE}}}=\cos\theta$이므로

$$\overline{\mathrm{KE}}=\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{KB}}=\frac{1}{\cos\theta}-1$$

또, $\angle\mathrm{BKL}=\frac{\pi}{2}-\theta$에서

$$\frac{\overline{\mathrm{BL}}}{\overline{\mathrm{KB}}}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{BL}}=\overline{\mathrm{KB}}\cdot\cot\theta$$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{KB}}\cdot\overline{\mathrm{BL}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\times\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)\cdot\cot\theta$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(1-\cos\theta)^2}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0}\frac{(1-\cos\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta^3}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{(1-\cos\theta)^2(1+\cos\theta)^2}{2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta^3(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^4\theta}{2\sin\theta\cos\theta\cdot\theta^3(1+\cos\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{2\cdot1\cdot2^2}=\frac{1}{8}$$

$$\therefore\ p^2+q^2=65$$

35) [정답] 16

[해설]

$\overline{\mathrm{AB}}=1$, $\angle\mathrm{A}=\theta$, $\angle\mathrm{B}=2\theta$이고

$\angle\mathrm{BCD}=\alpha$라 하면 $\angle\mathrm{ACD}=2\alpha$이므로

$\angle\mathrm{CDB}=\theta+2\alpha$, $\angle\mathrm{CDA}=2\theta+\alpha$이다.

$(\theta+2\alpha)+(2\theta+\alpha)=\pi$이므로

$$\therefore\ \alpha=\frac{\pi}{3}-\theta$$

사인법칙에 의해

(i) 삼각형 ADC에서

$$\frac{\overline{\mathrm{AD}}}{\sin2\alpha}=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\theta}$$

$$\overline{\mathrm{AD}}=\frac{\sin2\alpha}{\sin\theta}\cdot\overline{\mathrm{CD}} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

(ii) 삼각형 BDC에서

$$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin2\theta}$$

$$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{\sin\alpha}{\sin2\theta}\cdot\overline{\mathrm{CD}} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠과 ㉡에서

$\overline{\mathrm{AD}}+\overline{\mathrm{BD}}=1$이므로

$$\overline{\mathrm{CD}}\cdot\left(\frac{\sin2\alpha}{\sin\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin2\theta}\right)=1$$

$$\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{\frac{\sin2\alpha}{\sin\theta}+\frac{\sin\alpha}{\sin2\theta}}$$

$$=\frac{1}{\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\theta}+\frac{\sin\alpha}{2\sin\theta\cos\theta}}$$

$$=\frac{\sin\theta}{\sin\alpha}\times\frac{1}{2\cos\alpha+\frac{1}{2\cos\theta}}$$

그런데,

$$\lim_{\theta\to0+}\sin\alpha=\lim_{\theta\to0+}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lim_{\theta\to0+}\cos\alpha=\lim_{\theta\to0+}\cos\left(\frac{\pi}{3}-\theta\right)=\frac{1}{2}$$

이므로

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{\sin\alpha}\times\frac{1}{2\cos\alpha+\frac{1}{2\cos\theta}}$$

$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ 27a^2=27\left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\right)^2=16$$

36) [정답] **16**

[해설]

$\overline{AC}=x$라 하면 $\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AD}=\overline{AP}=x$이다.

이등변삼각형 ABC에서 $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{2}{x}$이므로 $x=\dfrac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}$

따라서 삼각형 BDP의 넓이를 $S(\theta)$는

$S(\theta)=\triangle ADP-\triangle ABP$

$=\frac{1}{2}\times x\times x\times\sin 2\theta-\frac{1}{2}\times 4\times x\times\sin 2\theta$

$=\dfrac{2\sin 2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}-\dfrac{4\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$

$\lim\limits_{\theta\to 0+}(\theta\times S(\theta))=\lim\limits_{\theta\to 0+}\left(\dfrac{2\theta\sin 2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}-\dfrac{4\theta\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$

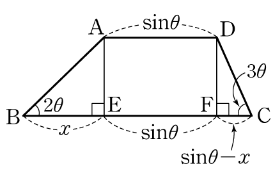
$=\lim\limits_{\theta\to 0+}\left(2\times\dfrac{\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}-4\theta\times\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$

$=2\times 2\times 4-4\times 0\times 4=16$

37) [정답] 14

[해설]

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 E, F라 하자.



$\overline{BE}=x$라 하면

$\overline{AE}=x\tan 2\theta$

$\overline{AE}=\overline{DF}$에서

$x\tan 2\theta=(\sin\theta-x)\tan 3\theta$

$\therefore x=\dfrac{\sin\theta\tan 3\theta}{\tan 2\theta+\tan 3\theta}$

사다리꼴 ABCD의 넓이는

$S(\theta)=\frac{1}{2}(\sin\theta+2\sin\theta)\times x\tan 2\theta$

$=\frac{1}{2}\times 3\sin\theta\times\dfrac{\sin\theta\tan 3\theta}{\tan 2\theta+\tan 3\theta}\times\tan 2\theta$

$=\frac{3}{2}\times\dfrac{\sin^2\theta\tan 2\theta\tan 3\theta}{\tan 2\theta+\tan 3\theta}$

이므로

$\lim\limits_{\theta\to 0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^3}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0+}\left\{\frac{3}{2}\times\dfrac{\sin^2\theta\tan 2\theta\tan 3\theta}{\theta^3(\tan 2\theta+\tan 3\theta)}\right\}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0+}\left\{\frac{3}{2}\times\dfrac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\dfrac{\tan 2\theta}{2\theta}\times 2\times\dfrac{\tan 3\theta}{3\theta}\times 3\right.$

$\left.\times\dfrac{\theta}{\tan 2\theta+\tan 3\theta}\right\}$

$=\lim\limits_{\theta\to 0+}\left\{9\times\dfrac{\sin^2\theta}{\theta^2}\times\dfrac{\tan 2\theta}{2\theta}\times\dfrac{\tan 3\theta}{3\theta}\right.$

$\left.\times\dfrac{1}{2\times\dfrac{\tan 2\theta}{2\theta}+3\times\dfrac{\tan 3\theta}{3\theta}}\right\}$

$=9\times 1\times 1\times 1\times\frac{1}{5}$

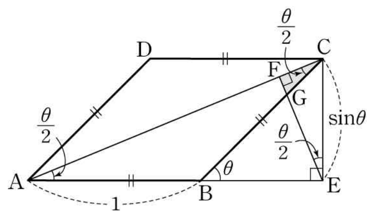
$=\frac{9}{5}$

따라서 $p=5$, $q=9$이므로

$p+q=14$

38) [정답] ③

[해설]



$\angle DAB=\angle CBE=\theta$이므로

$\angle BAC=\angle BCA=\angle CEF=\frac{\theta}{2}$

또 $\triangle BCE$에서 $\overline{CE}=\sin\theta$이므로 $\triangle CEF$에서

$\overline{CF}=\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}$

$\triangle CFG$에서

$\overline{FG}=\overline{CF}\times\tan\frac{\theta}{2}$

$=\sin\theta\times\sin\frac{\theta}{2}\times\tan\frac{\theta}{2}$

$\therefore S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{CF}\times\overline{FG}$

$=\frac{1}{2}\times\sin^2\theta\times\sin^2\frac{\theta}{2}\times\tan\frac{\theta}{2}$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{1}{16}$$

39) [정답] ①

[해설]

점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 BED와 삼각형 DEH는 닮음이므로

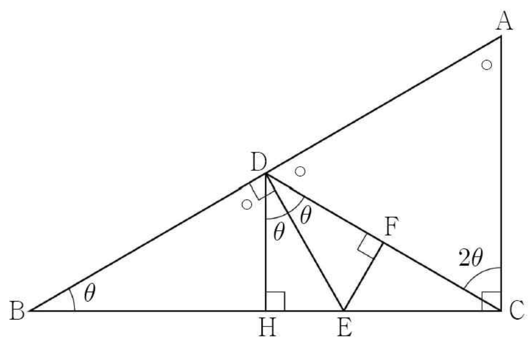
$\angle\mathrm{EBD}=\angle\mathrm{EDH}=\theta$

선분 AC와 선분 DH는 서로 평행하므로

$\angle\mathrm{ACD}=\angle\mathrm{CDH}=2\theta$

$\angle\mathrm{DAC}=\angle\mathrm{CDA}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$이므로 삼각형 CAD는 $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CD}}$인 이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=4$이므로 $\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{CD}}=4\sin\theta$



삼각형 DHC에서

$$\overline{\mathrm{DH}}=\overline{\mathrm{CD}}\cos2\theta=4\sin\theta\cos2\theta$$

삼각형 DHE에서

$$\overline{\mathrm{DE}}=\frac{\overline{\mathrm{DH}}}{\cos\theta}=4\tan\theta\cos2\theta$$

점 E에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 F라 할 때,

$$\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{DE}}\sin\theta$$

삼각형 CDE의 넓이

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times\overline{\mathrm{EF}}$$

$$=8\sin^2\theta\tan\theta\cos2\theta$$

따라서

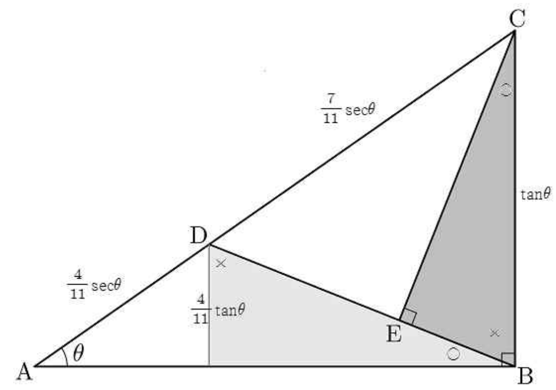
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\sin^2\theta\tan\theta\cos2\theta}{\theta^3}$$

$$=8\times\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\left(\frac{\tan\theta}{\theta}\right)\times\cos2\theta\right\}$$

$$=8$$

40) [정답] **9**

[해설]



그림에서 삼각형 BCE, BDM은 닮음이고,

$\overline{\mathrm{BC}}=\tan\theta,\ \overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{1}{11}\sqrt{49+16\tan^2\theta}$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{11}\times\frac{4}{11}\tan\theta\times\left(\frac{11^2\tan^2\theta}{49+16\tan^2\theta}\right)$$

$$=\frac{14\tan^3}{49+16\tan^2\theta}$$

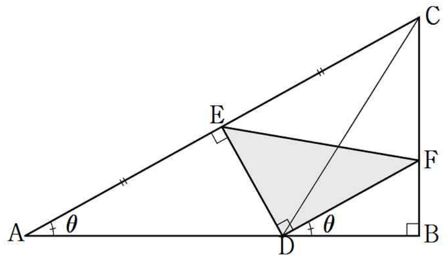
$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\frac{14}{49+0}=\frac{2}{7}$$

$\therefore 2+7=9$

41) [정답] ④

[해설]

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로 삼각형 ADC는 이등변삼각형이고, $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{CE}}$이다. 또한, 선분 AC와 선분 DF가 평행하므로 $\angle\mathrm{BDF}=\theta$이고, 삼각형 DEF는 직각삼각형이다.



삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=\sec\theta$이므로 $\overline{AE}=\frac{1}{2}\sec\theta$

삼각형 AED에서

$$\overline{DE}=\overline{AE}\times\tan\theta=\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta,$$

$$\overline{AD}=\overline{AE}\times\sec\theta=\frac{1}{2}\sec^2\theta$$

이므로 $\overline{DB}=1-\frac{1}{2}\sec^2\theta$

삼각형 DBF에서 $\overline{DF}=\overline{DB}\times\sec\theta=\sec\theta\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\theta\right)$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{DF}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\times\sec\theta\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\theta\right)$$
$$=\frac{1}{4}\sec^2\theta\tan\theta\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\theta\right)$$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{1}{4}\sec^2\theta\tan\theta\left(1-\frac{1}{2}\sec^2\theta\right)}{\theta}$$
$$=\frac{1}{8}$$

42) [정답] ③

[해설]

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos\theta=5-4\cos\theta$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{5-4\cos\theta}$

직선 AE가 $\angle BAC$의 이등분선이므로

$\overline{BE}:\overline{CE}=\overline{AB}:\overline{AC}=1:\sqrt{5-4\cos\theta}$에서

$\overline{BE}=\frac{1}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}\times\overline{BC}=\frac{2}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$

그러므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BE}\times\sin(\angle CBA)$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}\times\sin\theta$$
$$=\frac{\sin\theta}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}$$

두 직선 AB, DM이 서로 평행하므로

$\angle CDM=\theta$, $\angle BAE=\angle DFE$

이다. 이때 $\angle BAE=\angle FAC$이므로 삼각형 AMF는 이등변삼각형이다.

점 M은 선분 AC의 중점이므로

$\overline{FM}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}}{2}$이고

$\overline{BD}=\overline{CD}=1$, $\overline{DM}=\frac{1}{2}$

그러므로 $\overline{DF}=\overline{FM}-\overline{DM}=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{2}$

$\angle FDC=\pi-\angle CDM=\pi-\theta$이므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times\overline{DF}\times\sin(\angle FDC)$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{2}\times\sin(\pi-\theta)$$
$$=\frac{\sqrt{5-4\cos\theta}-1}{4}\times\sin\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\sin\theta}{4}\left(\sqrt{5-4\cos\theta}-1\right)}{\theta^2\times\frac{\sin\theta}{1+\sqrt{5-4\cos\theta}}}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\left(\sqrt{5-4\cos\theta}-1\right)\left(\sqrt{5-4\cos\theta}+1\right)}{4\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(5-4\cos\theta)-1}{4\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\frac{1}{2}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

43) [정답] 50

[해설]

$P(\cos\theta, \sin\theta)$이므로 직선 AP의 방정식은

$$y=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}x+1$$

위 직선의 x절편은

$$\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

이므로 점 R의 좌표는 $\left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}, 0\right)$이다.

$$\Delta ORP=\frac{1}{2}\times\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\times\sin\theta$$

$\triangle OQP = \dfrac{1}{2} \times 1 \times \tan\theta$

이므로

$\triangle PQR = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta} - \tan\theta\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right\}$

$= \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{\sin\theta\cos\theta(1+\sin\theta) - \sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}\right\}$

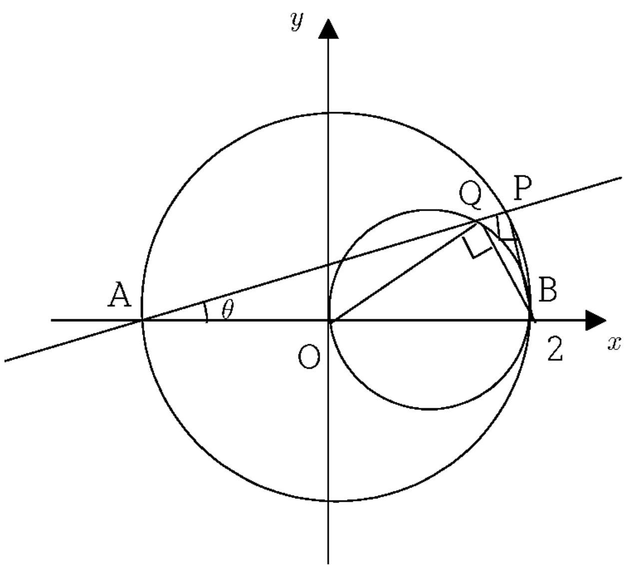
$= \dfrac{\sin^2\theta}{2\cos\theta}$

$\therefore\ a = \lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{\theta^2} = \lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{\sin^2\theta}{2\theta^2} \cdot \dfrac{1}{\cos\theta} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ 100a = 50$

44) [정답] ④

[해설]



그림에서 B(2, 0)라 하면

$\overline{AP} = 4\cos\theta$, $\overline{BP} = 4\sin\theta$

이고 $\overline{OQ} = a$, $\overline{BQ} = b$, $\overline{PQ} = x$라 하면

$a^2 + b^2 = 4 \cdots\cdots$ ㉠

$b^2 = x^2 + (4\sin\theta)^2 = x^2 + 16\sin^2\theta$

$a^2 = 2^2 + (4\cos\theta - x)^2 - 2 \times 2 \times (4\cos\theta - x)\cos\theta$

$= 4 + (16\cos^2\theta - 8\cos\theta x + x^2) - 16\cos^2\theta + 4\cos\theta x$

$= x^2 - 4\cos\theta x + 4$

따라서, ㉠에 대입하면

$(x^2 - 4\cos\theta x + 4) + (x^2 + 16\sin^2\theta) = 4$

$x^2 - 2\cos\theta x + 8\sin^2\theta = 0$

$\therefore\ x = \overline{PQ} = \cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - 8\sin^2\theta}$

$(\because 0 < \cos\theta < 1)$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{\overline{PQ}}{\theta^2}$

$= \lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - 8\sin^2\theta}}{\theta^2}$

$= \lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{8\sin^2\theta}{\theta^2\left(\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - 8\sin^2\theta}\right)}$

$= \lim\limits_{\theta \to 0+} 8\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2 \times \dfrac{1}{\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - 8\sin^2\theta}}$

$= 8 \times 1^2 \times \dfrac{1}{2} = 4$

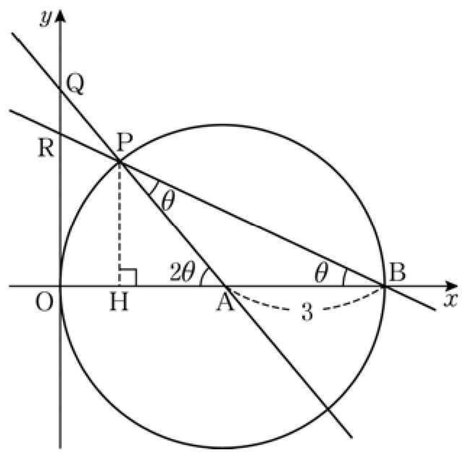
45) [정답] 18

[해설]

$\angle PBO = \theta$이므로 $\angle PAO = 2\theta$이다.

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AP} = 3$,

$\overline{AH} = 3\cos 2\theta$, $\overline{HO} = 3 - 3\cos 2\theta$이다.



$\overline{OA} = 3$, $\angle PAO = 2\theta$이므로

$\overline{OQ} = 3\tan 2\theta$

$\overline{OB} = 6$, $\angle PBO = \theta$이므로

$\overline{OR} = 6\tan\theta$

$\overline{RQ} = \overline{OQ} - \overline{OR}$

$= 3\tan 2\theta - 6\tan\theta$

$\overline{HO} = 3 - 3\cos 2\theta$이므로

$S(\theta) = \dfrac{1}{2} \times \overline{RQ} \times \overline{HO}$

$= \dfrac{1}{2}(3\tan 2\theta - 6\tan\theta)(3 - 3\cos 2\theta)$

$= \dfrac{9}{2}(\tan 2\theta - 2\tan\theta)(1 - \cos 2\theta)$

$= 9\left(\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} - 2\tan\theta\right)\sin^2\theta$

$= \dfrac{18\tan^3\theta\sin^2\theta}{1-\tan^2\theta}$

따라서

$\lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{S(\theta)}{\theta^5} = \lim\limits_{\theta \to 0+} \dfrac{18\tan^3\theta\sin^2\theta}{\theta^5(1-\tan^2\theta)}$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{18}{1-\tan^2\theta}\times\frac{\tan^3\theta}{\theta^3}\times\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}\right)$$

$$=18\times1\times1=18$$

[다른 풀이]

$\triangle PAH \backsim \triangle QAO$이므로

$\overline{AP}:\overline{PQ}=\overline{AH}:\overline{HO}$

$3:\overline{PQ}=3\cos2\theta:3-3\cos2\theta$이므로

$$\overline{PQ}=\frac{3(3-3\cos2\theta)}{3\cos2\theta}$$

또, $\triangle PBH \backsim \triangle RBO$이므로

$\overline{BP}:\overline{PR}=\overline{BH}:\overline{HO}$

$6\cos\theta:\overline{PR}=3+3\cos2\theta:3-3\cos2\theta$이므로

$$\overline{PR}=\frac{6\cos\theta(3-3\cos2\theta)}{3+3\cos2\theta}$$

$\angle QPR=\angle APB=\angle PBA=\theta$이므로

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PR}\times\overline{PQ}\times\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{6\cos\theta(3-3\cos2\theta)}{(3+3\cos2\theta)}\times\frac{3(3-3\cos2\theta)}{3\cos2\theta}\times\sin\theta$$

$$=\frac{9\cos\theta(1-\cos2\theta)^2\sin\theta}{(1+\cos2\theta)\cos2\theta}$$

$$=\frac{9\cos\theta(2\sin^2\theta)^2\sin\theta}{(1+\cos2\theta)\cos2\theta}$$

$$=\frac{36\cos\theta\sin^5\theta}{(1+\cos2\theta)\cos2\theta}$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^5}=\lim_{\theta\to0+}\frac{36\cos\theta\sin^5\theta}{\theta^5(1+\cos2\theta)\cos2\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{36\cos\theta}{(1+\cos2\theta)\cos2\theta}\times\frac{\sin^5\theta}{\theta^5}\right\}$$

$$=\frac{36}{2\times1}\times1$$

$$=18$$

46) [정답] ①

[해설]

$\angle POQ=\theta$로 놓으면 $\pi=\overset{\frown}{PQ}=2^n\theta$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{2^n}$

점 Q의 좌표는 $\left(2^n\cos\dfrac{\pi}{2^n},\ 2^n\sin\dfrac{\pi}{2^n}\right)$이므로

$\overline{HP}=2^n-2^n\cos\dfrac{\pi}{2^n}$이다.

$$\lim_{n\to\infty}(\overline{OQ}\times\overline{HP})=\lim_{n\to\infty}\left\{2^n\times2^n\left(1-\cos\frac{\pi}{2^n}\right)\right\}$$

이때 $\dfrac{1}{2^n}=t$로 놓으면 $n\to\infty$일 때, $t\to0+$이고

$$\lim_{n\to\infty}4^n\left(1-\cos\frac{\pi}{2^n}\right)=\lim_{t\to0+}\frac{1-\cos\pi t}{t^2}$$

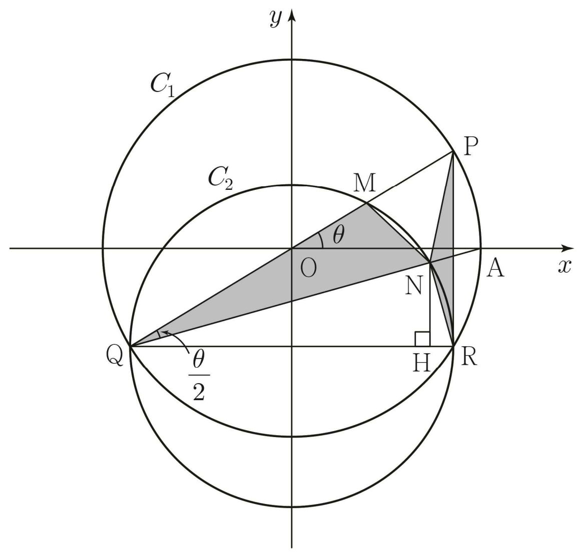
$$=\lim_{t\to0+}\frac{(1-\cos\pi t)(1+\cos\pi t)}{t^2(1+\cos\pi t)}$$

$$=\pi^2\lim_{t\to0+}\left(\frac{\sin^2\pi t}{\pi^2t^2}\times\frac{1}{1+\cos\pi t}\right)$$

$$=\pi^2\times1\times\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{2}$$

47) [정답] ②

[해설]



원 C_1 위의 점 P에 대하여 $\overset{\frown}{PA}=\overset{\frown}{AR}$ 이므로

$\angle PQA=\angle AQR=\dfrac{\theta}{2}$

$\angle PRQ=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$\overline{PR}=2\sin\theta$, $\overline{QR}=2\cos\theta$

$\angle QMR=\angle QNR=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로

$\overline{QM}=2\cos\theta\cos\theta$, $\overline{QN}=2\cos\theta\cos\dfrac{\theta}{2}$

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{QM}\times\overline{QN}\times\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\times2\cos^2\theta\times2\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$$

$$=2\cos^3\theta\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}$$

점 N에서 선분 QR에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PR}\times\overline{HR}$$

$$\overline{HR}=\overline{QR}-\overline{QH}=2\cos\theta-\overline{QN}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\cos\theta - 2\cos\theta\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\cos\theta\left(1-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 2\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$T(\theta) = \frac{1}{2}\times 2\sin\theta\times 2\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$= 2\sin\theta\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^2\times S(\theta)}{T(\theta)} = \lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^2\times 2\cos^3\theta\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\theta\cos\theta\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= \lim_{\theta\to 0+}\left(\cos^2\theta\cos\frac{\theta}{2}\right)\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{\theta^2}{\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$= 1\times\lim_{\theta\to 0+}\left(2\times\frac{\theta}{\sin\theta}\times\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right) = 2$$