「수학Ⅱ」 Ⅱ.미분법

연구01 **함수 $y=f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때 평균변화율을 구하시오.**

미리 알아야 할 단원
수학2 - 1.함수의 극한

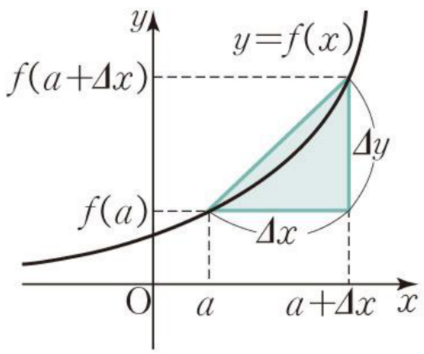
1 평균변화율

연구 01 함수 $y=f(x)$ 에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{a+\Delta x-a}$$

x의 증분 Δx에 대한 y의 증분 Δy의 비율
$(\Delta x=b-a,\ \Delta y=f(b)-f(a))$

평균변화율



연구02 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의
①미분계수 ②좌미분계수 ③우미분계수
를 쓰시오.

2 미분계수

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의

연구 02 ①미분계수 (순간변화율)

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{a+\Delta x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

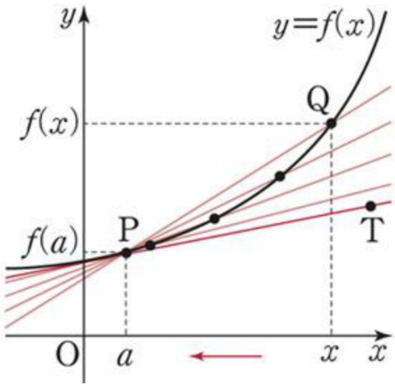
②좌미분계수: $\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (왼쪽접선)

③우미분계수: $\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (오른쪽접선)

기하학적인 의미:

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기

미분계수



함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 좌극한

$=$ 함수값의 좌극한 $=\lim_{x\to a-}f(x)$

다르다!

함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 좌미분계수

$=$ 함수의 변화율의 좌극한 $=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

같다!

함수 $g(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$의 $x=a$에서의 좌극한

$=\lim_{x\to a-}g(x)=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

수 II

연구03 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분가능하다는 것의
①정의를 쓰고
②조건을 쓰고
③조건을 유도하시오.

연구04 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서
①미분가능하면 연속인가?
아니라면 예를 드시오.
②연속이면 미분가능한가?
아니라면 예를 드시오.

3 미분 가능성

연구 03

①정의: 극한값 $f'(a)$가 존재

②조건:

(1) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다

(2) 좌미분계수와 우미분계수가 같다

함수 $f(x)$가 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 말한다.

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 x값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 한다.

함수 $f(x)$가 정의역에 속하는 모든 x값에서 미분가능할 때, 함수 $f(x)$는 미분가능한 함수라고 한다.

연구 04

$y=f(x)$가 $x=a$에서

미분가능 $\underset{\times}{\overset{\circ}{\rightleftarrows}}$ 연속

반례) $f(x)=|x-a|$ (연속함수)

$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 존재X

(미분불가)

좌극한, 우극한 값이 다르기 때문에 극한값이 존재하지 않는다.

미분 가능성

③조건 유도하기

극한값 $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$가 존재하면

조건 (1)

(방법1)

{분모} = {$x-a$} → 0 이므로

{분자} = {$f(x)-f(a)$} → 0 이다. ∞ 방지!

따라서 $\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=0$

결국 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이므로

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

조건 (1)

(방법2)

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\times 0$

$=\lim_{x\to a}\left\{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)\right\}=0$

$=\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}=0$

결국 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이므로

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다

연구05 미분가능한 함수 $g(x)$와 $h(x)$에 대하여, 함수

$$f(x)=\begin{cases} g(x) & (x \le a) \\ h(x) & (x > a) \end{cases}$$

가 실수 전체에서 미분가능할 조건을 쓰고 이를 유도하시오.

연구06 함수 $y=f(x)$의 도함수의 기호와 정의를 쓰시오.

연구 05

조건 ① $g(a)=h(a)$ ($\because$ $f(x)$가 연속)
조건 ② $g'(a)=h'(a)$

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$$

($\because$ $g(x)$가 미분가능)

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=h'(a)$$

($\because$ $h(x)$가 미분가능)

(2) $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 의 $x=a$ 에서의 좌극한과 우극한이 같다.

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$x=a$ 에서 ($\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 의 좌극한) = ($f(x)$의 좌미분계수)

($\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 의 우극한) = ($f(x)$의 우미분계수)

4 도함수

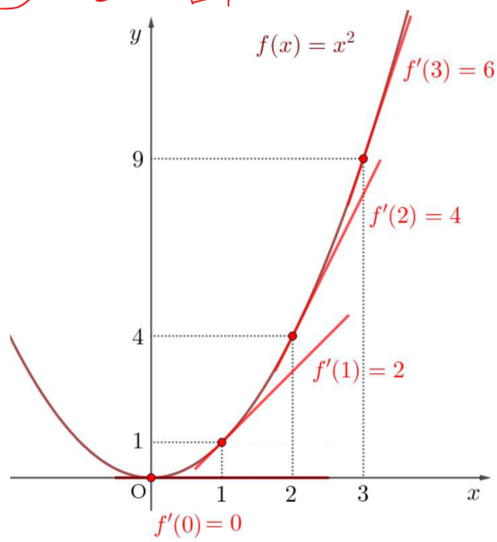
함수 $f(x)$에서 도함수 $f'(x)$를 구하는 것을 $f(x)$를 x에 대하여 '미분한다'고 하고, 그 계산법을 '미분법'이라 한다.

연구 06

$y=f(x)$가 미분가능한 함수일 때

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$=\frac{d}{dx}f(x)=\frac{df(x)}{dx}=\frac{dy}{dx}$$
$$=f'(x)=y'$$

idea 기울기의 함수



X $\xrightarrow{f}$ Y	
0	0
1	1
2	4
3	9
x	$x^2=f(x)$

X $\xrightarrow{f'}$ Y	
0	$0=f'(0)$
1	$2=f'(1)$
2	$4=f'(2)$
3	$6=f'(3)$
x	$2x=f'(x)$

수 II

연구07 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여
아래 식이 성립함을 유도하시오.

① $\{c\}'=0$
② $\{x^n\}'=nx^{n-1}$
③ $\{cf(x)\}'=cf'(x)$

5 미분법의 공식

연구 07 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

① $\{c\}'=0$

② $\{x^n\}'=nx^{n-1}$

③ $\{cf(x)\}'=cf'(x)$

④ $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

⑤ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

⑥ $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

⑦ $\{f(x)g(x)h(x)\}'=f'(x)g(x)h(x)$
$+f(x)g'(x)h(x)$
$+f(x)g(x)h'(x)$

⑧ $(\{f(x)\}^n)'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

미분법의 공식

① $y=f(x)=c$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}=0$$

② $y=f(x)=x^n$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{x+\Delta x-x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(x+\Delta x)-x\}\{(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x^1+\cdots+x^{n-1}\}}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\{(x+\Delta x)^{n-1}+(x+\Delta x)^{n-2}x^1+\cdots+x^{n-1}\}$$
$$=\underbrace{x^{n-1}+x^{n-1}+x^{n-1}+\cdots+x^{n-1}}_{n개}=n\cdot x^{n-1}$$

③ $y=cf(x)$

$$\{cf(x)\}'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{cf(x+\Delta x)-cf(x)}{x+\Delta x-x}$$
$$=c\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}=cf'(x)$$

수Ⅱ

④ $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$

⑤ $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$

⑥ $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

④ $y=f(x)+g(x)$

$$\{f(x)+g(x)\}'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)\}-\{f(x)+g(x)\}}{x+\Delta x-x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{f(x+\Delta x)-f(x)\}+\{g(x+\Delta x)-g(x)\}}{x+\Delta x-x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{x+\Delta x-x}$$

$$=f'(x)+g'(x)$$

⑤ $y=f(x)-g(x)$

$$\{f(x)-g(x)\}'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{f(x+\Delta x)-g(x+\Delta x)\}-\{f(x)-g(x)\}}{x+\Delta x-x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{f(x+\Delta x)-f(x)\}-\{g(x+\Delta x)-g(x)\}}{x+\Delta x-x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{x+\Delta x-x}$$

$$=f'(x)-g'(x)$$

⑥ $y=f(x)g(x)$

$$\{f(x)g(x)\}'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$-f(x)g(x+\Delta x)$
$+f(x)g(x+\Delta x)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{x+\Delta x-x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)}{x+\Delta x-x}$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{x+\Delta x-x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}\times g(x+\Delta x)$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\times\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{x+\Delta x-x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}\times\lim_{\Delta x\to 0}g(x+\Delta x)$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}f(x)\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{x+\Delta x-x}$$

$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

연구08 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식을 쓰시오.

연구09 최대·최소의 정리를 쓰시오.

연구10 사이값 정리를 쓰시오.

6 접선의 방정식

연구 08 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

'사잇값의 정리'가 '롤의 정리'와 '평균값의 정리'와는 관계가 없지만, 'c가 열린구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다'는 결론이 비슷하니 잘 비교해서 보자. 그래야 실전에서 잘 쓸 수 있다!

연구 09 최대·최소의 정리 → 롤의 정리 조건①관련

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가진다

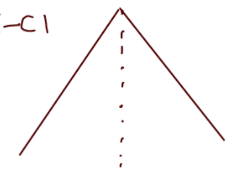
연구 10 사이값 정리

함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값 k에 대하여 다음을 만족하는 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

$$f(c)=k$$

※ 미분불가하면 → 롤의 정리 조건②관련

$f(x)=-|x-c|$



c

$$0 \le \underbrace{\lim_{x\to c-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{=+1} \neq \underbrace{\lim_{x\to c+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}}_{=-1} \le 0$$

다를 수 있다!

수II

연구11 롤의 정리를 쓰시오

연구12 롤의 정리를 유도하시오.

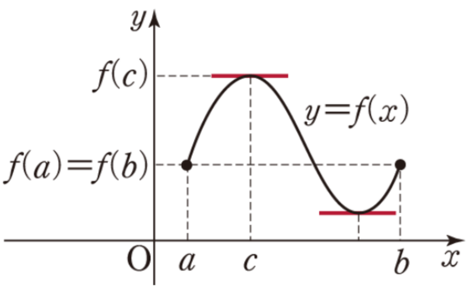
7 롤의 정리

연구 11 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 조건①

조건② 개구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때, 최대최소 정리

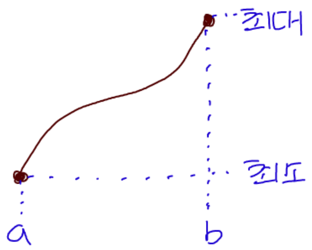
조건③ $f(a)=f(b)$이면

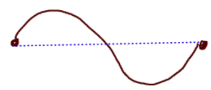
$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(c)=0\ (a<c<b)$인 c가 개구간 $(a,\ b)$에 적어도 하나 존재한다. 최대 or 최소



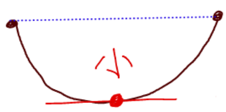
롤의 정리 조건③관련

※ $f(a)\neq f(b)$ vs $f(a)=f(b)$

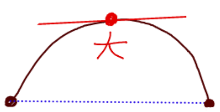




최대가 양끝점이면 최소는 중간에



최소가 양끝점이면 최대는 중간에



⇓ vs ⇓

최대 최소가 양끝점이어서 중간에 최대와 최소가 없을 수 있다

양끝점을 제외한 중간에서 반드시 최대나 최소를 갖는다

롤의 정리

연구 12

(i) 함수 $f(x)$가 상수함수

개구간 (a,b)의 모든점에서 $f(x)=c$이므로

개구간 (a,b)에 속하는 모든 x에 대하여

$f'(x)=0$

(ii) 함수 $f(x)$가 상수함수가 아닌 경우

$f(a)=f(b)$ 이므로 양끝점 제외한 (∵조건②)

$x=c\ (a<c<b)$ 에서 최댓값 또는 최솟값을

갖는다 (∵조건①)

(ㄱ) $x=c$에서 최댓값일때

$f(x)\le f(c) \quad (a<x<b)$

$\Delta y = f(x)-f(c)\le 0$

i) $x<c\ (x-c<0)$ ii) $x>c\ (x-c>0)$

$$0\le \lim_{x\to c-}\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x\to c+}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0$$

미분가능 하므로 (∵조건②)

$$0\le \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le 0$$

$\therefore f'(c)=0$

(ㄴ) $x=c$에서 최솟값일때:

(ㄱ)과 같은 방법 으로 한다

연구13 평균값의 정리를 쓰시오.

연구14 평균값의 정리를 유도하시오.

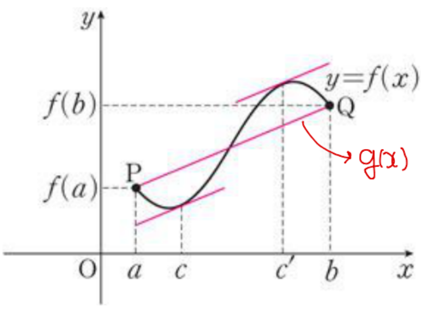
연구15 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서
①증가한다는 것의 정의를 쓰시오.
②감소한다는 것의 정의를 쓰시오.

8 평균값의 정리

연구 13 함수 $f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이고 개구간 (a, b)에서 미분가능하면

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad (\text{단, } a<c<b)$$

인 c가 개구간 (a, b) 안에 적어도 하나 존재한다.



평균값의 정리

연구 14 (단계1) $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 방정식을 $y=g(x)$라고하자

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$ 일때

$g(x)$는 $k(x-a)+f(a)$

$(g(a)=f(a),\ g(b)=f(b),\ g'(x)=k)$

(단계2) $F(x)=f(x)-g(x)$

$F(x)$는 폐구간 $[a, b]$에서 연속이다.

($\because$ $f(x)$는 폐구간 $[a, b]$에서 연속
$g(x)$는 폐구간 $[a, b]$에서 연속)

$F(x)$는 개구간 (a, b)에서 미분가능이다.

($\because$ $f(x)$는 개구간 (a, b)에서 미분가능
$g(x)$는 개구간 (a, b)에서 미분가능)

$F(a)=F(b)$

($\because$ $F(a)=f(a)-g(a)=0$
$F(b)=f(b)-g(b)=0$)

(결론) $F'(c)=0$인 c가 개구간 (a, b)에 적어도 하나 존재 (롤의정리)

$F(x)=f(x)-g(x)$ 이므로

$F'(x)=f'(x)-g'(x) \to F'(c)=f'(c)-g'(c)=0$

$f'(c)=g'(c)=k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

연구16 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가함을 유도하시오.

연구17 다음 명제의 참 거짓을 판별하시오.

① $y=f(x)$가 증가함수이면 $f'(x)>0$이다.

② $f'(x)>0$이면 $y=f(x)$가 증가함수이다.

③ $y=f(x)$가 증가함수이면 $f'(x)\geq 0$이다.

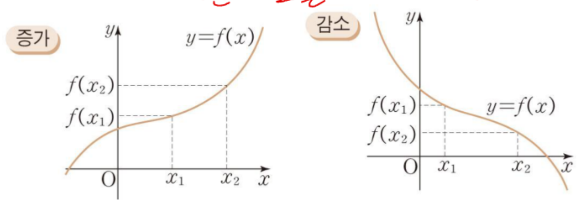
④ $f'(x)\geq 0$이면 $y=f(x)$가 증가함수이다.

9 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간의 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

연구 15 **함수의 증가:** $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1)<f(x_2)$
왼 오른 아래 위

함수의 감소: $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1)>f(x_2)$
왼 오른 위 아래



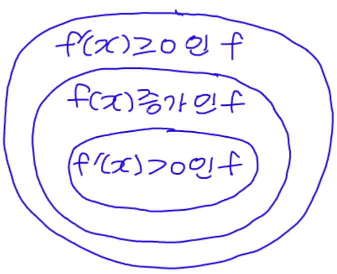
함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 그 구간에서

연구 16 ① $f'(x)>0$이면
$f(x)$는 그 구간에서 증가

② $f'(x)<0$이면
$f(x)$는 그 구간에서 감소

연구 17 $f(x)$ 증가 $\overset{\times}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}}$ $f'(x)>0$

$f(x)$ 증가 $\overset{\circ}{\underset{\times}{\rightleftarrows}}$ $f'(x)\geq 0$



함수의 증가와 감소

유도

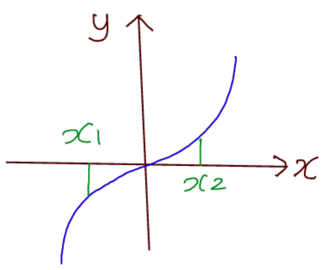
① 구간의 임의의 두 수
x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$라고 하자
평균값의 정리에 의하여
$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$인 c가
구간에 적어도 하나 존재한다. 개념

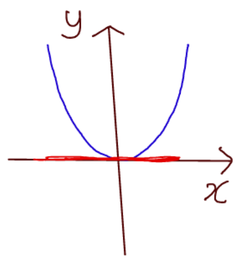
$f'(x)>0$ 이므로 $f'(c)>0$이고
$x_2-x_1>0$ 이므로
$f(x_2)-f(x_1)>0$ 이다. 조건

결국 $x_1<x_2$ 일때, $f(x_1)<f(x_2)$ 정의

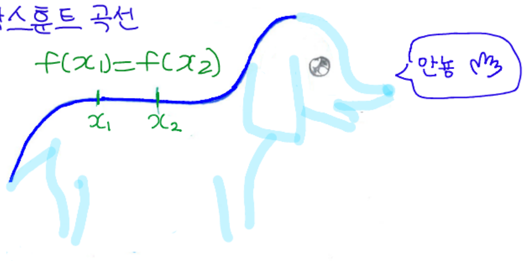
반례

※ $f(x)=x^3$ 증가함수 $\rightarrow$ $f'(x)=3x^2>0$
$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$
$x_1^3<x_2^3$
$f'(0)=0$ 모순





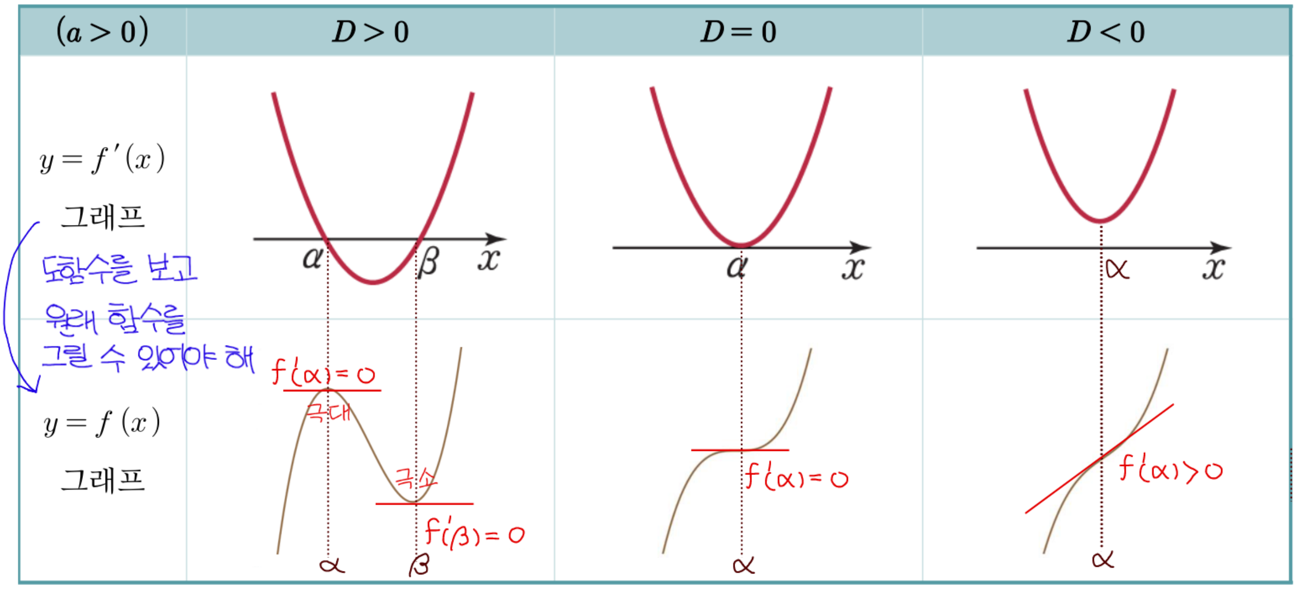
※ $f'(x)\geq 0$ $\longrightarrow$ $f(x)$증가함수 모순!
ex) 닥스훈트 곡선

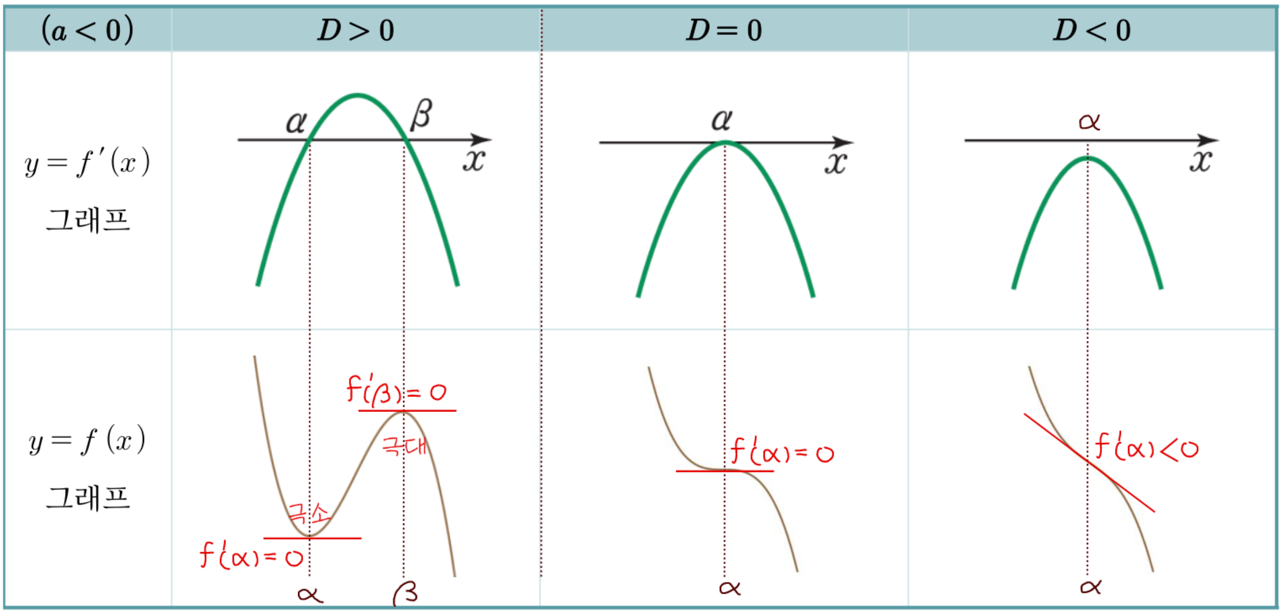


연구18 삼차함수 $y=f(x)$에 대하여 도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 다음과 같을 때 알맞은 그래프 개형을 그리시오.

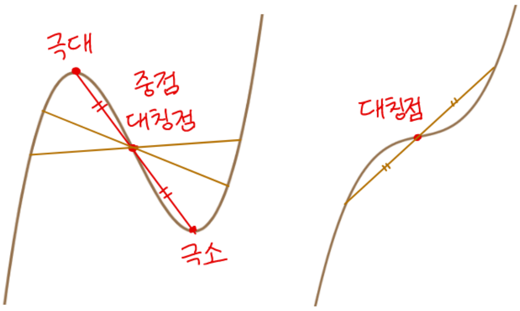
연구 18 3차함수의 그래프 개형

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 일 때, $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 이므로

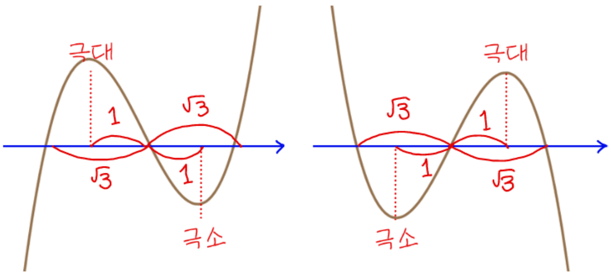




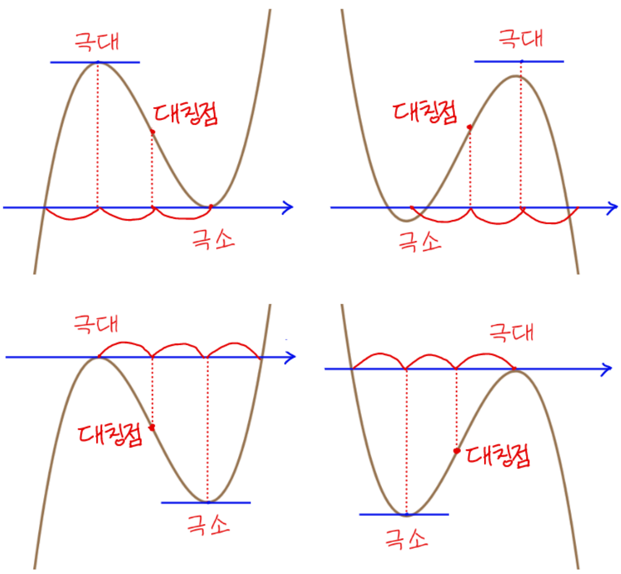
① 대칭성



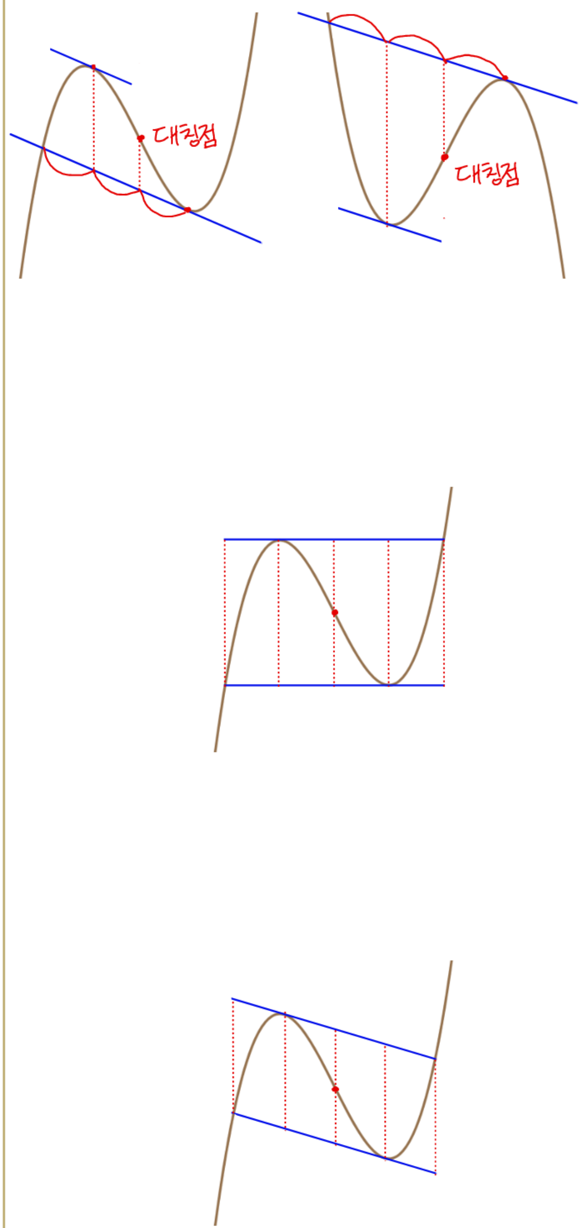
② $\sqrt{3}:1$



③ $2:1$

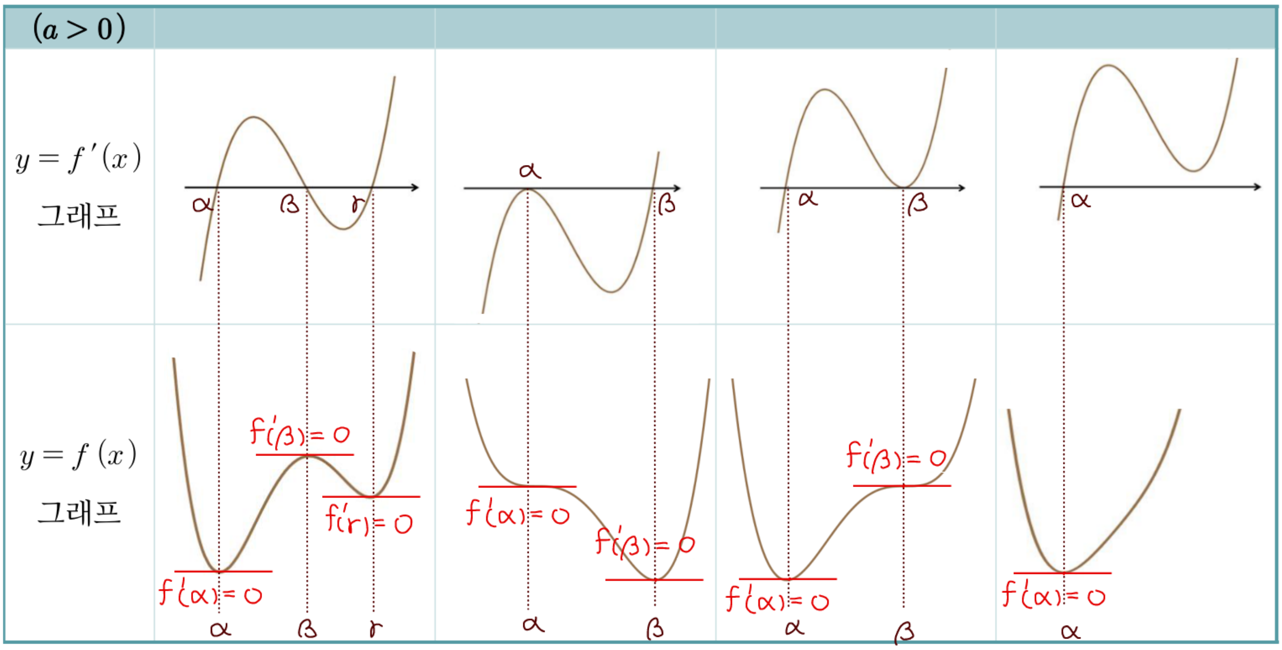


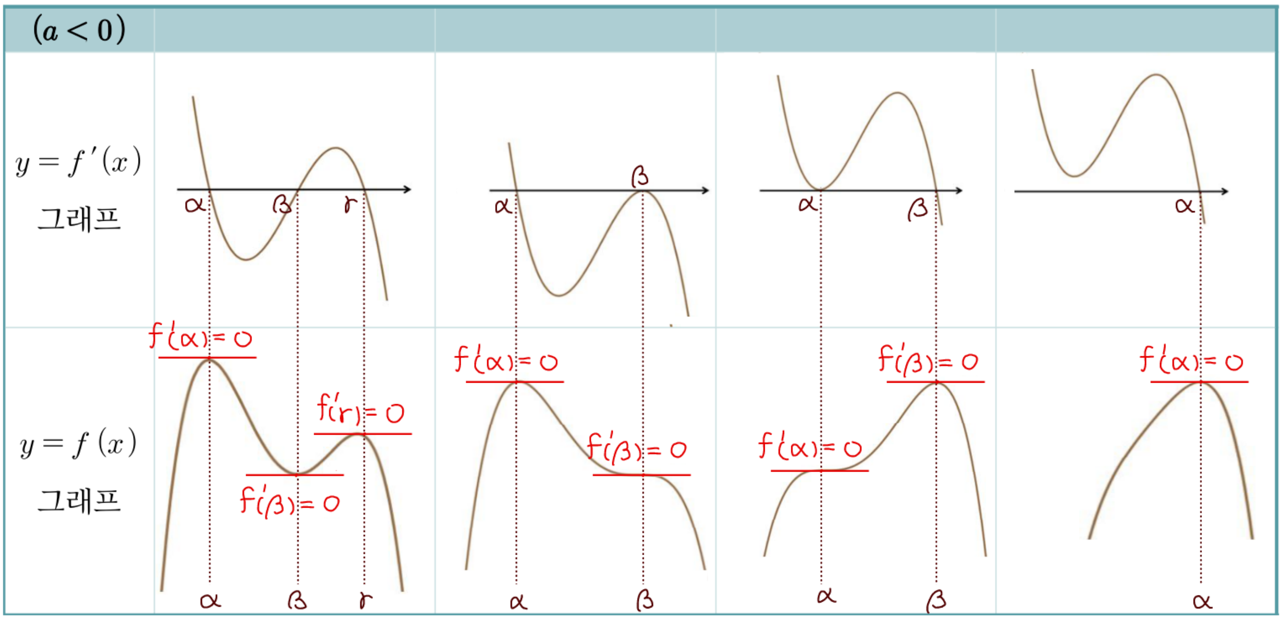
④ 확장



4차함수의 그래프 개형

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ 일 때, $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$ 이므로





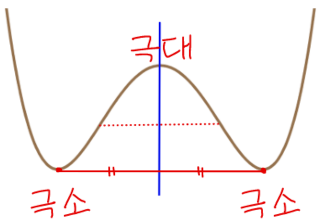
연구19 다항함수 $f(x)$가 아래와 같이 표현될 때, $x=\alpha$ 좌우에서 $f(x)$ 그래프의 부호변화 여부를 쓰시오. (단, $g(\alpha)\neq 0$)

①$f(x)=(x-\alpha)^{짝}g(x)$

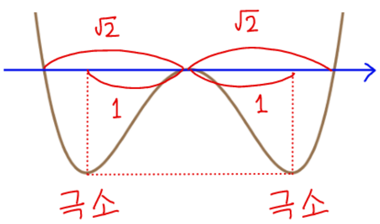
②$f(x)=(x-\alpha)^{홀}g(x)$

연구20 다항함수 $f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 x축에 접할 때, $f(x)=(x-a)^2g(x)$이 성립함을 유도하시오.

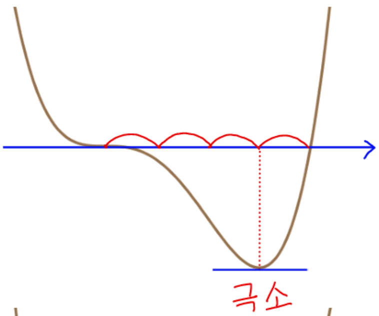
① 대칭성

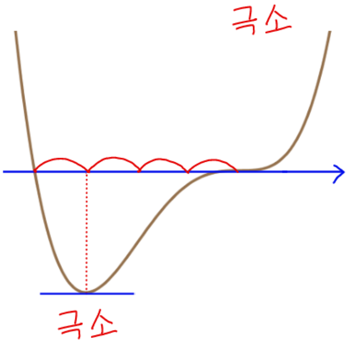


② $\sqrt{2}:1$



③ $3:1$



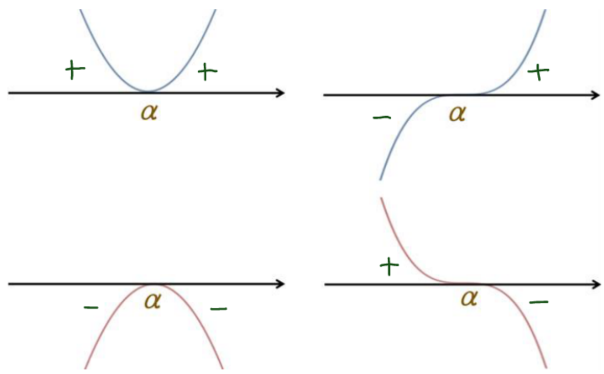


연구 19 **인수의 차수와 그래프 부호 변화**

$f(x)=(x-\alpha)^{짝}g(x)$ vs $f(x)=(x-\alpha)^{홀}g(x)$

$x=\alpha$ 좌우에서 부호변화 ×

$x=\alpha$ 좌우에서 부호변화 O



연구 20 $f(x)$의 그래프가 $x=a$에서 x축에 접한다.

$\Leftrightarrow$ $f(a)=0,\ f'(a)=0$

$\Leftrightarrow$ $f(x)=(x-a)^2g(x)$ (단, $f(x)$는 다항함수)

$f(a)=0$ 이므로

$f(x)=(x-a)h(x)$

$f'(x)=1\cdot h(x)+(x-a)h'(x)$

$f'(a)=0$ 이므로

$f'(a)=h(a)+0\cdot h'(a)=h(a)=0$

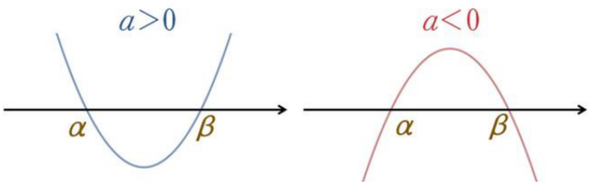
$\therefore h(x)=(x-a)g(x)$

$\therefore f(x)=(x-a)^2g(x)$

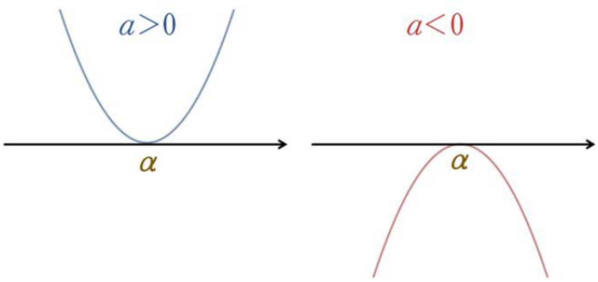
수Ⅱ

부호를 활용한 그래프 개형

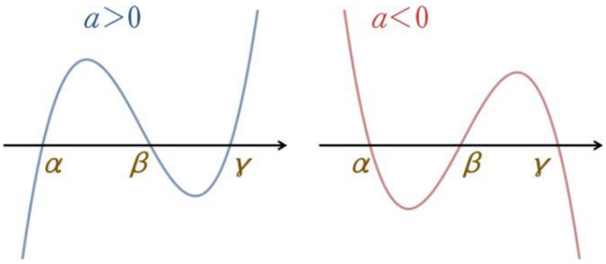
(1) $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$



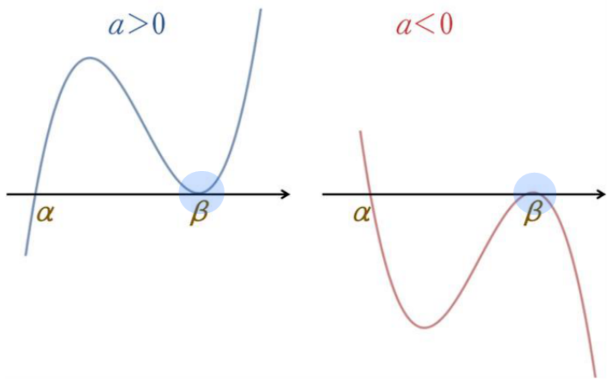
(2) $y=a(x-\alpha)^2$



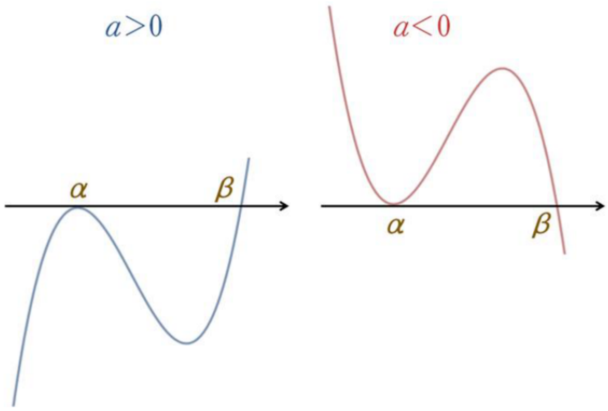
(3) $y=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$



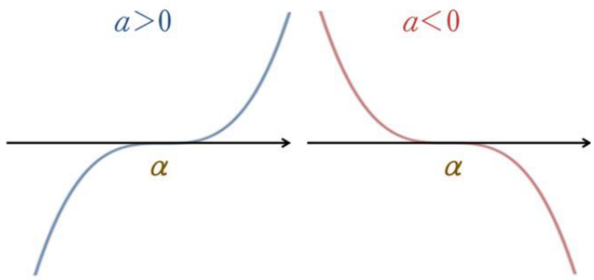
(4) $y=a(x-\alpha)(x-\beta)^2$ 2차 이상이면 x축에 접해야 해!



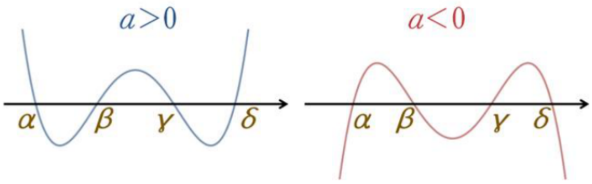
(5) $y=a(x-\alpha)^2(x-\beta)$



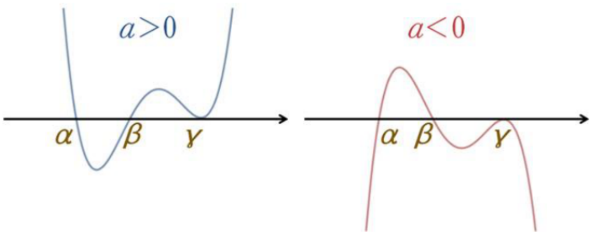
(6) $y=a(x-\alpha)^3$



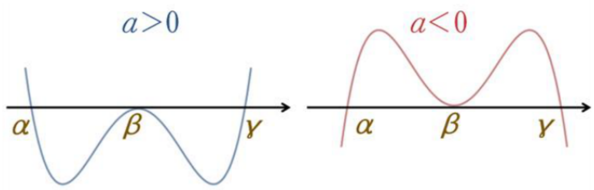
(7) $y=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$



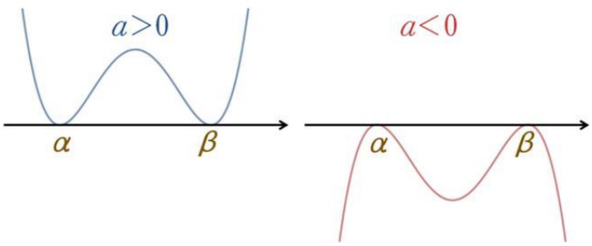
(8) $y=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)^2$



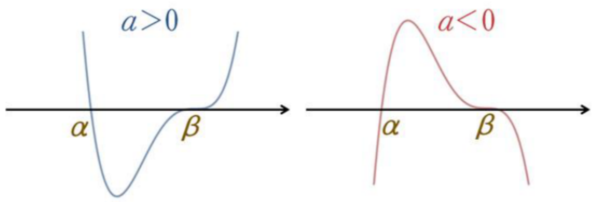
(9) $y=a(x-\alpha)(x-\beta)^2(x-\gamma)$



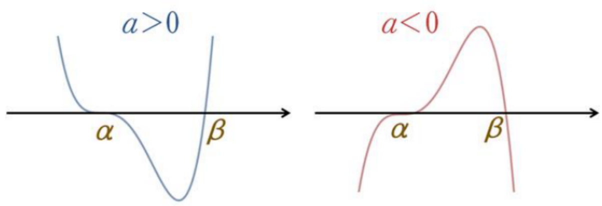
(10) $y=a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$



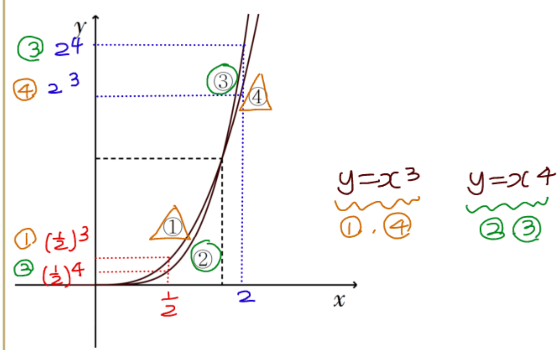
(11) $y=a(x-\alpha)(x-\beta)^3$



(12) $y=a(x-\alpha)^3(x-\beta)$



(13) 다음은 $y=x^3$과 $y=x^4$의 그래프의 일부이다. $y=x^3$에 해당되는 부분과 $y=x^4$에 해당되는 부분으로 알맞은 것을 짝지으시오.



수 II

연구21 함수의 극대와 극소의 정의를 쓰시오.

연구22 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고, $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$임을 유도하시오.

10 함수의 극대와 극소

함수 $f(x)$가 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

연구 21

극대 : $f(a) \geq f(x)$일 때,

$f(x)$는 $x=a$에서 극대라고 한다.

극댓값 : 극대일 때의 함수값. $f(a)$

극소 : $f(a) \leq f(x)$일 때,

$f(x)$는 $x=a$에서 극소라고 한다.

극솟값 : 극소일 때의 함수값. $f(a)$

극값 : 극댓값과 극솟값을 통틀어 극값이라 한다.

(함수의 증감이 바뀌는 점에서의 값)

연구 22

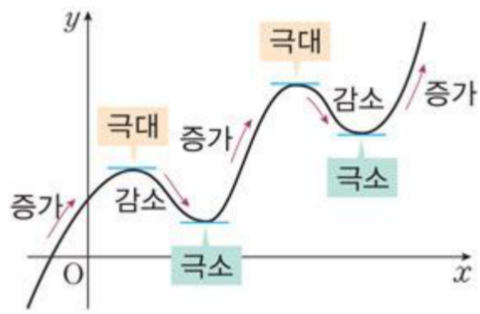
①함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고, $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$

②$f'(a)=0$이고, $x=a$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가

(1) ⊕에서 ⊖변하면 $f(a)$는 극댓값

(2) ⊖에서 ⊕ 변하면 $f(a)$는 극솟값

함수의 극대와 극소



① $f(a)$가 극댓값이라 가정

$f(x)$는 $x=a$ 포함하는 충분히 작은 개구간에서 최댓값

$f(x) \leq f(a)$

$f(x)-f(a) \leq 0$

i) $x<a$ $(x-a<0)$ ii) $x>a$ $(x-a>0)$

$$0 \leq \lim_{x \to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$$

미분가능하므로

$0 \leq f'(a) \leq 0$

$\therefore f'(a)=0$

수Ⅱ

연구23 다음 명제의 참 거짓을 판별하시오.

① $x=a$에서 $f(x)$가 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

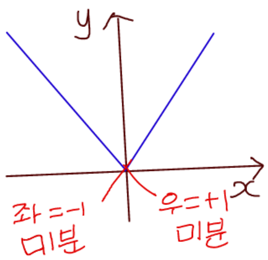
② $f'(a)=0$이면 $x=a$에서 $f(x)$가 극값을 가진다.

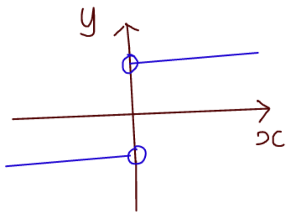
연구 20 ✎ $x=a$에서 $f(x)$가 극값 $\not\rightarrow$ $f'(a)=0$

$\not\rightarrow$) 반례

$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & (x\le 0)\\ x & (x>0)\end{cases}$ $f'(x)=\begin{cases}-1 & (x<0)\\ 1 & (x>0)\end{cases}$

$x=0$에서 극값　　　　$f'(0)$ 없다

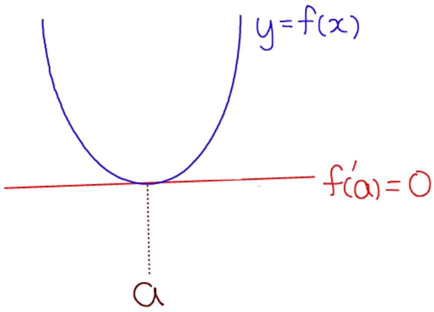




〈추가조건〉

$y=f(x)$ 미분가능하면

$x=a$에서 $f(x)$가 극값 $\longrightarrow$ $f'(a)=0$

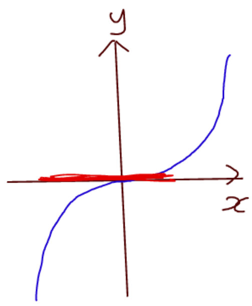


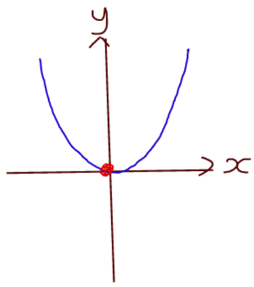
✎ $x=a$에서 $f(x)$가 극값 $\not\leftarrow$ $f'(a)=0$

$\not\leftarrow$ 반례

$f(x)=x^3$ $\longrightarrow$ $f'(x)=3x^2$

$x=0$에서 극값 X $\longleftarrow$ $f'(0)=0$





✎ $x=a$에서 $f(x)$가 극값 $\overset{O}{\Leftrightarrow}$ $f'(x)$ 부호변화

대체로 ($f'(x)$ 연속)
$f'(a)=0$

수II

연구24 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때,
아래 경우마다 $f(x)=0$의 근의 종류를 쓰시오.

① (극댓값)×(극솟값) <0

② (극댓값)×(극솟값)=0

③ (극댓값)×(극솟값) >0

11 방정식에의 활용

방정식 $f(x)=0$의 실근은
함수 $y=f(x)$의 그래프와
x축$(y=0)$과의 교점의 x좌표이다.
방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수
$y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의
x좌표이다.

연구 21 삼차함수 $f(x)$가 극값을 가질 때,

① (극댓값)×(극솟값)<0 서로 다른 세 실근

② (극댓값)×(극솟값)=0 한 실근과 중근

③ (극댓값)×(극솟값)>0 한 실근과 두 허근

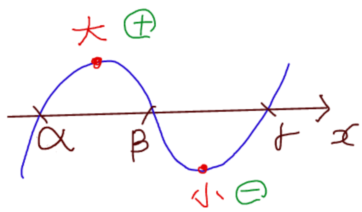
12 부등식에의 활용

①어떤 구간에서 부등식 $f(x)>0$이
성립함을 보이려면
주어진 구간에서 $y=f(x)$의
최솟값>0임을 보이면 된다.

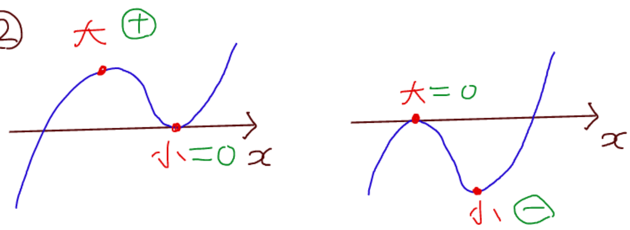
②어떤 구간에서 부등식 $f(x)>g(x)$이
성립함을 보이려면
$h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고,
주어진 구간에서 $y=h(x)$의
최솟값>0임을 보이면 된다.

방정식에의 활용

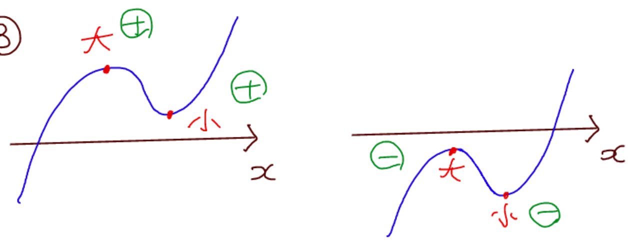
①



②



③



교과서 미분 단원 후반부에 있는 <속도와 가속도> 내용은 학습의 효율성을 위해 적분 단원의 <속도와 거리>내용과 통합하여 적분단원 마지막에 배치하였다.