제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\left(2^{\sqrt{3}} \times 4\right)^{\sqrt{3}-2}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$\left(2^{\sqrt{3}+2}\right)^{\sqrt{3}-2} = 2^{3-4} = \frac{1}{2}$

2. 함수 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$f'(x) = 3x^2+6x+1$

$f'(1) = 3+6+1 = 10$

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_2=6, \quad a_4+a_6=36$$

일 때, a_{10} 의 값은? [3점]

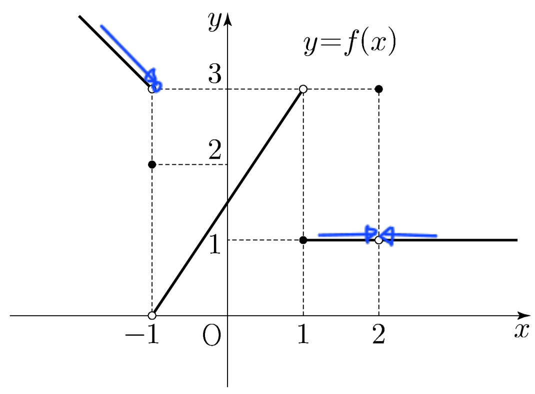
① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

· $a+d=6$

· $2a+8d = 12+6d = 36$ $\therefore d=4,\ a=2$

$a_{10} = a+9d = 2+36 = 38$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to-1-} f(x) + \lim_{x\to 2} f(x)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$3+1 = 4$

5. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} 2a_n & (a_n<7) \\ a_n-7 & (a_n\geq 7)\end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8} a_k$의 값은? [3점]

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

$a_1=1$
$a_2=2$
$a_3=4$
$a_4=8$
$a_5=1$
$a_6=2$
$a_7=4$
$a_8=8$

$\sum_{k=1}^{8} a_k = 1+2+4+8+1+2+4+8=30$

6. 방정식 $2x^3-3x^2-12x+k=0$이 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수는? [3점]

① 20 ② 23 ③ 26 ④ 29 ⑤ 32

$2x^3-3x^2+12x=-k$

$f(x)=2x^3-3x^2+12x$

$f'(x)=6x^2-6x+12=6(x-2)(x+1)$

극대 $f(-1)=7$
극소 $f(2)=-20$ $\Rightarrow$ $-20<k<7$

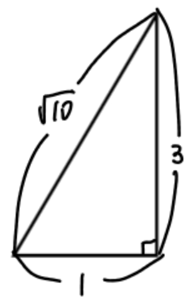
$\therefore$ k의 개수 = 26

7. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

제 3사분면 $\tan\theta>0$

$\tan^2\theta-\tan\theta-6=0$ $\Rightarrow$ $\tan\theta=3$



$\Rightarrow$ $\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}$

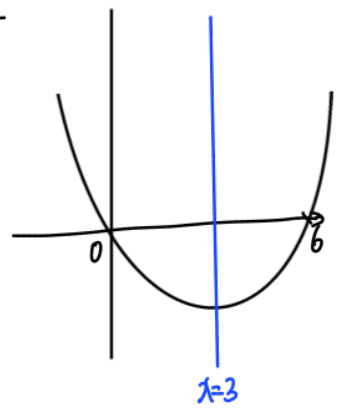
$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{4}{\sqrt{10}}$

8. 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분할 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 3 ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{15}{4}$ ⑤ 4

$x^2-5x=x \Leftrightarrow x^2-6x=0$

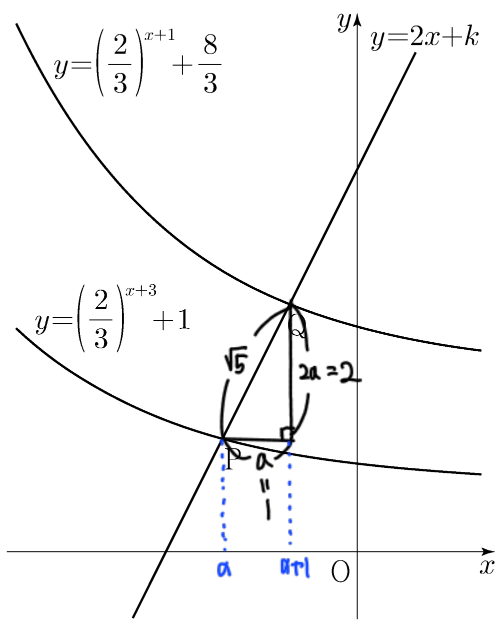


9. 직선 $y=2x+k$가 두 함수

$$y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1,\quad y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{5}$일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① $\frac{31}{6}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{11}{2}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{35}{6}$



$P\left(\alpha, \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}+1\right)$

$Q\left(\alpha+1, \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}+\frac{8}{3}\right)$

$\Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+2}+\frac{8}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha+3}+3$

$\frac{4}{27}\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha}=\frac{1}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha}=\frac{9}{4}$ $\therefore \alpha=-2$

대입

$Q\left(-1, \frac{11}{3}\right) \sim y=2x+k$

$\frac{11}{3}=-2+k$ $\therefore k=\frac{17}{3}$

10. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은? [4점]

① -18 ② -17 ③ -16 ④ -15 ⑤ -14

① $f(0)=0$, $f(1)=2$

② $y=f(x)$, $(0,0)$에서의 접선

$y=f'(0)x$

$y=xf(x)$, $(1,2)$에서의 접선

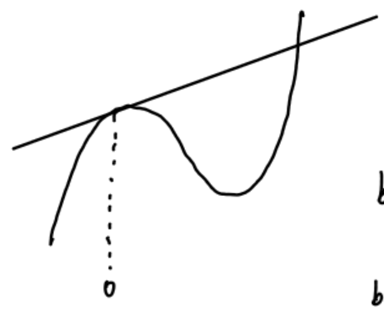
일치!!

$y=\{2+f'(1)\}(x-1)+2$

$=\{2+f'(1)\}x-2-f'(1)+2$

(1) ⋯ $f'(1)=0$

(2) ⋯ $2+f'(1)=f'(0)=2$



$f(x)-2x=ax^2(x-b)$

by ① $f(1)-2=a(1-b)=0$

by ② $f'(1)-2=2a(1-b)+a=a=-2$

$b=1$

$\therefore a=-2,\ b=1$

$f(x)=-2x^2(x-1)+2x$

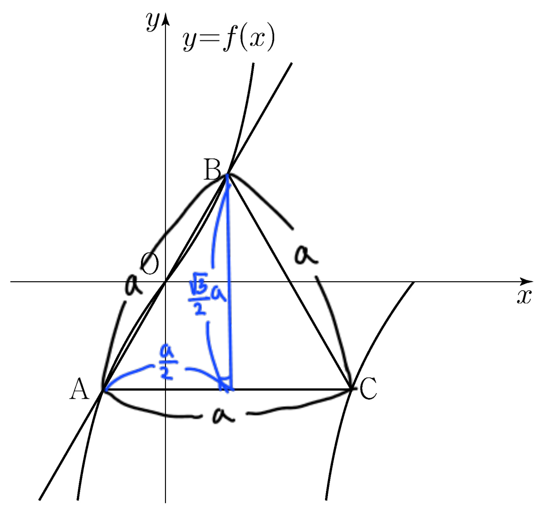
$f'(x)=-4x(x-1)-2x^2+2$

$f'(2)=-14$

11. 양수 a에 대하여 집합 $\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2} < x \le a,\ x \ne \frac{a}{2}\right\}$에서 정의된 함수

$$f(x) = \tan\frac{\pi x}{a}$$

가 있다. 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 세 점 O, A, B를 지나는 직선이 있다. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 C라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{17\sqrt{3}}{12}$ ③ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

주기 : $a \Rightarrow \overline{AC} = a$

$\triangle ABC$의 넓이 : $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = ?$

$\Rightarrow B\left(\frac{a}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}a\right)$ 대입

$\frac{\sqrt{3}}{4}a = \tan\frac{\frac{a}{4}}{\frac{a}{1}}\pi = \tan\frac{\pi}{4} = 1$

$\therefore a = \frac{4}{\sqrt{3}}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}$

12. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

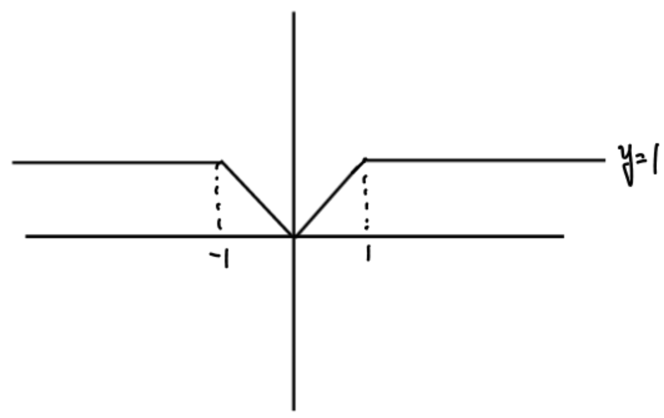
$$\{f(x)\}^3 - \{f(x)\}^2 - x^2 f(x) + x^2 = 0$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이고 최솟값이 0일 때, $f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right)$의 값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\{f(x)\}^2\{f(x)-1\} - x^2\{f(x)-1\} = 0$

$\{(f(x))^2 - x^2\}\{f(x)-1\} = 0 \Rightarrow f(x) = x$ or $-x$ or 1



$f\left(-\frac{4}{3}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

13. 두 상수 a, b $(1<a<b)$에 대하여 좌표평면 위의

A ⇒ 두 점 $(a, \log_2 a)$, $(b, \log_2 b)$를 지나는 직선의 y절편과

B ⇒ 두 점 $(a, \log_4 a)$, $(b, \log_4 b)$를 지나는 직선의 y절편이 같다.

함수 $f(x)=a^{bx}+b^{ax}$에 대하여 $f(1)=40$일 때, $f(2)$의 값은? [4점]

① 760 ② 800 ③ 840 ④ 880 ⑤ 920

A 기울기 $\dfrac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}$, B 기울기 $\dfrac{\log_4 b-\log_4 a}{b-a}$

⇒ $2\times$ B 기울기 = A 기울기

☆ y 절편을 k라 하면, $2\times(\log_4 a-k)=(\log_2 a-k)$

$\log_2 a-2k=\log_2 a-k$

$\therefore k=0$

직선 A, B는 $(0,0)$을 지남

직선 A : $y=\dfrac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)+\log_2 a$ $(0,0)$ 대입

$0=\dfrac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(-a)+\log_2 a$

$a\log_2\dfrac{b}{a}=(b-a)\log_2 a$ ⇒ $a^b=b^a=20$

$f(1)=40=a^b+b^a$

$f(2)=a^{2b}+b^{2a}=400+400=800$

14. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 $x(t)$가 두 상수 a, b에 대하여

$$x(t)=t(t-1)(at+b)\quad(a\neq 0)$$

이다. 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $\int_0^1|v(t)|\,dt=2$를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\int_0^1 v(t)\,dt=0$

ㄴ. $|x(t_1)|>1$인 t_1이 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

ㄷ. $0\le t\le 1$인 모든 t에 대하여 $|x(t)|<1$이면 $x(t_2)=0$인 t_2가 열린구간 $(0, 1)$에 존재한다.

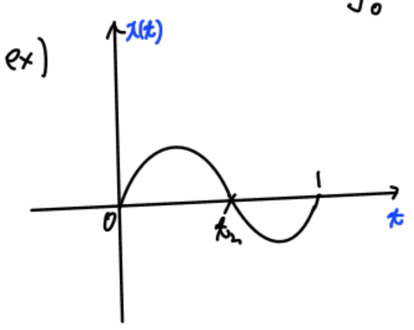
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ $x(1)-x(0)=0$

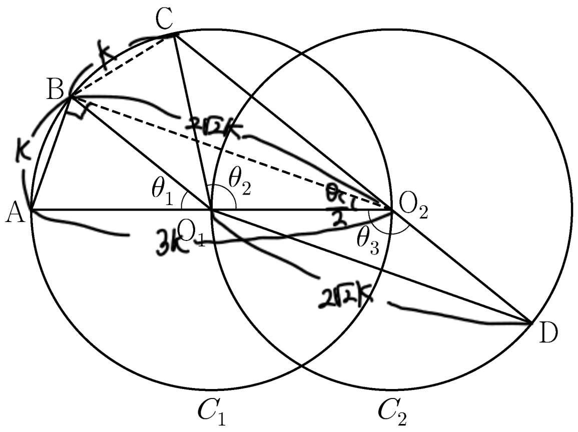
~~ㄴ~~ $|x(t_1)|>1$이 존재하면 $\int_0^1|v(t)|dt>2$이므로 모순

ㄷ $|x(t)|<1$이면, $\int_0^{t_2}|v(t)|dt<2$이므로 $\int_{t_2}^1|v(t)|dt$ 존재

ex)



15. 두 점 O_1, O_2를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{O_1O_2}$인 두 원 C_1, C_2가 있다. 그림과 같이 원 C_1 위의 서로 다른 세 점 A, B, C와 원 C_2 위의 점 D가 주어져 있고, 세 점 A, O_1, O_2와 세 점 C, O_2, D가 각각 한 직선 위에 있다.
이때 $\angle BO_1A=\theta_1$, $\angle O_2O_1C=\theta_2$, $\angle O_1O_2D=\theta_3$이라 하자.



다음은 $\overline{AB}:\overline{O_1D}=1:2\sqrt{2}$이고 $\theta_3=\theta_1+\theta_2$일 때, 선분 AB와 선분 CD의 길이의 비를 구하는 과정이다.

> $\angle CO_2O_1+\angle O_1O_2D=\pi$이므로 $\theta_3=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_2}{2}$이고
> $\theta_3=\theta_1+\theta_2$에서 $2\theta_1+\theta_2=\pi$이므로 $\angle CO_1B=\theta_1$이다.
> 이때 $\angle O_2O_1B=\theta_1+\theta_2=\theta_3$이므로 삼각형 O_1O_2B와 삼각형 O_2O_1D는 합동이다.
> $\overline{AB}=k$라 할 때 $(\overline{AO_2})^2=k^2+8k^2=9k^2$
> $\overline{BO_2}=\overline{O_1D}=2\sqrt{2}k$이므로 $\overline{AO_2}=\boxed{3k}$이고,
> $\angle BO_2A=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로 $\cos\dfrac{\theta_1}{2}=\boxed{\frac{2}{3}\sqrt{2}}$이다.
> 삼각형 O_2BC에서 $\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{9k^2+8k^2-k^2}{2\cdot 3k\cdot 2\sqrt{2}k}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$
> $\overline{BC}=k$, $\overline{BO_2}=2\sqrt{2}k$, $\angle CO_2B=\dfrac{\theta_1}{2}$이므로
> 코사인법칙에 의하여 $\overline{O_2C}=\boxed{\frac{7}{3}k}$이다. $\dfrac{2}{3}\sqrt{2}=\dfrac{9k^2+\overline{O_2C}^2-k^2}{2\cdot 2\sqrt{2}k\cdot\overline{O_2C}}$
> $\overline{CD}=\overline{O_2D}+\overline{O_2C}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_2C}$이므로 $\overline{O_2C}=\dfrac{7}{3}k$
> $\overline{AB}:\overline{CD}=k:\left(\dfrac{\boxed{(가)}}{2}+\boxed{(다)}\right)$이다.

위의 (가), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(p)\times g(p)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{169}{27}$ ② $\dfrac{56}{9}$ ③ $\dfrac{167}{27}$ ④ $\dfrac{166}{27}$ ⑤ $\dfrac{55}{9}$

(가) $3k$
(나) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
(다) $\frac{7}{3}k$
$\Rightarrow 2\sqrt{2}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2}=\frac{56}{9}$

단답형

16. $\log_2 120-\dfrac{1}{\log_{15}2}$의 값을 구하시오. [3점] 3

$\log_2 120-\log_2 15=\log_2 8$
$=3$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=3x^2+2x$이고 $f(0)=2$일 때, $f(1)$의 값을 구하시오. [3점] 4

$f(x)=x^3+x^2+2$
$f(1)=1+1+2=4$

18. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{7} \frac{a_k}{2} = 56, \quad \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$$ 12

일 때, a_8의 값을 구하시오. [3점]

$\sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{7} a_k = 112$

$-\Big)\ \sum_{k=1}^{10} 2a_k - \sum_{k=1}^{8} a_k = 100$

$a_8 = 12$

19. 함수 $f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3$이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a의 최댓값을 구하시오. [3점] 6

$f'(x) = 3x^2 + 2ax - (a^2 - 8a)$

$D/4 = a^2 + 3a^2 - 24a \le 0$

$a^2 - 6a \le 0$

$0 \le a \le 6$

$\therefore a = 6$

20. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다. 110

> (가) 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $f(x) = x$이다.
>
> (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0, \infty)$에서 $f(x+1) - xf(x) = ax + b$이다.

$60 \times \int_1^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

미분가능한 함수 $f(x)$

$x=0 \Rightarrow f(1) - 0 = b = 1$

(나) 미분 $f'(x+1) - f(x) - xf'(x) = a$

$x=0$ 대입 $\Rightarrow f'(1) - f(0) - 0 = a = 1$

$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x+1)\,dx$

$= \int_0^1 \{xf(x) + x + 1\}\,dx$

$= \int_0^1 (x^2 + x + 1)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{6}$

$\therefore \frac{11}{6} \times 60 = 110$

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

678

(가) $|a_1|=2$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $|a_{n+1}|=2|a_n|$이다.

(다) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n=-14$

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구하시오. [4점]

$|a_1|=2$
$|a_2|=4$
$|a_3|=8$
$|a_4|=16$
$|a_5|=32$
$|a_6|=64$
$|a_7|=128$
$|a_8|=256$
$|a_9|=512$
$|a_{10}|=1024$

i) $a_1, \cdots, a_9>0$ / $a_{10}<0$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n=-2$

ii) $a_2, \cdots, a_9>0$ / $a_1, a_{10}<0$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n=-6$

★ $a_3, \cdots, a_9>0$ / $a_1, a_2, a_{10}<0$

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_n=-14$

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-2+8+32+128+512$

$=678$

22. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t, t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

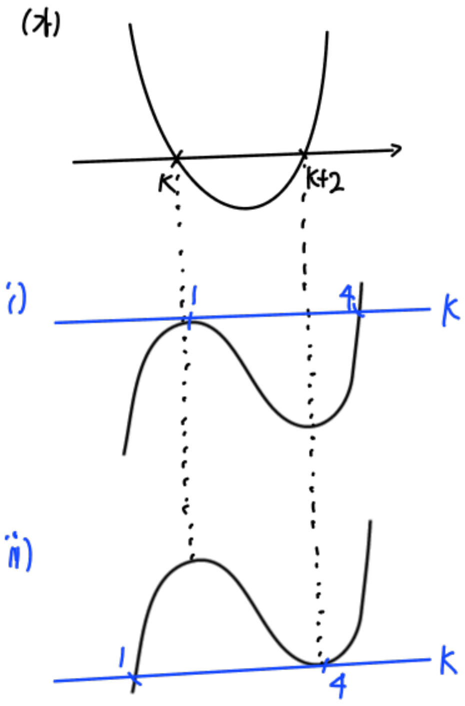
9

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\displaystyle\lim_{t\to a+} g(t)+\lim_{t\to a-} g(t)\le 2$이다.

(나) $g(f(1))=g(f(4))=2$, $g(f(0))=1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

(가)



$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-4)$

$\Rightarrow f(x)-k=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)$

$f(0)=k-2 \Rightarrow g(f(0))=g(k-2)=1$ (O)

$\Rightarrow f(x)-k=\frac{1}{2}(x-1)(x-4)^2$

$f(0)=k-8 \Rightarrow g(f(0))=g(k-8)=0$ (X)

i)에 의해 $k=1$

$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2(x-4)+1$ 이므로 $\therefore f(5)=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 1+1=9$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

홀수형

5지선다형

23. 다항식 $(x+2)^7$의 전개식에서 x^5의 계수는? [2점]

① 42 ② 56 ③ 70 ④ 84 ⑤ 98

$_7C_5 \cdot (x)^5 \cdot (2)^2 = 21 \times 4 = 84$

24. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르고 $\mathrm{V}(2X) = 40$일 때, n의 값은? [3점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

$V(2X) = 4V(X)$

$= 4 \cdot n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$

$= \frac{8}{9}n = 40$

$\therefore n = 45$

25. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는? [3점]

> (가) $a+b+c+d+e=12$
>
> (나) $|a^2-b^2|=5$

① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

(나)에서...

i) $a=3$, $b=2$

$c+d+e=7$ $c=c'+1,\ d=d'+1,\ e=e'+1$

$\Rightarrow c'+d'+e'=4$

${}_3H_4 = {}_6C_4 = 15$

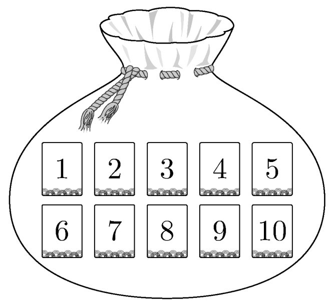
ii) $a=2$, $b=3$

i)과 동일

30

26. 1부터 10까지 자연수가 하나씩 적혀 있는 10장의 카드가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 카드 3장을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4 이하이거나 7 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{4}{5}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{13}{15}$ ④ $\frac{9}{10}$ ⑤ $\frac{14}{15}$



여사건

i) 가장 작은 수가 5일때

$\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{10}{120}$

$\frac{10 \times 9 \times 8}{6}$

ii) 가장 작은 수가 6일때

$\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{6}{120}$

i) + ii) $= \frac{16}{120}$

$\Rightarrow$ 여사건 $1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$

27. 어느 자동차 회사에서 생산하는 전기 자동차의 1회 충전 주행 거리는 평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 한다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 100대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이다.
이 자동차 회사에서 생산한 전기 자동차 400대를 임의추출하여 얻은 1회 충전 주행 거리의 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $c \le m \le d$이다.
$\overline{x_1} - \overline{x_2} = 1.34$이고 $a = c$일 때, $b - a$의 값은? (단, 주행 거리의 단위는 km이고, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때 $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$, $\mathrm{P}(|Z| \le 2.58) = 0.99$로 계산한다.) [3점]

① 5.88 ② 7.84 ③ 9.80
④ 11.76 ⑤ 13.72

n=100 ⇒ 표본평균을 $\bar{x}_1$ 이라 하면,

$$\bar{x}_1 - 1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{100}} \le m \le \bar{x}_1 + 1.96\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$$

n=400 ⇒ 표본평균 $\bar{x}_2$ 라 하면,

$$\bar{x}_2 - 2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{400}} \le m \le \bar{x}_2 + 2.58\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{400}}$$

$a=c \iff \bar{x}_1 - 1.96\cdot\frac{\sigma}{10} = \bar{x}_2 - 2.58\cdot\frac{\sigma}{20}$

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.96\cdot\frac{\sigma}{10} - 1.29\cdot\frac{\sigma}{10}$

$1.34 = 0.067\sigma$

$\therefore \sigma = 20$

$\Rightarrow b-a = 2\times 1.96\times\frac{20}{10} = 7.84$

28. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 X에서 Y로의 함수 f의 개수는? [4점]

> (가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x) \ge \sqrt{x}$이다.
> (나) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 3이다.

① 128 ② 138 ③ 148 ④ 158 ⑤ 168

$f(1) \ge 1 \Rightarrow f(1) = 1, 2, 3, 4$
$f(2) \ge \sqrt{2} \Rightarrow f(2) = 2, 3, 4$
$f(3) \ge \sqrt{3} \Rightarrow f(3) = 2, 3, 4$
$f(4) \ge 2 \Rightarrow f(4) = 2, 3, 4$
$f(5) \ge \sqrt{5} \Rightarrow f(5) = 3, 4$

(나) 치역

i) $(1,2,3) \Rightarrow f(1)=1,\ f(5)=3$
$f(2)=f(3)=f(4)=3$ } ⊖
${}_2\Pi_3 - 1 = 7$ ⇒ 7가지

ii) $(1,2,4) \Rightarrow f(1)=1,\ f(5)=4$
i)과 동일 ⇒ 7가지

iii) $(1,3,4) \Rightarrow f(1)=1$
$f(2), f(3), f(4), f(5) = 3$
$f(2), f(3), f(4), f(5) = 4$ } ⊖
${}_2\Pi_4 - 2 = 14$ ⇒ 14가지

iv) $(2,3,4)$
-1) $f(5)=3$ 인 경우
치역이 (3), (2,3), (3,4)인 경우 제외
${}_3\Pi_4 - (1 + 2\cdot({}_2\Pi_4 - 1)) = 81 - 31 = 50$ ⇒ 50가지

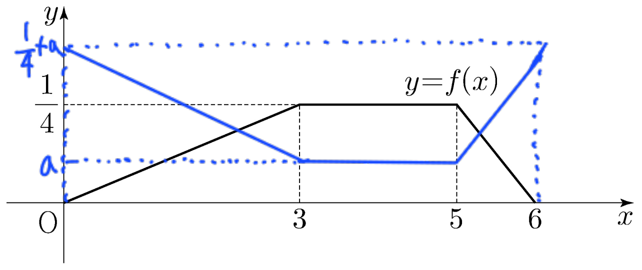
-2) $f(5)=4$ 인 경우
치역이 (4), (2,4), (3,4)인 경우 제외
iv-2)와 동일 ⇒ 50가지

∴ 7+7+14+100 = 128

단답형

31

29. 두 연속확률변수 X와 Y가 갖는 값의 범위는 $0 \le X \le 6$, $0 \le Y \le 6$이고, X와 Y의 확률밀도함수는 각각 $f(x)$, $g(x)$이다. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0 \le x \le 6$인 모든 x에 대하여

$$f(x)+g(x)=k \ (k\text{는 상수})$$

를 만족시킬 때, $\mathrm{P}(6k \le Y \le 15k)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$\int_0^6 g(x)\,dx = 6a+\frac{1}{2}=1 \quad \therefore a=\frac{1}{12}$

$f(0)+g(0)=0+\frac{1}{3}=k \quad \therefore k=\frac{1}{3}$

$\Rightarrow P(2 \le Y \le 5) = \int_2^5 g(x)\,dx = \frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{7}{24}$

$\therefore p+q=31$

191

30. 흰 공과 검은 공이 각각 10개 이상 들어 있는 바구니와 비어 있는 주머니가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 5 이상이면
> 바구니에 있는 흰 공 2개를 주머니에 넣고, $\Rightarrow A \quad P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
> 나온 눈의 수가 4 이하이면
> 바구니에 있는 검은 공 1개를 주머니에 넣는다. $\Rightarrow B \quad P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

위의 시행을 5번 반복할 때, $n(1 \le n \le 5)$번째 시행 후 주머니에 들어 있는 흰 공과 검은 공의 개수를 각각 a_n, b_n이라 하자. $a_5+b_5 \ge 7$일 때, $a_k=b_k$인 자연수 $k(1 \le k \le 5)$가 존재할 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

A	B	a_5+b_5		
5	0	10	${}_5C_5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5$	$=\frac{1}{243}$
4	1	9	${}_5C_4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)$	$=\frac{10}{243}$
3	2	8	${}_5C_3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$=\frac{40}{243}$
2	3	7	${}_5C_2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$=\frac{80}{243}$
1	4	6		

i) A=5, B=0 ⇒ 불가능

ii) A=4, B=1 ⇒ 불가능

iii) A=3, B=2 ⇒ A,B,B 일 때 $k=3$에서 가능

$${}_3C_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{81}$$

iv) A=2, B=3 ⇒ A,B,B 일 때 $k=3$에서 가능

$${}_3C_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot{}_2C_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{81}$$

$$\therefore \frac{\frac{20}{81}}{\frac{131}{243}}=\frac{60}{131}$$

$p+q=191$

※ 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{5}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{2}{n^3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}{\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}$$

$$= 5$$

24. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f(x^3+x)=e^x$$

을 만족시킬 때, $f'(2)$의 값은? [3점]

① e ② $\frac{e}{2}$ ③ $\frac{e}{3}$ ④ $\frac{e}{4}$ ⑤ $\frac{e}{5}$

$$f'(x^3+x)\,(3x^2+1) = e^x$$

$x=1$ 대입 $\Rightarrow$ $f'(2)\,(4) = e$

$\therefore f'(2) = \frac{e}{4}$

25. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3,\quad \sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\,2}=6$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$a_n = ar^{n-1}$

• $a_{2n-1} - a_{2n} = ar^{2n-2} - ar^{2n-1}$

$= a(1-r)(r^2)^{n-1}$ ⇒ 초항: $a(1-r)$
공비: r^2

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n}) = \frac{a(1-r)}{1-r^2} = \frac{a}{1+r} = 3$

• $a_n^2 = a^2 r^{2n-2}$ ⇒ 초항: a^2
공비: r^2

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{a^2}{1-r^2} = \frac{a}{1+r}\cdot\frac{a}{1-r} = 3\cdot\frac{a}{1-r} = 6$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r} = 2$

26. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}$의 값은? [3점]

① $\ln 5$ ② $\frac{\ln 5}{2}$ ③ $\frac{\ln 5}{3}$ ④ $\frac{\ln 5}{4}$ ⑤ $\frac{\ln 5}{5}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k^2}{n^2}+\frac{2k}{n}}{\frac{k^3}{n^3}+\frac{3k^2}{n^2}+1}\cdot\frac{1}{n}$

Let $\frac{k}{n}=x$, $\frac{1}{n}=\Delta x$

$\int_0^1 \frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{3x^2+6x}{x^3+3x^2+1}\cdot\frac{1}{3}dx$

$= \left[\frac{1}{3}\ln|x^3+3x^2+1|\right]_0^1$

$= \frac{\ln 5}{3}$

27. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t>0)$에서의 위치가 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점일 때, 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는? [3점]

① $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$ ② $\frac{e^4}{2}-\frac{5}{16}$ ③ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{4}$ ④ $\frac{e^4}{2}-\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{e^4}{2}-\frac{1}{8}$

✓①

$x^2 - t^2x + \frac{\ln t}{8} = 0$

중점의 x좌표 $= \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{t^2}{2}$

중점의 y좌표 $= \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} = \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2} = \frac{t^4-\frac{\ln t}{4}}{2}$

$= \frac{t^4}{2} - \frac{\ln t}{8}$

$x = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = t$

$y = \frac{1}{2}t^4 - \frac{\ln t}{8} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 2t^3 - \frac{1}{8t}$

$\int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt = \int_1^e \sqrt{t^2+4t^6-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{64t^2}}\,dt$

$= \int_1^e \sqrt{\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)^2}\,dt$

$= \int_1^e \left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)dt$

$= \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{8}\ln|t|\right]_1^e$

$= \frac{e^4}{2} - \frac{3}{8}$

28. 함수 $f(x)=6\pi(x-1)^2$에 대하여 함수 $g(x)$를

$g(x)=3f(x)+4\cos f(x)$

라 하자. $0<x<2$에서 함수 $g(x)$가 극소가 되는 x의 개수는? [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

✓②

$g'(x) = 3f'(x) - 4f'(x)\cdot\sin f(x)$

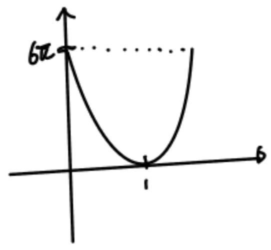
$= f'(x)\{3-4\sin f(x)\}$

i) $f'(x)=0 \Rightarrow x=1$

$f'(x)$ $(3-4\sin f(x))$ ⇒ 극소 (1개)

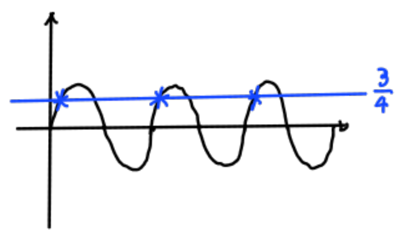
극소 +

ii) $\sin f(x) = \frac{3}{4}$ ⇒ 기울기 $- \to +$



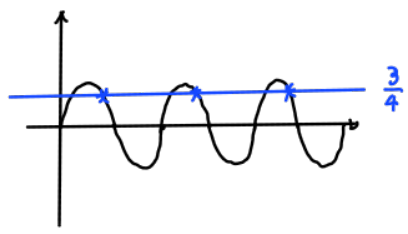
⇒

1) $0<x<1$ ⇒ $f'(x)<0$, $\{3-4\sin f(x)\}$ $(+ \to -)$



3개

2) $1<x<2$ ⇒ $f'(x)>0$, $\{3-4\sin f(x)\}$ $(- \to +)$



3개

∴ 7개

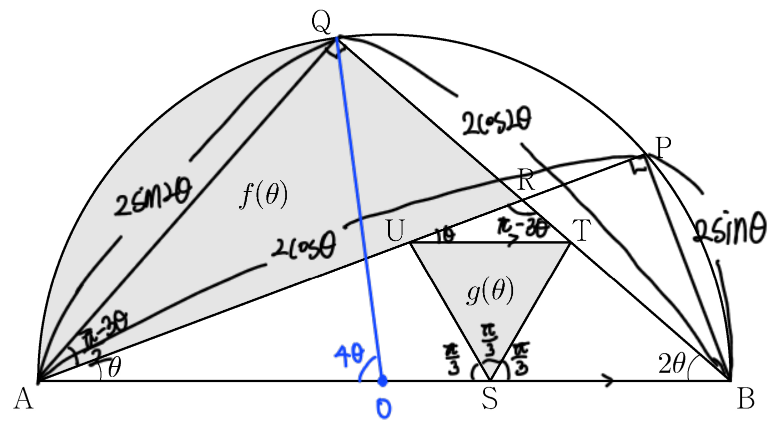
단답형

29. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB = \theta$, $\angle QBA = 2\theta$가 되도록 잡고, 두 선분 AP, BQ의 교점을 R라 하자. 선분 AB 위의 점 S, 선분 BR 위의 점 T, 선분 AR 위의 점 U를 선분 UT가 선분 AB에 평행하고 삼각형 STU가 정삼각형이 되도록 잡는다. 두 선분 AR, QR와 호 AQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 STU의 넓이를 $g(\theta)$라 할 때,

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} = \frac{q}{p}\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{6}$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

11



$\overline{AQ} = 2\sin 2\theta$

$\angle QAR = \angle QAB - \angle PAB = (\frac{\pi}{2} - 2\theta) - \theta = \frac{\pi}{2} - 3\theta$

$\overline{QR} = \overline{AQ} \cdot \tan(\frac{\pi}{2} - 3\theta) = 2\sin 2\theta \cdot \frac{1}{\tan 3\theta}$

$f(\theta) = \text{(활꼴)}AQ + \triangle AQR$

$= \left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 4\theta - \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 4\theta\right) + \left(\frac{1}{2}\cdot 2\sin 2\theta \cdot \frac{2\sin 2\theta}{\tan 3\theta}\right)$

0

$\triangle STU$의 한 변의 길이를 k라 하면, $g(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{4}k^2$

$\triangle RBA$의 사인 법칙 $\Rightarrow \frac{\overline{RB}}{\sin\theta} = \frac{2}{\sin(\pi - 3\theta)} \Leftrightarrow \overline{RB} = \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}$

$\triangle TBS$의 사인 법칙 $\Rightarrow \frac{\overline{BT}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{k}{\sin 2\theta} \Leftrightarrow \overline{BT} = \frac{\sqrt{3}k}{2\sin\theta}$

$(\overline{RB} - \overline{BT})$

$\triangle RTU$는 $\triangle RBA$와 닮음 이므로, $\overline{UT} : \overline{AB} = \overline{RT} : \overline{RB}$

$\Leftrightarrow k : 2 = \left(\frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta} - \frac{\sqrt{3}k}{2\sin\theta}\right) : \frac{2\sin\theta}{\sin 3\theta}$

$k = \left(\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)\left(\frac{\sin 2\theta \sin 3\theta}{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}\right)$

$\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2} \times \frac{\theta}{f(\theta)}$

$= \lim_{\theta \to 0+} \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{4\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)^2 \cdot \left(\frac{\frac{\sin 2\theta \sin 3\theta}{\theta^2}}{\frac{2\sin\theta\sin 2\theta + \sqrt{3}\sin 3\theta}{\theta}}\right)^2 \cdot \frac{\theta}{2\theta - \frac{\sin 4\theta}{2} + \sin 2\theta \cdot \frac{2\sin 2\theta}{\tan 3\theta}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{6}{3\sqrt{3}}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2-2+\frac{8}{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{16}{9}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$

30. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

143

> (가) $f(1) = 1$, $\int_1^2 f(x)\,dx = \frac{5}{4}$
>
> (나) 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(2x) = 2f(x)$이다.

$\int_1^8 xf'(x)\,dx = \frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$x=1 \quad g(2) = 2f(1) = 2 \quad \Rightarrow f(2) = 2$

$x=2 \quad g(4) = 2f(2) = 4 \quad \Rightarrow f(4) = 4$

$x=4 \quad g(8) = 2f(4) = 8 \quad \Rightarrow f(8) = 8$

$\int_1^8 xf'(x)\,dx = [xf(x)]_1^8 - \int_1^8 f(x)\,dx$

$= 8f(8) - f(1) - \int_1^8 f(x)\,dx$

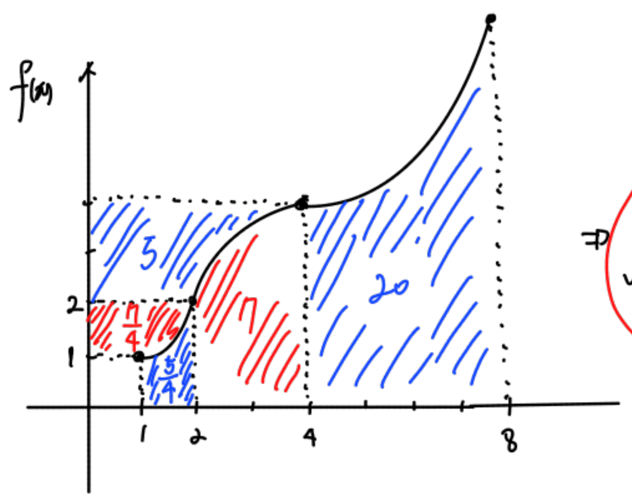
$= (64 - 1) - \frac{113}{4}$

$= \frac{139}{4}$

$\therefore p+q = 143$

0

☆



$\Rightarrow \int_1^8 f(x)\,dx = \frac{113}{4}$

닮음비 1:2 → 넓이비 1:4

> ＊ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.