# 규 토
# 고득점
# N 제

# CONTENTS

## 규토 고득점 N제 오리엔테이션



## 문제편



## 해설강의편

# 오리엔테이션

# 책소개

## 출판하고자 억지로 만든 문제가 아닌 제자들을 위해 정성과 애정으로 만든 문제

안녕하세요. 규토입니다. :D 처음 문제를 만들게 된 계기는 어떻게 하면 제자들에게 더 양질의 수업을 할 수 있을까 고민하던 중에 자작문제를 만들게 되었습니다. 문제를 풀 수 있니? 가 아닌 이런 것도 있으니 꼭 알아가렴 이라는 마음가짐으로 만들었습니다. 한 문제당 평균 3시간 이상씩 치열하게 고민하면서 문제를 만들었고 어떤 문제들은 하루 종일 고민한 적도 있었습니다. 창작을 하는 과정이 정말 힘든 것은 사실입니다. 그렇지만 만든 문제를 빨리 제자들에게 알려주고 싶은 기쁨과 설렘이 훨씬 더 크기 때문에 계속 만들 수 있었습니다.

## 한 문제를 풀어도 여러 문제를 푼 것처럼 느껴지는 문제

원래 문제를 만들 때 2~3개의 예제 문제를 적절하게 섞으면 4점짜리 문제가 탄생합니다. 그 2~3개의 예제문제들의 연결 관계를 파악해 풀어내는 것의 난이도에 따라 문제의 난이도가 달라집니다. 보시면 아시겠지만 제 문제들은 대부분 4~5개의 연결 관계를 파악해야 풀 수 있는 문제가 대다수 입니다. 한 문제를 풀더라도 2~3문제를 푼 것 같은 느낌이드는 것도 이 때문입니다. 그러니 당연히 어려울 수밖에 없습니다. 4~5개의 연결 관계를 계속 해석 하다보면 2~3개짜리 연결 관계를 묻는 문제들은 자연스럽게 쉬워질 수밖에 없다고 생각합니다. 수능에서 수학을 치는 이유는 사고력과 논리력을 평가하기 위해서입니다. 단순계산이 아닌 사고력을 측정하는 것입니다. 최대한 사고력을 자극하는 문제들을 만들기 위해 노력했습니다.
고득점 N제 수1(36제)+수2(45제)는 총 81문제로 단기간에 수학적 사고력과 문제 해결력을 높일 수 있습니다.

## 모든 문항마다 테마가 있는 문제

전 문제를 만들 때 항상 테마가 있습니다. 어떤 개념을 알려주고 싶을 때 문제로 그 정보를 전달하려고 노력합니다. 각 문제마다 어떻게 하면 과외학생들에게 효과적으로 내용을 복습하게 하고 사고력을 기를 수 있을까 치열하게 고민했습니다. 틀리셔도 됩니다. 그렇지만 그 개념들을 모조리 흡수해서 확실히 자기 것으로 만들면 다른 문제를 풀 때 큰 도움이 될 수 있다고 생각합니다. 다년간 수능을 치면서 느꼈던 것과 아이들이 생소해 하는 것을 어떻게 하면 전달 할 수 있을까 항상 생각합니다.

## 4점짜리 자작문제들만 수록

쉽지만 중요한 4점부터 까다로울 수 있는 준킬러급 4점은 물론 어려운 킬러급 4점까지 모두 수록하였습니다. 따라서 1등급, 2등급을 변별하는 문제들만 집중적으로 대비하실 수 있습니다.

## 기존과 차별화된 해설지

기존의 딱딱한 해설지가 아니라 저자와 소통하는 느낌을 주도록 구어체로 만들었고 저자에게 직접 과외를 받는 느낌이 들도록 구성하였습니다. ① 출제의도 ② 해설 ③ 출제자의 한마디 이렇게 3가지로 구분되어있고 보충이 필요한 부분은 [1)]표시해서 별도로 보충 설명하였습니다. 단순히 문제만 푸는 것이 아니라 복합적으로 학습할 수 있도록 구성하였습니다.

# 검토후기

## 김태민 / 울산대학교 의학과

안녕하세요. 규토 N제 시리즈 검토자 김태민입니다. 라이트 N제 시리즈 검토에 이어 고득점 시리즈 검토에도 참여하게 되었습니다.

'고난도' 라는 말을 듣기만 해도 거부감이 들고 무수한 조건들을 보면 어떻게 해야할지 막막한 친구들이 많을 것이라고 생각이 들어요. 하지만 극복해내야죠 ㅎㅎ 이러한 부분들을 극복하기 위해서는 처음 문제를 접근할 때 어느 부분을 포인트로 잡아서 시작할지, 여러 조건들 중 내가 이미 알고 있는 표현들이나 익숙한 표현의 변형들은 없는지 등을 빠르게 파악하는 것이 중요한 것 같아요. 이 교재의 해설은 그러한 측면들을 수험생들의 시선에서 아주 적절하게 제시합니다. 교재에 수록되어 있는 문제들은 기출 고난도의 단순한 변형 문제가 아니라 다른 개념들과 접목시키거나 익숙하지 않은 새로운 표현들을 잘 담았다는 생각이 듭니다. 기출 문제들에서 나온 필수 개념들을 충분히 숙지하고 학습한 후 관련 내용에 대한 추가적인 심화학습을 하고 싶거나 새로운 문제들을 통해 고난도 문제에 대한 훈련을 하고 싶은 많은 수험생 여러분들에게 강력하게 추천할 만한 좋은 문제들이라고 생각합니다.

이 책을 검토하면서 수학 공부에 대하여 여러 생각이 들었어요. 특히 수능 고난도 문제들에 나오는 조건들이나 문제 상황들은 확실하게 알고 있는 상황이라기 보다는 어디선가 비슷한 것을 본 듯한 애매한 느낌이거나 완전히 새로울 수도 있을 것 같아요. 이런 상황이 이번 수능에서도 여러분 앞에 펼쳐질 것이고 그런 상황들을 이겨내기 위해서는 가능한 한 다양한 표현들을 접해보고 그것들의 의미를 풀어내는 연습이 핵심이라고 생각합니다. 시험장에서 아는 표현들이 나오면 당연히 좋겠지만 아닐 경우에는 스스로 이겨낼 힘을 길러야 하니까요. 규토 고득점 N제 시리즈가 수험생 여러분들의 힘을 기르는데 도움이 되었으면 하고 잘 이겨내시길 응원하겠습니다.

## 정지영 / 울산대학교 의학과

안녕하세요, 검토자 정지영입니다. 요즈음 날씨를 보면, 봄은 이미 가고 여름을 맞이하는 기분입니다. 너무나 빠르게 계절이 지나가는 만큼이나, 훌쩍 앞으로 다가온 6평이 입시의 시작을 알리는 것 같아요.

규토 고득점 수1+수2는 결코 가벼운 문제집이 아닙니다. 문제의 난이도도, 해설의 친절함도 결코 단순한 N제로, 스쳐 지나갈 문제집으로 두기에는 아쉬운 문제집입니다. 규토 라이트가 수능 수학에 어떻게 접근해야 할 지 틀을 잡아준 문제집이라면, 규토 고득점은 그 틀을 더욱 완벽하게 고정해 줄 문제집입니다. 규토에 담긴 모든 내용을, 가볍게 넘기지 않고 모두 가져가실 수 있으시면 좋겠습니다.

더워지는 계절입니다. 더위를 이겨낼 만큼이나 뜨거운 여러분들의 열정이, 올해 무엇보다 값진 결실을 맺기를 기원합니다. 감사합니다.

## 문지유 / 울산대학교 의학과

규토 고득점 N제 문제집을 검토하며 처음부터 끝까지 느낀 것은 이 문제집을 학생들에 대한 무수한 애정을 가지고 만들었는지에 대한 감탄이었습니다. 구어체로 과외를 받는다고 느끼게끔 해설이 써져 있는 수학 문제집은 살면서 규토 N제가 처음이었어요. 문제도 사설 고득점 N제임에도 불구하고 터무니 없이 어렵게 꼬아서 낸 느낌이 전혀 없고, 깔끔한 case 분류 문제 위주로 구성되어 있어서 검토하는 내내 제가 고등학생 때 이 문제집을 알았더라면 참 좋았겠다는 생각이 끊이질 않았답니다.

계절이 또 하나 지나갑니다. 무더운 여름이 가고, 날씨가 쌀쌀해지면 이제 수능이 다가옴을 몸과 마음으로, 피부로 느낄 거예요. 규토 고득점 N제로 실력도 다지고, 실수하지 마시고, 검토 꼭 하시고! (그러려면 자신이 어떻게 푼 건지 한눈에 보기 좋게 풀이를 잘 정리해서 써내려가는 연습도 필요하겠죠?) 수능 날까지, 그리고 수능이 끝나는 오후까지! 끝까지 잘 버텨내서 좋은 결과, 본인이 바라는 결과 얻기를 간절히 바랍니다. 조금만 더 힘내세요! 파이팅~!! :D

## 조윤환 / 대성여자고등학교 교사

규토 고득점 N제는 2016년에 처음 출판되어서 올해로 8년 차인 N제입니다. 꽤 오랜 기간 동안 많은 학생들에게 선택을 받았으니 문제의 퀄리티는 이미 보장되어 있다고 생각합니다. 특히 아직 평가원이 출제하지 않은 소재들로 구성된 Case 분류 문제가 상당히 많습니다. Case 분류 문제가 어렵고 막막하다고 느낀다면 규토 고득점 N제로 많은 연습을 할 수 있습니다.

규토 시리즈의 큰 장점 중 하나는 해설이 친절하고 자세하다는 것입니다. 규토 고득점 N제에서는 해설이 구어체로 서술되어 있어서 딱딱하고 불친절한 해설에서 벗어나 재밌게 해설을 읽으면서 공부할 수 있습니다. 문제를 풀고 해설은 크게 참고하지 않는 학생들도 규토 시리즈는 꼭 해설을 읽어보면서 공부하는 걸 추천드립니다. 라이트 N제부터 한 줄기로 이어지는 저자의 일관된 풀이 방법을 따라가면 수학 실력 향상에 큰 도움이 될 것이라고 생각합니다.

마지막으로 규토 100% 공부법을 참고하면서 규토 고득점 N제를 공부하면 좋을 것 같습니다. 사람마다 생각이 다른 부분이지만 저도 규토 100% 공부법처럼 하나의 N제를 여러번 풀어보면서 틀린 문제에 대한 피드백을 확실하게 해야 한다고 생각하는데요. 다소 과할 정도로 틀린 문제를 여러번 풀어봐야 그 문제에 대한 모든 개념과 스킬을 얻어갈 수 있다고 생각합니다. 규토 고득점 N제로 공부하는 학생들 모두 수능에서 좋은 결과가 있기를 진심으로 바라겠습니다.

## 박도현 / 성균관대학교 수학과

안녕하세요~ 규토 N제 시리즈 검토자 박도현입니다. 라이트 N제에 이어 고득점N제도 검토하게 되었습니다. 라이트 N제는 개념설명과 쉬운 문제부터 어려운 문제들이 모두 있는 종합서라면 고득점 N제는 고퀄리티 자작 준킬러, 킬러 문제들만 수록된 도약서입니다. 준킬러, 킬러 문제에서 요구하는 문제 풀이 사고를 과외처럼 친절하게 알려주고 이러한 문제들을 풀 때 가져야할 올바른 마음가짐도 알려줍니다. 저의 수능 수학을 책임져준 만큼 이 책을 보는 모든 수험생들도 많은 도움이 되면 좋겠습니다! 화이팅입니다!

# 규토의 생각

규토 N제를 구매하신 수험생 여러분 모두 반갑습니다. ~ :D

앞의 오리엔테이션에서는 형식적인 “틀” 안에서 이야기를 했다면 이번에는 여러분과 편하고 자유롭게 이야기 해보려고 합니다~

편하게 질문을 받아볼까요~ 오! 저기 빨간 옷 입은 귀여운 여학생 말해보세요!

## Q. 규토 고득점 N제 2024 수1+수2의 난이도가 어떻게 되나요?

사람마다 느끼는 난이도가 다르겠지만 최대한 객관적으로 말씀드릴게요ㅎㅎ

**수학1** : 쉬운 4점~준킬러급 4점~킬러급 4점 정도이고 삼각함수와 수열위주로 구성되어있습니다.

**수학2** : 준킬러급 4점 세 문제를 제외하면 모두 킬러급 4점 이라고 보시면 됩니다.
다항함수 개형 추론은 반드시 맞게 하겠다는 일념 하나로 만들었습니다. +_+ !
전반적으로 평가원보다 어렵습니다.

답변이 되셨나요? ㅎㅎ 또 없으신가요~ 저쪽 안경 쓴 남학생! 말해보세요~

## Q. 기출은 어느 정도 풀고 문제집을 사야하나요?

꼭 기출문제를 체화시키고 보셨으면 좋겠어요. 기출문제를 보자마자 풀이과정이 떠오를 정도 일 때 푸시는 것을 권장합니다. 규토 N제 해설에서 복습으로 추천 드린 기출문제가 문제를 풀 당시 떠올랐다면 더할 나위 없이 좋겠죠? ㅎㅎ 안정 2등급 이상 (+기출완료) 또는 라이트 N제를 완벽 체화가 고득점 N제 수1+수2를 풀 전제조건입니다.
그리고 만약 자신이 안정적인 1등급이 나온다면 시간을 재고 푸는 것도 방법이 될 수 있습니다. (킬러의 경우 10~15분 정도 잡고 풀어보세요~)
고득점 N제 수1+수2는 라이트 N제와 밀접하게 연계하여 설명하였습니다. (고득점 N제 해설에 같이 보면 좋은 라이트 N제 참고문항과 관련 개념페이지 수록) 2~3등급 진동이신 분들은 라이트 N제를 풀고 고득점 N제로 넘어가시길 권합니다. 빈틈을 메워주고 더욱 더 단단하게 만들어 줄겁니다. 개인적으로 고득점 N제 가기전에 확통을 응시하시는 분들은 라이트 N제를 하고 가셨으면 좋겠습니다..
사실 기출킬러까지 대거 수록하여 절대 쉽지 않습니다. 고득점 N제에 넣어도 될 만한 자작문제도 라이트 N제에 다수 수록하였습니다.
(참고로 고득점 확통은 라이트 확통에 흡수되었습니다. 라이트 확통, 미적분, 기하의 경우 라이트 수1,수2에 비해 트레이닝 1 스텝 난이도가 다소 높기 때문에 N제 느낌으로 보셔도 좋습니다.)

또 다른 분 계시나요~ 편하게 질문하세요~ 저기 박보영 닮으신 여학생! 말해보세요~

## Q. 어떤 식으로 규토 N제를 공부를 해야할까요?

책에 규토 N제 100% 공부법이라고 적어놨어요.(앞에서 봤죠??ㅎ) 효과를 극대화하기 위해서 꼭 그렇게 해보셨으면 합니다. 아니 꼭! 제발 그렇게 해보셨으면 합니다. 아마 대다수의 학생들이 양치기 용도로 규토 N제를 대할 것 같아요. 여러 커뮤니티를 잘 살펴보면 규토 N제 O일 컷 가능? 이라는 말을 종종 볼 수 있는데요. 이건 정말 미친 짓이라고 생각해요. 문제만 풀면 정말 아무것도 남지 않습니다. 아 뭔가를 해냈구나! 라고 다소 기분만 좋을 뿐입니다. 시간이 지나면 어차피 기억나지도 않습니다. 바가지에 구멍 뚫어 놓고 물을 들이 부어보세요. 처음에는 막 넘칠 것처럼 보이지만 시간이 지나면 한 방울도 남지 않습니다. 복습도 열심히 하고 치열하게 고민(자기 스스로 논리력과 사고력을 자극해야 합니다)해야 질적 성장이 일어난다고 생각합니다. 규토N제 100%공부법에 적혀있는 대로 하시는 것이 best입니다. :D

아주 참여도가 좋네요 ㅎㅎ 저쪽에 N수의 포스를 뿜고 계신 아저씨(?!) 장난이고요. 남학생 말해보세요~

## Q. 규토 N제 문항의 성격이 궁금합니다!

많은 분들이 오해하고 계시는 부분이 있는 것 같습니다. 규토 N제도 강의 교재입니다. 다만 다른 강의 교재와는 다르게 제가 책 속에 있을 뿐이죠. 그래서 해설편이 문제편보다 3.5배나 더 두껍습니다.
모든 문항들은 제자들을 위해서 만든 문제들입니다. 만들 당시에도 "현실성을 추구해서 모의고사 스타일로 만들어야지!" 라는 생각은 1도 하지 않았습니다. 그런 문제집들은 시중에 많으니까요. "어떻게 하면 한 문제를 풀면서 그동안 배웠던 스킬들과 교과개념들을 복습할 수 있게 만들지? 그리고 수능이 요구하는 사고력과 논리력을 향상시킬 수 있는 방법이 없을까?"를 고민한 끝에 만들게 되었습니다. 그렇기에 시중문제들과 달리 2~3개의 연결관계가 아닌 4~5개의 연결관계(+모래주머니 효과)를 풀어내도록 제작하였습니다. **(다만 2021개정 이후부터는 기존문제 중 퀄리티가 떨어지거나 case가 지나치게 과도한 문항은 삭제시켰고 추가된 신규문항들은 최신 트랜드를 적극 반영하여 최대한 현실성 있게 제작하였습니다.)** 애초에 책 소개에도 써있지만 출판하고자 만든 문제들이 아니기 때문입니다. 그렇기에 문제만 풀고 마는 식, 다시 말해 양치기로만 문제집을 대하는 것은 절대 추천하지 않습니다. 양치기 하려면 다른 문제집을 알아보세요.
규토 N제는 해설을 완전히 정독하고 자기 것으로 만들어야지 규토를 풀었다고 말할 수 있습니다. 애초에 강의교재로 만든 것이니까요. 일종에 분석서? 같은 개념으로 보시면 될 것 같습니다. 제가 직접 만들었기 때문에 출제의도가 무엇이고 그 문제에 사용된 중요한 개념들, 같이 풀어보면 좋을 것 같은 기출문제, 코멘트 등이 자세히 수록되어 있습니다. ㅎㅎ또한 구어체로 만들었기 때문에 해설을 읽다보면 제가 말하는 소리가 들리도록 만들었습니다. 그래서 해설지라고 하지 않고 해설강의라고 명명하였습니다. :D

자 마지막 한 분만 더 받을게요~ 저기 회색 후드티 입고 있는 남학생 ! 말해보세요

## Q. 오늘 배송을 받았습니다. 풀어봤는데 수학2가 많이 어려워요. 괜찮을까요?

잘 안 풀리시는 것이 정상입니다 ㅎㅎ 그만큼 많이 성장할 수 있다는 것이니 너무 상심하지 마세요~ 최대한 100퍼센트공부법에 적힌대로 해보세요. 보통 문제들과는 다르게  한 문제씩 풀어보고 해설에서 배운 내용들을 다른 문제에 적용시켜보세요.( 한 번에 여러 문제들을 풀고 한꺼번에 해설을 보시지 마세요. ) 그냥 문제만 풀면 아무것도 남지 않아요. 그 문제를 완벽히 체화시키고 넘어가는 것이 좋습니다. 난이도 순서대로 배치했기 때문에 점진적으로 사고를 확장하실 수 있습니다. 그러니 너무 겁먹지 마세요 ㅎㅎ 규토 N제에 있는 문항들은 보통문제(2~3개의 연결관계)와는 다르게 4~5개의 연결관계와 복잡한 case분류를 하도록 제작했습니다. 운동선수들이 모래주머니를 차고 훈련하는 것과 마찬가지 효과를 얻도록 만들었습니다. (지금은 어려우실 수 있지만 나중에 체화하시고 시중문제들을 보시면 답이 너무 그냥 띡 나온다는 인상을 받게 되실 거예요. ㅎㅎ)
그리고 모든 문제들이 손쉽게 풀리면 그게 무슨 도움이 되겠습니까.. 기분은 좋을 수 있겠죠.. 그렇지만 틀린 것을 정복할 때! 바로 그때 질적 성장이 일어난다고 생각해요~ 해설도 자세히 써놨으니까(진짜 옆에 앉혀놓고 과외해준다는 생각으로 작성했습니다 흐흐) 이해하시는데 큰 무리는 없을 거예요 ㅎㅎ 화이팅입니다! 너무 기죽지마세요 그게 정상입니다. 양보단 질로 갑시다. 빨리 문제집을 끝내야지 보다는 (진짜 그건 미친짓이라고 생각해요.. 한번 보고 넘어가면 누누이 얘기하지만 딱히 도움이 되지 않습니다. 약간의 뿌듯함만 있을 뿐이에요.) 질적 성장이 일어날 수 있도록 치열히 고민해보고 복습도 하고 (100퍼센트공부법으로 하시는게 베스트입니다. 저도 그렇게 공부했었고 많은 과외학생들의 성장을 눈으로 봤습니다.) 그러셨으면 좋겠어요 ㅎㅎ

많은 학생들을 만나 보았는데요. ㅎㅎ 또 다른 궁금한 점(규토 N제 문제 질문 등)이 또 있으시면
언제든지 **규토의 가능세계** (네이버 질문카페)에 글을 남겨주세요~

## 〈 맺음말 〉

지금으로부터 19년 전 중학교 2학년이었던 규토는 “버킷리스트”라는 것을 작성하게 됩니다.
많은 항목들이 있었지만 그 중에서 가장 기억에 남는 것은 바로 저 만의 책을 만드는 것이었습니다.
그로부터 12년 후 규토 수학 고득점 N제를 발간하게 됩니다.
첫 책을 받았을 때의 감동... 아직도 잊을 수가 없네요..ㅠㅠ

벌써 6년이라는 세월이 흘렀네요.

규토 수학 고득점 N제 2017 ⇒규토 수학 고득점 N제 2019 ⇒ 규토 수학 고득점 N제 2020 (가/나)
⇒ 규토 수학 라이트 N제 2021 (수1/ 수2) + 고득점 N제 2021 (가/나)
⇒ 규토 라이트 N제 2022 (수1/수2/확통/미적), 고득점 N제 2022 (수1+수2/미적)
⇒ 규토 라이트 N제 2023 (수1/수2/확통/미적/기하), 고득점 N제 2023 (수1+수2/미적)

올해 나오게 될 규토 라이트 N제 2024 (수1/수2/확통/미적/기하), 고득점 N제 2024 (수1+수2/미적), 규토 모의고사까지 아주 감개무량하네요. ㅎㅎ

계속해서 발전해 나가는 규토 N제가 되겠습니다! 내년 개정판은 더 더욱 좋아지겠죠?-_-;;

2021년부터 네이버 카페 (규토의 가능세계)를 통해 질문을 받고 있습니다~
https://cafe.Naver.com/gyutomath

많은 가입부탁드립니다 :D

질문뿐만 아니라 각종 자료도 업로드하면서
차츰차츰 업그레이드 해나가겠습니다~ㅎㅎ

규토 N제를 푸시는 모든 분들께 감사의 인사를 전하면서 저는 해설로 찾아뵐게요~ :D

---

참고로

① 네이버 블로그 (규토의 특별한 수학) 이웃추가
② 오르비에서 (닉네임 : 규토) 팔로우
③ 네이버 카페 (규토의 가능세계) 가입

하시면 규토 N제에 대한 최신 소식(정오표 or 보충자료 등)을 누구보다 빠르게 받아 보실 수 있습니다~

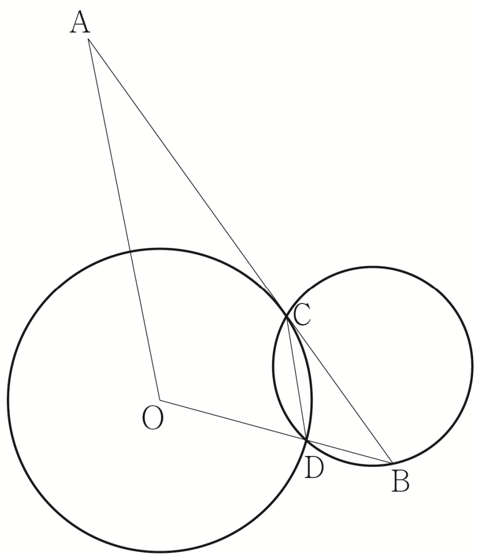
규 토
고 득 점
N 제

# 문제편

수학1 영역

## 007

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원이 삼각형 OAB의 변 AB에 접한다. 이때의 접점을 C라 할 때, $\overline{AC}=2\overline{BC}$ 이다.
원과 선분 OB와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $S_1$, 삼각형 BCD의 넓이를 $S_2$라 할 때, $2S_1=15S_2$이다. 삼각형 BCD의 외접원의 넓이는 $k\pi$이다. $k$의 값을 구하시오.




정답 및 해설 p.022

## 004

사차함수 $f(x)$는 $f'(3)=f(3)$ 이고, 다항함수 $g(x)$는 $g'(0)=3$ 이다.
함수

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq 0) \\ g(x) & (x<0) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킨다.

| |
|---|
| (가) $a<0$, $b<0$ 인 임의의 두 실수 $a$, $b$ 에 대하여<br>$\dfrac{b}{h(b)-36}=\dfrac{a}{h(a)-36}$ 이다. |
| (나) 함수 $\lvert h(x)\rvert$ 는 $x=p$, $x=3$, $x=4$ 에서만 극솟값을 갖는다. |

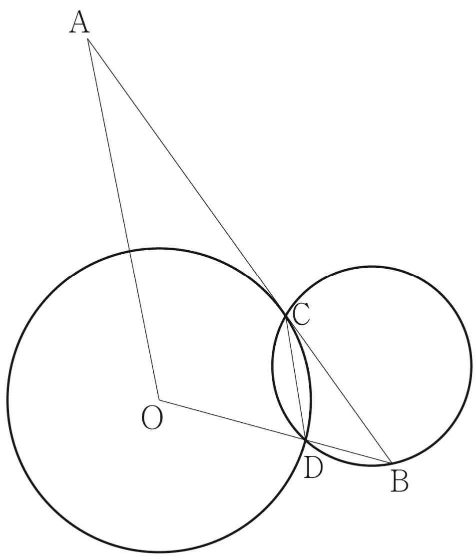
$\dfrac{h(8)}{p}$ 의 값을 구하시오.

정답 및 해설 p.119

수학2

## 007

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 3인 원이 삼각형 OAB의 변 AB에 접한다. 이때의 접점을 C라 할 때, $\overline{AC}=2\overline{BC}$ 이다.
원과 선분 OB와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 OAB의 넓이를 $S_1$, 삼각형 BCD의 넓이를 $S_2$라 할 때, $2S_1=15S_2$이다. 삼각형 BCD의 외접원의 넓이는 $k\pi$이다. $k$의 값을 구하시오.




**출제의도**

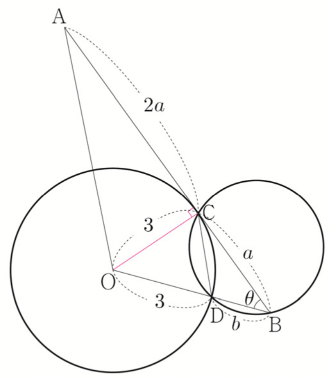
① $\angle OCB=90°$
② $2S_1=15S_2$를 활용해 선분 BD의 길이를 구할 수 있는가?
③ "삼각함수 같다" Technique과 코사인 법칙을 사용하여
선분 CD의 길이를 구할 수 있는가?
④ 사인법칙을 통해 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

**해설강의**

우선 원에 접한다고 했으니 보조선을 그어 봅시다~
(원의 중심과 접점을 이은 수직 보조선 !)

$\overline{CB}=a$, $\overline{BD}=b$라 해봅시다~

$\overline{AC}=2\overline{BC}$ 라고 했으니까 $\overline{AC}=2a$ 가 되겠죠?




$\angle DBC=\theta$라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times 3a\times(3+b)\times\sin\theta$

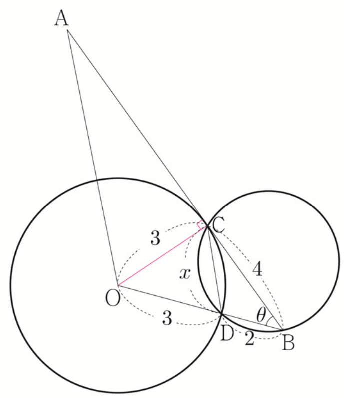
$S_2=\frac{1}{2}\times a\times b\times\sin\theta$ 이겠죠? ㅎㅎ

$2S_1=15S_2$ 을 조건을 이용해봅시다~

$3a(3+b)\sin\theta=\frac{15}{2}ab\sin\theta \Rightarrow 6+2b=5b \Rightarrow b=2$

$b=2$이므로 $\overline{BO}=5$가 되겠죠? 삼각형 BOC는 직각삼각형이니까

피타고라스의 정리에 의해서 $\overline{BC}=4$가 되겠군요~




직각삼각형 OBC 을 이용하면 $\sin\theta=\frac{3}{5}$ 인 것이

자명하죠? 삼각형 BDC의 외접원의

반지름은 사인법칙으로 구하면 되니까

선분 CD의 길이만 찾으면 되겠군요~

$\overline{CD}=x$라 하면

“삼각함수 같다” Technique에 의해서

(삼각형 OBC에서의 $\theta$와 삼각형 BCD에서의 $\theta$는 서로 각이 같다.)

$\frac{4}{5}=\frac{2^2+4^2-x^2}{2\times2\times4} \Rightarrow \frac{64}{5}=20-x^2 \Rightarrow x^2=\frac{36}{5} \Rightarrow x=\frac{6}{\sqrt{5}}$

사인법칙에 의해서

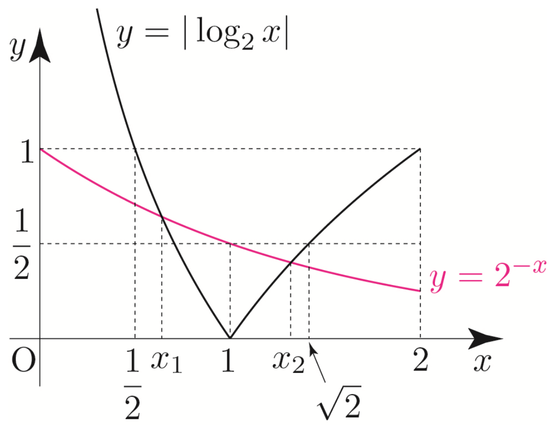
$\frac{x}{\sin\theta}=2R \Rightarrow \frac{\frac{6}{\sqrt{5}}}{\frac{3}{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}=2R \Rightarrow R=\sqrt{5}$

따라서 외접원의 넓이는 $5\pi$겠군요~

답 5

보기 ㄱ에서 $\frac{1}{2} < x_1 < 1 < x_2 < \sqrt{2}$ 을 물어보았으니

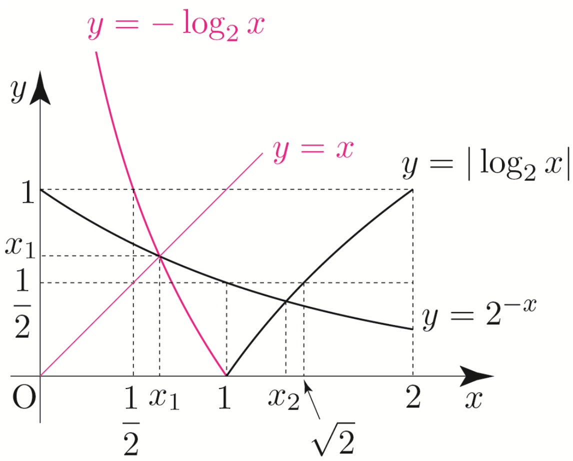
$\frac{1}{2}$ 과 1과 $\sqrt{2}$ 에 집중하여 보조선을 그어 판단해봅시다~




따라서 ㄱ은 참이겠군요~

그런데 $y = -\log_2 x$와 $y = 2^{-x}$는 [1]서로 역함수 관계이므로

$y = x$에 대하여 대칭이겠죠? 즉, $x_1 = -\log_2 x_1 = 2^{-x_1}$가 성립하겠군요~




보기 ㄴ은 $\log_2 \frac{1}{x_1 x_2} < x_1 - 2^{-\sqrt{2}}$ 인 것을 물어보았죠?

뭔가 복잡해 보이네요 -_-;; 조금 식을 변형해봅시다~

$$\log_2 \frac{1}{x_1 x_2} < x_1 - 2^{-\sqrt{2}} \Rightarrow -\log_2 x_1 x_2 < x_1 - 2^{-\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow -\log_2 x_1 - \log_2 x_2 < x_1 - 2^{-\sqrt{2}}$$

이때 $-\log_2 x_1 = x_1$이므로

$-\log_2 x_2 < -2^{-\sqrt{2}} \Rightarrow \log_2 x_2 > 2^{-\sqrt{2}}$와 같겠죠?

1) <관계식>
$f(x)$와 $g(x)$가 서로
역함수관계이면
$f(g(x)) = x$가 성립하죠?

$-\log_2(2^{-x}) = x$이므로
$y = -\log_2 x$와 $y = 2^{-x}$는
서로 역함수임을 손쉽게
알 수 있습니다.

함수 $y=\log_2 x$에서 $x=x_2$일 때, 함숫값이 $\log_2 x_2$이고
함수 $y=2^{-x}$에서 $x=\sqrt{2}$일 때, 함숫값이 $2^{-\sqrt{2}}$이므로
앞서 그린 그림을 통해 판단하면 $\log_2 x_2 > 2^{-\sqrt{2}}$임이 자명하죠?
따라서 ㄴ은 참이겠군요~

이제 대망의 ㄷ을 판단해봅시다~

$$\frac{2^{-\sqrt{2}}-x_1}{x_2-x_1} < \frac{2^{-\sqrt{2}}-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}-1}$$

하.. 살짝 막막하네요 -_-;; 어떻게 해야할까요?
우선 우변을 보니 $\left(\sqrt{2},\ 2^{-\sqrt{2}}\right)$와 $\left(1,\ 2^{-1}\right)$의 기울기로 해석할 수 있겠군요.

뭔가 기울기를 물어본 것 같은데 좌변을 해석하기가 만만치 않은 것 같습니다;;

라이트 N제에서도 계속 언급했지만 ㄱ,ㄴ,ㄷ문제는 ㄱ,ㄴ,ㄷ이 유기적으로
연결되어 있다는 생각을 반드시 해야 한다고 했었죠? ㄱ,ㄴ은 ㄷ을 위한
징검다리 역할일 가능성이 크기 때문이라고 했었죠?

잘 살펴보니 $2^{-\sqrt{2}}-x_1$가 굉장히 낯이 익죠?? ㄴ에서 등장했던 식이군요!
보기 ㄴ의 양변에 $-1$을 곱해봅시다~

$$\log_2 x_1 x_2 > 2^{-\sqrt{2}}-x_1 \Rightarrow \log_2 x_1+\log_2 x_2 > 2^{-\sqrt{2}}-x_1$$

양변에 $x_2-x_1$을 나눠도 부등호 방향은 변하지 않겠죠? $\left(\because\ x_2-x_1>0\right)$

$$\frac{\log_2 x_2+\log_2 x_1}{x_2-x_1} > \frac{2^{-\sqrt{2}}-x_1}{x_2-x_1}$$

좌변을 기울기로 보기 위하여 $+\log_2 x_1$을 변형시켜봅시다~

$$\frac{\log_2 x_2-\left(-\log_2 x_1\right)}{x_2-x_1} > \frac{2^{-\sqrt{2}}-x_1}{x_2-x_1}$$ 이므로

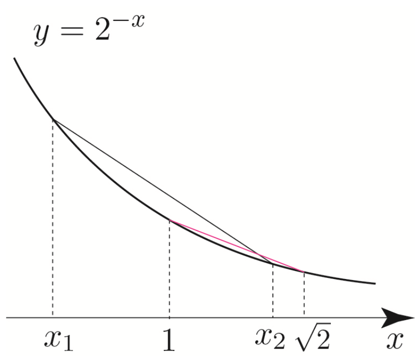
$$\frac{2^{-\sqrt{2}}-2^{-1}}{\sqrt{2}-1} > \frac{\log_2 x_2-\left(-\log_2 x_1\right)}{x_2-x_1}$$ 만 보이면 ㄷ은 참이겠죠?

이때 두 곡선 $y=\left|\log_2 x\right|,\ y=2^{-x}$가 만나는 두 점의 $x$좌표를 $x_1,\ x_2$라 했으니

$$\frac{\log_2 x_2-\left(-\log_2 x_1\right)}{x_2-x_1} = \frac{2^{-x_2}-2^{-x_1}}{x_2-x_1}$$ 이겠죠?

즉, $\dfrac{2^{-\sqrt{2}}-2^{-1}}{\sqrt{2}-1} > \dfrac{2^{-x_2}-2^{-x_1}}{x_2-x_1}$만 보이면 ㄷ은 참이겠군요~

$y=2^{-x}$의 그래프를 그려서 판단해봅시다~




기울기가 음수이므로 $\dfrac{2^{-\sqrt{2}}-2^{-1}}{\sqrt{2}-1} > \dfrac{2^{-x_2}-2^{-x_1}}{x_2-x_1}$ 가 성립하겠군요!

따라서 ㄷ은 참이겠군요~

답 ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

**출제자의 한마디**

역함수 관계를 물어보는 문제는 [2]라이트 N제에서도 많이 접해봤었죠?ㅎ
역함수 조건이 이용될지 안 될지 모르기 때문에 만약 역함수 관계가 보인다면 미리 표시해두는 것이 좋습니다. 이 문제에서도 문제풀이 도중에 역함수 관계를 이용하여 관계식 $x_1=-\log_2 x_1=2^{-x_1}$을 끌어내는 것이 바람직합니다.

$a>c$를 바로 판단하기 힘드니 $b$를 도입하여 $b>c$, $a>b$인 것을 바탕으로 $a>b>c$임을 판단하는 것이 출제의도인 문제였습니다~

[3]2022학년도 6월 15번 문제에서는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 유기적으로 연결되어 있다기 보다는 다소 독립된 보기를 물어보았습니다. 이렇게 독립적으로 출제될 수도 있지만 ㄱ, ㄴ, ㄷ을 풀 때는 ㄱ, ㄴ, ㄷ이 [4]유기적으로 연결되어 있다는 생각을 해주시는 것이 좋습니다.

2) <참고>
2024 라이트 N제 수1
문제편
p117 067번
p122 088번
p122 089번
p124 093번
p130 105번
p132 114번

3) <참고>
2024 라이트 N제 수1
문제편 p231 106번

4) <참고>
2024 라이트 N제 수1
문제편 p131 110번

## 006

최고차항의 계수가 1 이고 $\left(\frac{f'(k)}{k}\right)^k = 1\ (k=1,\ 2,\ 3)$을

만족시키는 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 집합 $S$ 를

$$S = \left\{ x \mid \int_1^x \{f'(t) - t\}dt = 0 \text{ 이고 } x \neq 3 \right\}$$

라 하고, $n(S) = 2$ 일 때, 집합 $S$ 의 모든 원소의 합은?

① $\frac{10}{3}$ ② $\frac{11}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ $\frac{17}{3}$ ⑤ $\frac{20}{3}$

**출제의도**

① $\left(\frac{f'(k)}{k}\right)^k = 1$ 식을 통해 $f'(2) = 2$ or $-2$로 case 분류할 수 있는가?
② $n(S) = 2$ 조건을 활용할 수 있는가?
③ $f(x)$ 에 관해 식 세우기 !

### 해설강의

$\left(\frac{f'(k)}{k}\right)^k = 1$ (단, $k=1,\ 2,\ 3$) 이라고 했으니까 $k$에 각각 대입해보면

$f'(1) = 1$

$(f'(2))^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} f'(2) = 2 \\ f'(2) = -2 \end{cases}$

$(f'(3))^3 = 27 \Rightarrow f'(3) = 3$

($f'(2) = 2$ , $f'(2) = -2$가 될 수 있는 것이 point !)

이렇게 case 분류할 수 있겠죠?

① $f'(1) = 1,\ f'(2) = 2,\ f'(3) = 3$
② $f'(1) = 1,\ f'(2) = -2,\ f'(3) = 3$

① $f'(1)=1,\ f'(2)=2,\ f'(3)=3$

조심하세요!
$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이니까 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수는 4가 되겠죠?

자 이제 식 세우기를 해봅시다!
$f'(x)=4x^3+ax^2+bx+c$ 라고 두고 문자가 3개이고 식이 3개이니까
풀 수 있겠죠?
그렇지만 ! 더 효과적으로 식 세우는 방법을 알려드리고자 이 문제를 만들었어요.
일단 $f'(1)=1,\ f'(2)=2,\ f'(3)=3$ 에서 오른쪽 항을 왼쪽으로 넘기면
$f'(1)-1=0$ , $f'(2)-2=0$ , $f'(3)-3=0$ 이렇게 되겠죠?

여기서 $f'(1)$ , $f'(2)$, $f'(3)$를 $f'(x)$ 로 변환하면
$-1,\ -2,\ -3$을 $-x$ 라고 쓸 수 있겠네요.

$f'(x)-x=h(x)$ 라고 하면 $h(1)=0$ , $h(2)=0,\ h(3)=0$ 을 만족하므로
$(x-1)(x-2)(x-3)$ 을 인수로 가지겠죠? 또한 $f'(x)$가 삼차함수니까 $h(x)$는
당연히 삼차함수가 돼요. 여기서 $-x$ 는 $f'(x)$ 의 최고차항의 계수에 영향을 끼치지
않으니까 $h(x)$ 의 최고차항의 계수는 4가 되겠죠?
결국 $h(x)$ 는 최고차항이 계수가 4인 삼차함수군요 !
$\therefore h(x)=f'(x)-x=4(x-1)(x-2)(x-3)$

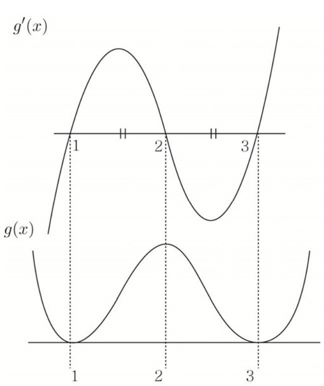
따라서 [1] $f'(x)=4(x-1)(x-2)(x-3)+x$ 라는 식을 세울 수 있어요.

$\int_1^x \{f'(t)-t\}\,dt = g(x)$ 라고 보면

$S=\left\{ x \mid \int_1^x \{f'(t)-t\}dt=0 \text{ 이고 } x\neq 3 \right\} \Rightarrow S=\{ x \mid g(x)=0 \text{ 이고 } x\neq 3 \}$

$g'(x)=f'(x)-x$ 와 $g(1)=0$ 을 뽑아먹을 수 있겠네요.
(거의 기계처럼 나와야 해요~)

$f'(x)-x=4(x-1)(x-2)(x-3)$ 이기 때문에 그림을 그리면




[2] $g'(x)$가 $(2,\ 0)$에 점대칭 되어져 있으니까
$x$축과 둘러싸인 넓이가 서로 같겠죠?
따라서 $g(x)$를 그리면 $x=2$에 대칭인
사차함수가 나와요.
$g(1)=0$ [3] $x$축 설정 ! (다음 페이지에 설명)

$g(x)=0$ 이 되는 것은 $x=1, 3$이죠?
그렇지만 $x\neq 3$ 이기 때문에 $x=1$만 돼요.
따라서 $n(S)=1$이니까 조건을 만족하지 않겠죠?

1)
처음에는 어렵지만 계속 연습하다
보면 너무나 당연히 식을 세울 수
있을 거예요.

<참고>
2024 라이트 N제 수2
문제편 p180

ex)
최고차항의 계수가 1인
삼차함수 $f(x)$에 대하여
$f(1)=2$ , $f(2)=4,\ f(3)=6$
$f(x)=?$
한번 적용시켜 보세요.
다음 페이지에 답을 적어
놓을게요.

2)
$g'(x)$가 $(2,\ 0)$에 점대칭
되어져 있는 것을
직관적으로 보고 알 수도 있지만
식으로 보이려면 어떻게 해야
할까요?

$f(x)+f(2a-x)=2b$
이 의미하는 것이 $f(x)$ 가
$(a,\ b)$ 에 점대칭 되어
있다는 것이니까
$f(x)+f(4-x)=0$ 만
만족시키면 되겠죠?
$4(x-1)(x-2)(x-3)+$
$4(3-x)(2-x)(1-x)=0$
성립하네요 !

따라서 $(2,\ 0)$에 점대칭
되어져 있다고 할 수 있어요~

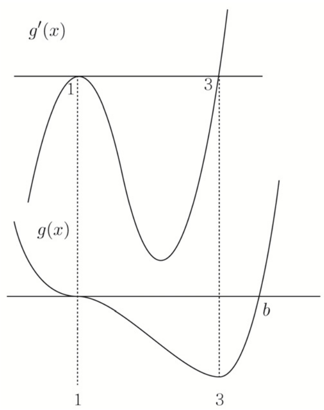
<참고>
2024 라이트 N제 수2
문제편 p183

② $f'(1)=1,\ f'(2)=-2,\ f'(3)=3$

마찬가지로 식을 세워볼까요~ 여기서는 $f'(1)-1=0,\ f'(3)-3=0$ 밖에 없으니까 한 번에 $f'(x)-x$ 를 구할 수는 없어요. 저번에 배운 미지수 Technique !을 써볼게요~

$f'(x)-x=4(x-1)(x-3)(x-a)$

☆ 여기서 $(x-a)$ 라고 쓴 이유는 ?
$f'(x)-x$ 가 삼차이고 서로 다른 2개의 실근을 갖기 때문에 무조건 실근 하나를 더 가져야 하겠죠?
$f'(2)=-2$ 를 만족해야 하니까 $x=2$ 를 대입하면
$f'(2)-2=4(2-1)(2-3)(2-a)$
$f'(2)-2=-4(2-a)=-8+4a$
$-4=-8+4a \Rightarrow a=1$
$\therefore f'(x)-x=4(x-1)^2(x-3)$ case ① 과 마찬가지로
$g'(x)=4(x-1)^2(x-3)$ 그래프를 그리면




$g(1)=0$ $x$축 설정!

$g(x)$ 에 대해 식을 세워봅시다 ! 나올 때 마다 적용시켜주세요~ 미지수 $b$ 놓고 식을 세우면
$g(x)=(x-1)^3(x-b)$
$g'(x)=3(x-1)^2(x-b)+(x-1)^3$
$\quad\ =(x-1)^2(3x-3b+x-1)$
$g'(3)=0$ 이니까 $b=\dfrac{11}{3}$

결국 구하고자 하는 것은 $g(x)=0$ 을 만족하고 3이 아닌 $x$값이죠?
따라서 $S=\left\{1,\ \dfrac{11}{3}\right\}$ 가 되겠죠?

답 ③ $\dfrac{14}{3}$

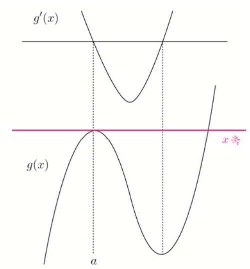
**출제자의 한마디**

만약 관성적으로 풀어서 $f'(2)=-2$ 를 보지 못했다면 당황할 수 있는 문제에요. 너무나 당연하지만 막상 긴장상태에서 풀면 보이지 않을 수 있어요. 조심하세요~집합 $S$에 있는 $x\neq 3$ 이라는 조건을 준 이유는 case ①을 제거해 주기 위해서예요. $\displaystyle\int_1^x \{f'(t)-t\}\,dt=g(x)$ 로 바꾸는 Technique도 꼭 챙겨가세요. 계속 식 세우기 문제가 나오고 있죠? 적용시켜 보셨나요? 앞으로도 계속 나오니까 꿈에 나올 정도로 반복해서 적용시켜 주세요~ 이 문제집에서 식 세우기만이라도 완벽히 알아가면 문제 풀 때 큰 도움이 될 것이라 생각해요.

3)
① $g(x)=\displaystyle\int f(x)\,dx$
② $g(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$
①, ②의 차이점은 무엇일까요?

①도 미분하면
$g'(x)=f(x)$ 이고

②도 미분하면
$g'(x)=f(x)$ 에요.
①은 $x$축이 어디 있는지 모르지만
②는 $g(a)=0$ 임을 토대로 $x$축을 설정할 수 있어요.




<참고>
2024 라이트 N제 수2
문제편 p260

1) <정답>
ex)
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여
$f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(3)=6$
$f(x)=?$

답은
$f(x)$
$=(x-1)(x-2)(x-3)+2x$

## 007

최고차항의 계수가 1 인 사차함수 $f(x)$ 와 일차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-g(x)}{x-a}=0$
> (나) $f(x)-f(4-x)=g(x)-g(4-x)$
> (다) $\displaystyle\int_a^2 f'(x)\,dx = \int_a^2 g'(x)\,dx + 16$

$f(6)-g(6)$ 의 값은? (단, $a$는 실수이다.)

① 142 ② 144 ③ 146 ④ 148 ⑤ 150

**| 출제의도 |**

① $f(x)-g(x)=h(x)$ 라고 보고 조건을 reading 할 수 있는가?
(New 함수 Technique!)

② $f(x)-g(x)$ 에 관한 식세우기 !

### 해설강의

이 문제의 핵심은 $f(x)-g(x)=h(x)$ 라고 두는 거에요.
(참고로 $f(6)-g(6)$ 의 값은 ? 에서 힌트를 드렸어요. :D 느끼셨나요?)

New 함수 두는 Technique! 기억하세요. 이전에도 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = g(x)$ 로 보는 Technique 있었죠? 같은 맥락에서 기억해주세요~

$h(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 사차함수겠지요?

(가) 조건부터 바꿔 봅시다!

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{x-a}=0$$

[1] 분모가 0으로 가는데 수렴하므로 당연히 분자는 0으로 가겠죠?

1)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)}=a & (a\text{는 상수}) \\ \lim\limits_{x \to 0} g(x)=0 \end{cases}$$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}=h(x)$ 라 두면

$\lim\limits_{x \to 0} h(x)=a$ 겠죠?

$f(x)=h(x)\,g(x)$ 라고
변형해서 양변에 극한을 취하면

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)=\lim\limits_{x \to 0} h(x)\,g(x)$

$h(x)$, $g(x)$ 는 수렴하니까

$\lim\limits_{x \to 0} h(x)g(x)$

$=\lim\limits_{x \to 0} h(x) \lim\limits_{x \to 0} g(x)$

$=a \times 0=0$

따라서 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)=0$

<참고>
2024 라이트 N제 수2
문제편 p45

그래프를 그리려고 하는데 무엇 때문에 난감하나요?
바로 $a$ 때문이죠? 그래프를 그릴 때 $x$축에 접하는 $a$값에 따라 그래프가 달라지겠네요?

크게 몇 가지로 case 분류할 수 있죠?

그래요. ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 이렇게 3가지로 구분할 수 있어요.
$x<0$ 일 때를 살펴볼까요? 자 $x<0$ 일 때는 $(x+a)^2x(x-a)$ 라고 했죠?
이것도 그래프를 그리려고 하니까 $a$ 때문에 난감해요. 따라서 $a$에 따라 case분류를 해줘야 해요.
case 분류를 해주면 마찬가지로 ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 이렇게 3가지로 구분이 되겠죠?
결국 ① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 경우만 case분류하면 되겠네요.

여기서 잠깐 !
"아니 그럼 규토쌤 무조건 이런 문제가 나오면
① $a>0$ ② $a=0$ ③ $a<0$ 로 case 분류해야 하나요?"
[1] 여러분이 대답해주세요. 아니죠? 그래프를 그리려니까 $a$ 때문에 난감해서 같은 그래프 개형이 나오도록 $a$의 범위를 case 분류 한 거예요.

이제 $A$ 집합의 의미를 파악해볼게요.

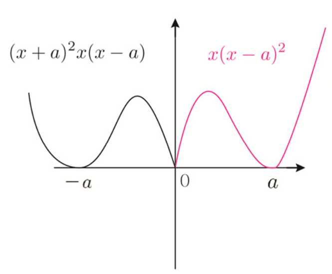
$$A=\left\{t \mid \lim_{x\to t+}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\neq\lim_{x\to t-}\frac{f(x)-f(t)}{x-t}\right\}$$

$x=t$ 에서 우미분계수와 좌미분계수가 다르다는 의미에요.
결국 미분이 불가능한 점의 $x$좌표가 $A$집합의 원소가 되겠죠?

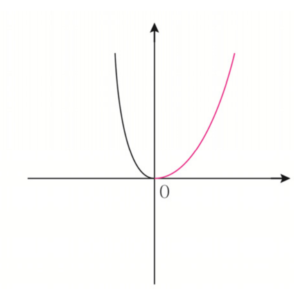
$B$집합은 $B=\{t \mid f(x)$ 는 $x=t$ 에서 극솟값을 갖고 $t\neq0\}$ 라고 했는데요.
극솟값을 가지면서 $t\neq0$ 를 만족해야 해요. 왜 하필 $t\neq0$일까요?
조건을 만족시키는 case를 제거하기 위함이에요~
출제자가 조건을 줄 때는 무엇인가 의도가 있다는 거예요. +_+

이제 $a$에 따라 case 분류 해봅시다!

① $a>0$




② $a=0$

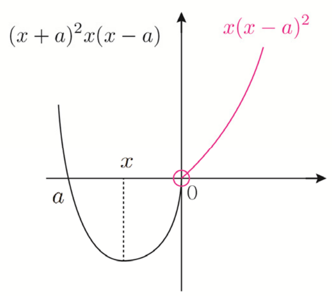



1) $f(x)=(x-1)(x-a)^2$ 이면

① $a>1$
② $a=1$
③ $a<1$

이렇게 3가지로 분류할 수 있겠죠?
이해 되셨나요?

③ $a<0$




여기서 point !

$x=0$에서 미분이 불가능해 보이시나요?
보기에는 그렇지만 가능할 수도 있고
불가능할 수도 있어요.
미분가능하려면 $x=0$에서 좌미분계수와
우미분계수가 같아야겠죠?
여기서 $x=0$에서 우미분계수는
$y=x(x-a)^2 \Rightarrow y'=(x-a)^2+2x(x-a)$이므로
$a^2$ 이 되겠죠?

좌미분계수는 $y=(x+a)^2x(x-a) \Rightarrow y'=2(x+a)x(x-a)+(x+a)^2(x-a)+(x+a)^2x$
이므로 $-a^3$ 이 되겠죠?
$a^2=-a^3$ 를 만족하는 $a$값에 한해서 $x=0$에서 미분이 가능해요.
$a^3+a^2=a^2(a+1)$ $a=0$ 와 $a=-1$ 이 나오지만 $a<0$ 이므로 $a=-1$ 만 되겠죠?
따라서 $a=-1$ 이면 $A$집합은 공집합이 나오겠군요.

이제 조건들을 따져 봅시다 !

| 구분 | ① $a>0$ | ② $a=0$ | ③ $a<0$ | |
|---|---|---|---|---|
| A집합 | $\{0\}$ | $\varnothing$ | $\{0\}$ | $\varnothing$ |
| B집합 | [2] $\{-a,\ a\}$ | $\varnothing$ | [3] $\{X_1\}$ | $\{X_2\}$ |
| 조건만족 | $A\cup B=B$ (X)<br>$B\neq\varnothing$ (O) | $A\cup B=B$ (O)<br>$B\neq\varnothing$ (X) | $A\cup B=B$ (X)<br>$B\neq\varnothing$ (O) | $A\cup B=B$ (O)<br>$B\neq\varnothing$ (O) |

따라서 조건을 모두 만족시키는 case는 ③ $a<0$ 에서 $a=-1$ 일 때예요.

$$f(x)=\begin{cases} x(x+1)^2 & (x\geq 0) \\ (x-1)^2x(x+1) & (x<0) \end{cases}$$

$f(4)=4\times 25=100$

답 ① 100

**출제자의 한마디**

이 문제의 point 는 $f(x)$ 를 그리기 위해 [4] $a$에 따라 case 분류를 하는 것과 ③ $a<0$ 에서 $a$가 $-1$일 때 미분가능이 됨을 파악하는 것이에요.
이 문제를 만들게 된 계기는 "계산은 최대한 줄이고 사고력으로만 접근하도록 문제를 만들 수 없을까"를 고민하던 중 탄생한 문제에요.
개인적으로 마음에 드는 문제 중 하나입니다~ 여러분도 풀면서 재밌지 않으셨나요? ㅎㅎ [5]비슷한 문제를 라이트 N제에서 이미 학습한 바 있었죠?

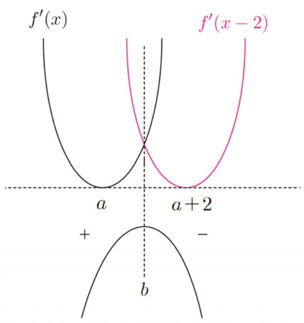
2)
$t\neq 0$ 때문에
$\{-a,\ 0,\ a\}$ 가 아니라
$\{-a,\ a\}$ 가 되겠죠?

3)
$\{X\}$ 에서 $X$를 직접 구할 수도 있지만 구하는 것을 의도하진 않았어요.

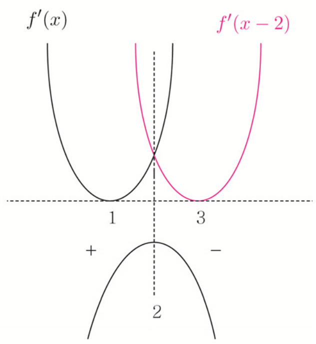
4) <참고>
2024 라이트 N제 수2
문제편 p277 094번

5) <참고>
2024 라이트 N제 수2
문제편 p137 050번

$f(x)$ 는 삼차함수니까 $f'(x)$ 는 이차함수가 되겠죠?




여기서 $f'(a)$ 의 함숫값은 중요하지 않아요.
$f'(x-2)$ 는 $f'(x)$ 를 $x$축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프죠? $f'(x)$ 와 $f'(x-2)$ 가 만나는 점을 경계로 왼쪽은 $f'(x-2)-f'(x)$ 의 부호가 + 가 되고 오른쪽은 - 가되겠죠? 따라서 $g(x)$ 를 그리면 $x=b$에서 극댓값을 갖는 그래프가 나와요.
(가) 조건에서 $x=2$ 에서 최댓값을 가지니까 $b=2$
$a$ 와 $a+2$ 는 $x=2$ 에 대칭이므로
$2a+2=4 \Rightarrow a=1$




따라서 다음과 같은 그래프가 나오겠죠?
$f'(x)=2(x-1)(x-p)+(x-1)^2$
$f'(x)$ 을 미분해서 $x=1$을 넣으면 0이 되겠죠?
($f'(x)$ 가 $x=1$에서 극솟값을 가지니까요~)

$f''(x)=2(x-p)+2(x-1)+2(x-1)$
$f''(1)=2(1-p)=0 \Rightarrow p=1$
따라서 $f(x)=(x-1)^3$ 가 돼요.

[1]물론 대칭성을 이용하지 않고 식으로 접근해도 Good이에요~

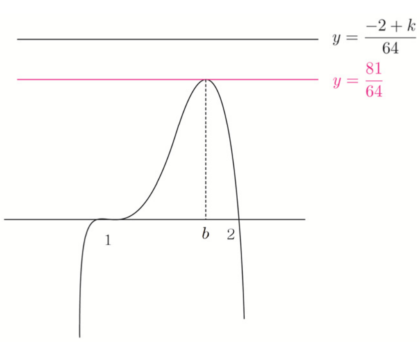
$f(x)=(x-1)^3$ 이니까 $g'(x)=3(x-3)^2-3(x-1)^2=-12x+24$

$$g(2)=\int_2^0 f'(t)\,dt+k=f(0)-f(2)+k=-2+k$$

$$g(1)=\int_1^{-1} f'(t)\,dt+k=f(-1)-f(1)+k=-8+k$$

결국 (나)를 통해 $k$ 의 범위를 알아내면 되겠군요.

$-12(x-1)^3(x-2) \le \dfrac{-2+k}{64}$ 그래프를 그려서 함수로 생각해봅시다~




$$y'=-3(x-1)^2(x-2)-(x-1)^3$$
$$=-(x-1)^2(4x-7)$$

따라서 $b=\dfrac{7}{4}$ 겠네요~

$$-12\left(\frac{7}{4}-1\right)^3\left(\frac{7}{4}-2\right)=\frac{81}{64}$$

$$\frac{81}{64} \le \frac{-2+k}{64} \Rightarrow 83 \le k$$

1)
식으로 접근해볼게요~
$f(x)=(x-1)^2(x-p)$
라 두고 미분하면
$f'(x)=(x-1)(3x-2p-1)$
겠죠?

$g(x)$ 도 다항함수이기 때문에 $x=2$ 에서 최댓값을 가지려면 $g'(2)=0$를 만족해야 돼요.
따라서
$f'(0)-f'(2)=0$ 이 되는 $p$ 를 찾아주면 되겠죠?

$f'(0)=2p+1$

$f'(2)=5-2p$

$f'(0)-f'(2)=2p+1-5+2p$
$=4p-4$

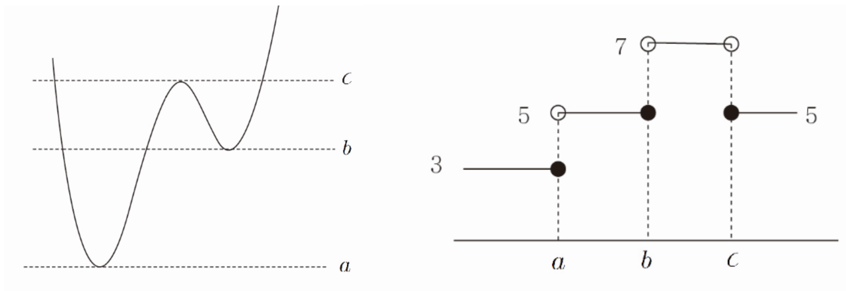
$\therefore p=1$

"아니 규토쌤 그냥 식으로 접근하면 이렇게 쉬운데 무엇하러 이렇게 까지 대칭성을 이용하나요?"

이 문제에서는 식이 굉장히 쉽게 느껴지죠? 그렇지만 $f'(x)$ 가 굉장히 복잡하면 문제를 구하기 어려울 수 있어요. 그 때는 쪼개서 생각하는 것이 훨씬 쉬울 수 있어요. 꼭 두 개다 알아가세요~

$f'(1)=f(1)=0 \Rightarrow (x-1)^2$ 로 case 분류 해보면

① 접할 때의 $t$를 각각 $a,\ b,\ c$ 라고 하고 $g(t)$ 그래프를 그리면



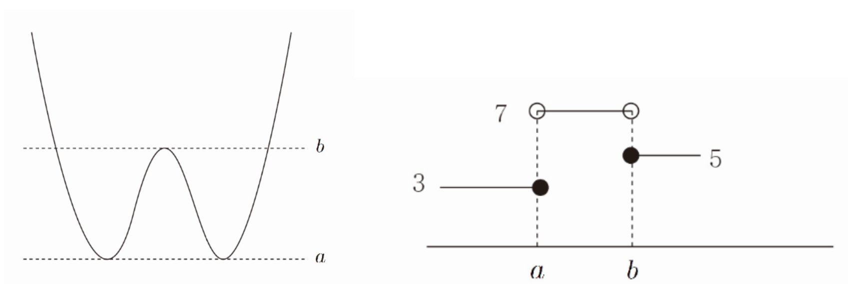

다음과 같이 그릴 수 있겠죠 ?

$A=\left\{a \mid \lim_{t\to a-} g(t) \neq g(a)\right\}$ 가 의미하는 것은 좌극한값과 함숫값이 다른 점을 찾으라는 것이에요. case ①일 때 찾아보면 $\{c\}$ 겠죠 ?

$B=\left\{a+16 \mid \lim_{t\to a+} g(t) \neq g(a)\right\}$ 가 의미하는 것은 우극한값과 함숫값이 다른 점을 찾으라는 것이에요. 마찬가지로 찾아보면 [1] $\{a+16,\ b+16\}$ 겠죠?

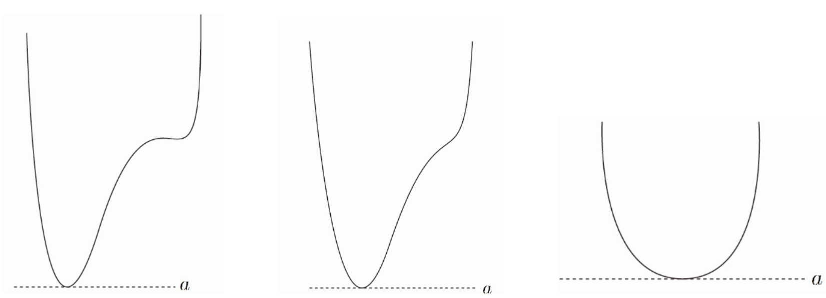
원소의 개수조차 다른데 $A=B$ 라고 했으니까 당연히 틀리겠죠?
다른 case 도 따져봅시다~

② 접할 때의 $t$를 각각 $a,\ b$라고 하고 $g(t)$ 그래프를 그리면

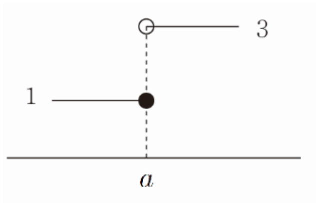



$A=\{b\}$ $B=\{a+16\}$ 겠죠? 오 ! $A=B$가 성립할 수 있겠네요.
결국 $A=B$가 의미하는 것은 극솟값+16=극댓값 이에요~

③ 접할 때의 $t$를 $a$라고 하고 $g(t)$ 그래프를 그리면




1) 조심하세요!
$B$집합은 불연속점의 $x$값에 16을 더해줘야 해요. 설마 $A$집합 안에 있는 $a$와 $B$집합 안에 있는 $a$가 같은 $a$라고 하진 않으셨죠? 집합의 표현 방법 중 조건제시법을 나타낸 것이에요. 원소가 무엇이 되는 가를 알려주는 수단에 불과해요. 헷갈리시면 안 돼요.



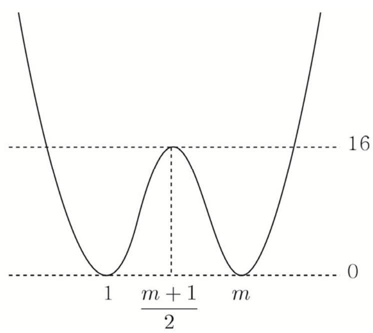

$A=\varnothing \quad B=\{a+16\}$ 이니까 $A=B$ 일 수 없겠죠?

따라서 결국 ! 만족하는 case 는 ②뿐이겠죠?

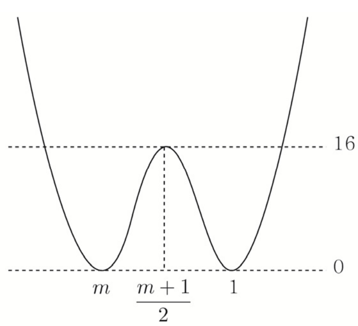
②개형이면서 $f'(1)=f(1)=0 \Rightarrow (x-1)^2$ 을 만족하는 case는 몇 가지죠?
2가지요? 하하 이 문제를 풀었던 대부분의 학생들이 답을 34 라고 해서 틀렸어요.
흐흐 일부러 실수하라고 34 를 보기에 넣었거든요. 보기에 34가 없었으면 다시 풀었겠지만 34를 보는 순간 아~ 답이구나 하고 찍을 수밖에 없으니까요.
경각심을 주기 위해서 넣었어요. 조심하세요! case는 총 3가지에요~

이제 case분류 해보고 이때까지 배운 식 세우기 Technique ! 을 총동원해서 식을 세워봅시다 !

② i ) $m>1$




② ii ) $m<1$



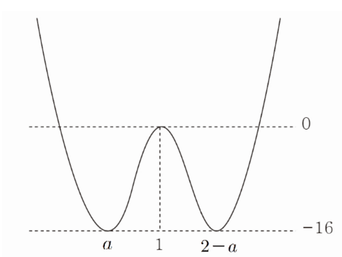

미지수 Technique ! 기억나시죠?

$f(x)=(x-1)^2(x-m)^2$ 여기서 $m$을 어떻게 찾죠? [2]극댓값을 갖는 $x$좌표를 구하면

$f\left(\frac{m+1}{2}\right)=\frac{(m-1)^4}{16}=16 \Rightarrow m=5,\ -3$

따라서 ② i ) 는 $f(x)=(x-1)^2(x-5)^2$ 가 나오고
② ii ) 는 $f(x)=(x-1)^2(x+3)^2$ 이 나와요.

② iii) 극댓값의 $x$좌표가 1인 경우




$x=1$ 에 대칭되어 있는 것을 이용해서 식을 세우면 $a<1$ 과 $a>1$ 인 case로 나눌 수 있어요.
저번에 배웠었죠? 해보니까 둘 다 똑같은 식이 나온다는 것을 이미 알고 있으니까 $a<1$ 인 case만 해볼게요.

$f(x)-(-16)=(x-a)^2(x-(2-a))^2$

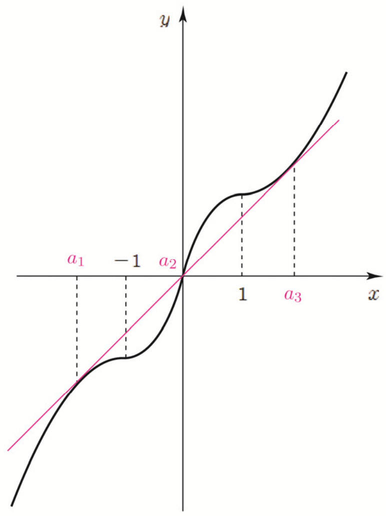
$f(1)=0$ 이니까

$16=(1-a)^4 \Rightarrow a=-1,\ 3$ 가 나와요.

$a$는 $a<1$ 니까 $a=-1$이 되겠죠?

따라서 $f(x)=(x+1)^2(x-3)^2-16$ 가 나와요.

2)
물론
$f(x)=(x-1)^2(x-m)^2$
을 미분해서 극댓값을 갖는 $x$ 좌표를 찾을 수도 있지만 대칭성을 이용하면 훨씬 빠르겠죠?




$a_3$ 만 구하면 $a_1$은 대칭성으로 구하면 되겠죠? ($a_3 = -a_1$)
$x>1$일 때 $F(x)$를 구해봅시다~

$$F(x) = \int_0^x |f'(t)|\,dt = \int_0^1 f'(t)\,dt + \int_1^x -f'(t)\,dt = 2f(1) - f(x)$$

(사실 이렇게 식으로 하지 않고 $f(x)$ 를 $y=f(1)$ 에 대하여 대칭시키고 평행이동 시켜주면 되겠죠? ㅎㅎ [1] $F(x) = 2f(1) - f(x)$로 바로 나오죠? ㅎ)

$a_3 = t$라 두면 $F(t) = 2f(1) - f(t) = t$ , $F'(t) = -f'(t) = 1$를 연립하면 되겠죠?

$$\frac{4}{k} + \frac{t^3-3t}{k} = t \Rightarrow t^3 - 3t + 4 = kt \;,\; \frac{3t^2-3}{k} = 1 \Rightarrow 3t^3 - 3t = kt$$

$$t^3 - 3t + 4 = 3t^3 - 3t \Rightarrow 2t^3 = 4 \Rightarrow t^3 = 2$$

따라서 $(a_3)^3 = 2$가 나오겠죠?

이제 마무리 계산해봅시다~
$\{g(a_3)\}^3 = (a_3)^3$ , $\{g(a_1)\}^3 = (a_1)^3 = -(a_3)^3$ ($\because a_1 = -a_3$) 이므로
$\therefore \{g(a_3)\}^3 - \{g(a_1)\}^3 = 2 - (-2) = 4$

답 4

**출제자의 한마디**

이 문제의 핵심은 [2] $\int_0^x |f'(t)|\,dt$ 의 그래프를 그리는 것이에요~ 처음이니까 case분류해서 그림을 그렸지만 이제는 $f(x)$ 만 보고도 그림을 그릴 수 있어야 해요. [3] 2019년 7월 교육청 수학 나형 30번 문제를 찾아서 적용해보세요~
(문제를 만들고 나서 하필...그해 7월에 나와 가지고....ㅠ 얼마나 허탈하던지;;; 근데 적중을 목적으로 규토N제를 푸는 건 아니잖아요? ㅎㅎ)

1)
$2k - f(x)$ 라는 말은
$y = f(x)$를 $y = k$에
대칭시키라는 말이에요.
$y = f(x)$ 그래프를
$y = k$에 대칭시키고 싶으면
$y \to 2k - y$ 를 넣어요.
$2k - y = f(x)$ 정리하면
$y = 2k - f(x)$ 가 나오죠?

2) <참고>
2024 라이트 N제 수2
문제편
p269 059번
p282 112번

3) <참고>
2024 라이트 N제 수2
문제편 p288 132번