2016학년도 대학수학능력시험 모의평가 3회

수학 영역(B형) 해설지

Epsilon

정답 및 해설

1) [정답] ② (출제자 : 15김효석)

[출제의도] 행렬의 계산을 할 수 있는가?

[해설]

$A-B=\begin{pmatrix} 4 & a-5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ 이므로 모든 성분의 합은 $a-1$ 이다.

따라서 모든 성분의 합이 3 이므로 $a=4$ 이다.

[별해]

같은 꼴의 행렬 A, B에 대하여, 행렬의 모든 성분의 합을 $S(A)$, $S(B)$ 라고 할 때, $S(mA+nB)=mS(A)+nS(B)$ 를 만족시킨다.

따라서 $S(A-B)=S(A)-S(B)$

$=(a+4)-5=a-1=3$

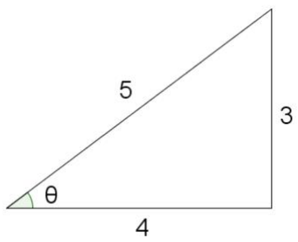
$\therefore\ a=4$ 이다.

2) [정답] ⑤ (출제자 : 15김효석)

[출제의도] 삼각함수의 배각공식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$\cos\theta=\frac{4}{5}$ 이므로 오른쪽 그림의 경우와 같고, $\sin\theta=\frac{3}{5}$ 이다.



$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$ 이다.

3) [정답] ③ (출제자 : 15김효석)

[출제의도] 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

[해설]

(선분 AB 의 길이)$=\sqrt{\{0-(-2)\}^2+(4-7)^2+(a-1)^2}=7$

양변을 제곱하면

$4+9+(a-1)^2=49$

$(a-1)^2=36$

$a-1=\pm 6$

$\therefore\ a=7\ \ (\because a>0)$

4) [정답] ⑤ (출제자 : 13김찬호)

[출제의도] 등차수열의 개념을 이해하고 있는가?

[해설]

$\{a_n\}$ 이 공차가 2 인 등차수열이라고 했으므로 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면

$a_n=a_1+2(n-1)=2n-2+a_1$ 이다.

$a_2+a_4=(a_1+2)+(a_1+6)=2a_1+8=18$ 이므로, $a_1=5$ 이다.

[별해]

등차중항을 이용하여 $a_2+a_4=2a_3=18$ 이므로, $a_3=9$ 이고,

$a_3=a_1+4$ 이므로 $\therefore a_1=5$

5) [정답] ③ (출제자 : 11양종현)

[출제의도] 독립사건을 이용하여 확률을 계산할 수 있는가?

[해설]

양의 상수 p에 대하여 $\mathrm{P}(B)=p$라 하면

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)$

$=p-\frac{1}{3}p$

$=\frac{2}{3}p$

그런데 $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{2}$ 이므로 $p=\frac{3}{4}$ 이다.

[별해]

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A^C, B도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\times\mathrm{P}(B)$

$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3}\times\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

6) [정답] ① (출제자 : 13김찬호)

[출제의도] 근호가 포함된 수열의 극한을 계산할 수 있는가?

[해설]

$\sqrt{4n^2+n}-2n$ 을 유리화하기 위해

분자 분모에 $\sqrt{4n^2+n}+2n$ 을 곱하면 $\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}$ 이 된다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+n}-2n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n}$ 이고

분자와 분모를 n 으로 나누면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}$ 가 된다.

여기에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 이므로, 구하고자 하는 값은 $\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$ 가 된다.

7) [정답] ④ (출제자 : 11양종현)

[출제의도] 삼각방정식의 해를 구할 수 있는가?

[해설]

$\sin^4 x-\cos^4 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)=\frac{1}{2}$ 에서

$\sin^2 x-\cos^2 x=\frac{1}{2}$ ($\because \sin^2 x+\cos^2 x=1$)

$-\cos 2x=\frac{1}{2}$ ($\because \cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$)

$\therefore \cos 2x=-\frac{1}{2}$

$0\le 2x\le 4\pi$ 의 범위에서 $\cos 2x=-\frac{1}{2}$ 의 방정식을 풀면

$2x=\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3},\ \frac{10\pi}{3}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3}$

그러므로 주어진 방정식의 모든 해의 합은 4π 이다.

8) [정답] ② (출제자 : 14고정민)

[출제의도] 쌍곡선의 성질을 알고 이를 활용할 수 있는가?

[해설]

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{24}=1$ 의 꼭짓점은 $(1,0)$, $(-1,0)$이고, 초점은 $\mathrm{F}(5,0)$, $\mathrm{F}'(-5,0)$이다. 쌍곡선의 정의에 의하면 이 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=2$이고 $\overline{\mathrm{PF}}=6$ 이므로 $\overline{\mathrm{PF}'}=8$이다. 따라서 $\triangle\mathrm{FF}'\mathrm{P}$은 세 변의 길이가 $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{F}}=10$, $\overline{\mathrm{PF}}=6$, $\overline{\mathrm{PF}'}=8$이므로 $\angle\mathrm{F}'\mathrm{PF}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

또한, $\angle\mathrm{FF}'\mathrm{P}=\theta$라 하면, $\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{FP}}}{\overline{\mathrm{F}'\mathrm{F}}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ 이다.

한편, $\triangle\mathrm{F}'\mathrm{PH}$은 $\angle\mathrm{PHF}'=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고, $\overline{\mathrm{PF}'}=8$이다. 따라서

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{F}'\mathrm{P}}\times\sin\theta=\frac{24}{5}$이다.

[별해]

쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{24}=1$ 의 꼭짓점은 $(1,0)$, $(-1,0)$이고, 초점은 $\mathrm{F}(5,0)$, $\mathrm{F}'(-5,0)$이다. 쌍곡선의 정의에 의하면 이 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}'}-\overline{\mathrm{PF}}=2$이고 $\overline{\mathrm{PF}}=6$ 이므로 $\overline{\mathrm{PF}'}=8$이다.

한편, 점 P의 좌표를 (a,b)라 하면, $\overline{\mathrm{PH}}=b$, $\overline{\mathrm{F}'\mathrm{H}}=\overline{\mathrm{F}'\mathrm{O}}+\overline{\mathrm{OH}}=5+a$ 이다. 따라서 $\triangle\mathrm{F}'\mathrm{PH}$은 $\angle\mathrm{PHF}'=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로. 피타고라스 정리에 의하여

$8^2=b^2+(a+5)^2$이다. 또한, 점 P는 쌍곡선 위의 점이므로 $a^2-\frac{b^2}{24}=1$을 만족하므로, 이 식을 $8^2=b^2+(a+5)^2$에 대입하면 다음과 같다.

$8^2=24a^2-24+(a+5)^2$

$25a^2+10a-63=0$

$a=\frac{7}{5}\ (a>0)$

따라서 $a^2-\frac{b^2}{24}=1$에 $a=\frac{7}{5}$을 대입하여 b를 구하면 $b=\frac{24}{5}$이다. 그러므로 $\overline{\mathrm{PH}}=\frac{24}{5}$이다.

9) [정답] ③ (출제자 : 15김효석)

[출제의도] 모비율을 이해하고 있고, 이를 정규분포로 연결시켜 계산할 수 있는가?

[해설]

프로그램 시청률이 20 %이므로 모비율 $p=0.2$ 이다. 이제 표본의 크기가 400 인 집단의 표본의 표본비율을 구해보자.

표본비율 $\hat{p}=\frac{X}{n}$ 에서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,p)$를 따르므로

X는 정규분포 $\mathrm{B}(np,\ np(1-p))$를 따르고,

$\hat{p}$은 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{p(1-p)}{n}\right)$를 따른다.

따라서 $\mathrm{E}(\hat{p})=p=0.2$, $\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{p(1-p)}{n}=\frac{0.2\times0.8}{400}=0.02^2$ 이다.

$\mathrm{P}(0.18\le\hat{p}\le0.24)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{0.18-0.2}{0.02}\le Z\le\frac{0.24-0.2}{0.02}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)$

$=0.3413+0.4772=0.8185$

따라서 답은 ③.

[별해]

$X\sim\mathrm{B}(400,\ 0.2)\sim\mathrm{N}(80,\ 8^2)$

$\hat{p}=\frac{X}{400}$

$\therefore\hat{p}\sim\mathrm{N}(0.2,0.02^2)$

$\therefore\mathrm{P}(0.18\le\hat{p}\le0.24)=\mathrm{P}\left(\frac{0.18-0.2}{0.02}\le Z\le\frac{0.24-0.2}{0.02}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 2)=0.3413+0.4772=0.8185$

10) [정답] ④ (출제자 : 13김찬호)

[출제의도] 그래프를 통하여 부등식을 해결할 수 있는가?

[해설]

$\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}\ge0$ 에서 양 변에 $\{g(x)\}^2$ 을 곱해주면,

$\{f(x)-g(x)\}g(x)\ge0$ 이 된다. 이 식을 만족하기 위해서는,

i) $f(x)-g(x)\ge0$, $g(x)\ge0$

ii) $f(x)-g(x)\le0$, $g(x)\le0$

인데 분수부등식의 무연근 $g(x)=0$ 을 만족하는 x를 제외시키면 다음 두 가지 경우 중 하나에 해당하는 x를 구하면 된다.

i) $f(x)-g(x)\ge 0$, $g(x)>0$

ii) $f(x)-g(x)\le 0$, $g(x)<0$

i)의 조건을 만족시키는 x 의 범위는 $4<x\le 5$ 이다.
따라서 이 범위에 있는 정수 x 는 5 이다.
ii)의 조건을 만족시키는 x 의 범위는 $-4<x\le\alpha$ 와 $\beta\le x<4$ 이다.
따라서 이 범위에 있는 정수 x 는 2, 3 이다.
따라서 주어진 분수부등식을 만족하는 모든 정수 x 의 합은 10 이다

11) [정답] ⑤ (출제자 : 15김효석)

[출제의도] x^n 이 포함된 함수의 극한값을 구할 수 있으며, 함수의 연속의 정의를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

주어진 $f(x)$ 의 정의에 따라 함수 $f(x)$ 를 구하면

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+3}{8} & (0<x<1)\\ \dfrac{a+4}{9} & (x=1)\\ 1 & (x>1)\end{cases}$$ 이므로,

함수의 연속의 정의에 따라 $x=1$ 에서 주어진 함수가 연속이 되려면 극한값과 함숫값이 같아야 한다.

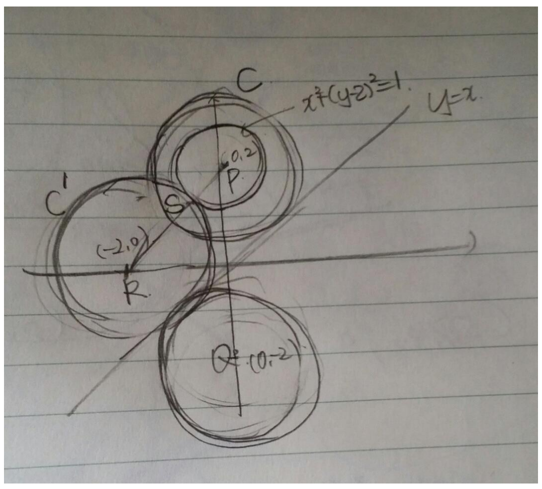
$\therefore\ \dfrac{a+3}{8}=\dfrac{a+4}{9}=1$ 이므로 $a=5$ 이다.

12) [정답] ② (출제자 : 14고정민)

[출제의도] 일차변환의 의미를 알고 있는가?

[해설]

일차변환 f^{-1} 는 f 와 같은 의미를 가지므로 원 C' 은 C를 x 축에 대하여 대칭이동 한 후에 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 도형이다.



그림과 같이 원 C의 중심 P$(0,2)$를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 Q$(0,-2)$이고, 점 Q를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점은 R$(-2,0)$ 이다. 따라서 $g\circ f^{-1}$에 의하여 변환된 도형 C'의 방정식은 $(x+2)^2+y^2=r^2$ 이다.
한편, 도형 C'과 원 $x^2+(y-2)^2=1$ 이 만나는 점을 S라 하면,
도형 C'가 원 $x^2+(y-2)^2=1$ 와 외접하므로 $\overline{\mathrm{RP}}=\overline{\mathrm{RS}}+\overline{\mathrm{SP}}$ 이다.
따라서 $\sqrt{(-2-0)^2+(0-2)^2}=r+1$ 이다.
그러므로 $r=2\sqrt{2}-1$ 이다.

13) [정답] ① (출제자 : 15유정훈)

[출제의도] 회전체의 부피를 구할 수 있는가?

[해설]

곡선과 두 직선으로 둘러싸인 부분을 구하기 위해, 교점을 구해보자.
$y=1$과 곡선의 교점을 구해보면 그 좌표가 $(1,1)$이라는 것들 알 수 있다.
이제 둘러싸인 부분을 x 축의 둘레로 회전시켜 얻는 회전체의 부피를 구하는 것이다. 적분 구간을 1 에서 e 라는 것을 알 수 있고, 곡선 $y=\sqrt{\ln x+1}$ 가 구간 $[1,e]$ 에서 함수 값이 1보다 크므로, 구하는 회전체의 부피는 $\pi\int_1^e(\sqrt{\ln x+1})^2dx-\pi\int_1^e 1^2\,dx$ 이다.

이를 계산해보면, $\int_1^e(\ln x+1)dx=[x\ln x]_1^e=e$ 이고,

$\int_1^e 1dx=[x]_1^e=e-1$ 이므로, V는 π 이다.

14)[정답] ① (출제자 : 13오인수)

[출제의도] 수열의 귀납적 정의를 통해 일반항을 구할 수 있는가?

[해설]

주어진 식의 양변을 $a_n a_{n+1}$로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2\cdot\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\quad(n\ge 1)$$

이다. $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$이라 하면 $b_1=2$이고

$$b_n=2\cdot b_{n+1}$$

$$b_{n+1}=\boxed{\frac{1}{2}}\times b_n$$

이다. 수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n=2\times\left\{\boxed{\frac{1}{2}}\right\}^{n-1}$$

이다.

$$a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}\quad(n\ge 2)$$

를 이용하여 a_n을 구하면

$$a_n=2\times b_1\times b_2\times b_3\times\cdots\times b_{n-1}$$

$$a_n=2\times(2)\times\left\{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\right\}\times\left\{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\cdots\times\left\{2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$$

$$a_n=2^n\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\boxed{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}}\quad(n\ge 1)$$

이다.

$\therefore\ \dfrac{1}{p}\times f(8)=2\times\dfrac{6\cdot 7}{2}=42$이다.

15) [정답] ④ (출제자 : 13오현주)

[출제의도] 연속확률변수와 확률밀도함수에 대한 평균과 분산을 이해하고 있는가?

[해설]

연속확률변수 X가 구간 $[0,5]$에서 모든 값을 가질 때,
그 확률밀도함수 $f(x)$에 대한 X의 평균 및 분산은 각각

$\mathrm{E}(X) = \int_0^5 xf(x)\,dx$,

$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \{\mathrm{E}(X)\}^2 = \int_0^5 x^2 f(x)\,dx - m^2$ (m은 평균)

으로 정의한다.

방법1.

확률밀도함수의 성질인 $\int_0^5 f(x)\,dx = 1$와 보기 (가)를 이용하여

평균 $\int_0^5 xf(x)\,dx = 11$을 구한다. 위의 분산의 정의를 토대로 분산

$\mathrm{V}(X) = \int_0^5 x^2 f(x)\,dx - 11^2$의 값을 찾는다.

보기 (나)를 이용하여 $\int_0^5 x^2 f(x)\,dx$을 구할 수 있는데,

$\int_0^5 (x-3)^2 f(x)\,dx = \int_0^5 x^2 f(x)\,dx - 6\times 11 + 9 = 123$이고

따라서 $\int_0^5 x^2 f(x)\,dx = 180$이다.

그러므로 분산 $\mathrm{V}(X) = \int_0^5 x^2 f(x)\,dx - 11^2 = 180 - 121 = 59$ 이다.

방법2.

연속확률변수 X와 임의의 실수 a, b에 대하여
평균과 분산은 $\mathrm{E}(aX+b) = a\mathrm{E}(X) + b$, $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$의 성질이 있다. 다시 말해서, 조건 (가)는 확률변수 $X-3$에 대한 평균 $\mathrm{E}(X-3)$을, 조건 (나)도 확률변수 $(X-3)^2$에 대한 평균을 의미한다.

$\mathrm{E}(X-3) = \int_0^5 (x-3)f(x)\,dx = 8$

$\mathrm{E}((X-3)^2) = \int_0^5 (x-3)^2 f(x)\,dx = 123$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X-3) &= \mathrm{E}((X-3)^2) - \{\mathrm{E}(X-3)\}^2 \\ &= \int_0^5 (x-3)^2 f(x)dx - \left\{\int_0^5 (x-3)f(x)dx\right\}^2 \\ &= 123 - 8^2 = 59 \\ &= \mathrm{V}(X)\end{aligned}$$

$\therefore \mathrm{V}(X) = 59$

16) [정답] ① (출제자 : 14서재현)

[출제의도] 무한급수의 성질을 알고 활용할 수 있는가?

[해설]

부채꼴 DAO와 부채꼴 EOB는 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이고, 반지름($\overline{\mathrm{DO}}$, $\overline{\mathrm{EO}}$)의 길이가 1 인 부채골이다. 따라서 R_1의 색칠된 부분의 넓이는 (부채꼴 DAO의 넓이 − 삼각형 DAO의 넓이)×2 이다.

$$S_1 = \left(\frac{1}{2}\times 1^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\times 2 = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

닮음비를 구하기 위해 C_1의 반지름의 길이를 r이라 하고, C_2의 중심을 O_2, 원 C_2와 선분 EO가 만나는 점을 H라 하면, $\angle \mathrm{D_2OH} = \frac{\pi}{6}$이므로 $\overline{\mathrm{OO_2}} = 2r$. 따라서 $3r = 1$, $r = \frac{1}{3}$

C_1과 C_2의 닮음비가 $1 : \frac{1}{3}$ 이므로 넓이비는 $1 : \frac{1}{9}$.

따라서 공비는 $\frac{1}{9}$ 이다.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{8}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

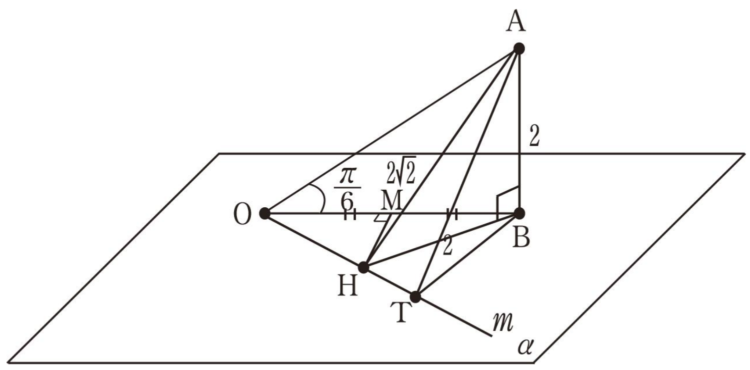
17) [정답] ① (출제자 : 12최원재)

[출제의도] 주어진 조건에서 삼수선의 정리를 적용하여 이면각을 구할 수 있는가?

[해설]

직각삼각형 OAB에서 $\angle \mathrm{AOB} = \frac{\pi}{6}$이므로, $\overline{\mathrm{OB}} = 2\sqrt{3}$

선분 OH의 연장선 m이라 하고, 점 A에서 직선 m에 내린 수선의 발을 T라고 하자.



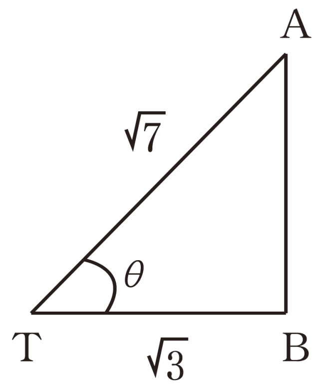
삼각형 ABH는 직각삼각형이므로 $\overline{\mathrm{BH}} = 2$ 이다. 이등변 삼각형 OHB에서 점 H에서 $\overline{\mathrm{OB}}$에 내린 수선의 발을 M이라고 하자. 삼각형 OMH와 삼각형BMH는 합동이고, $\overline{\mathrm{OH}} = 2$, $\overline{\mathrm{OM}} = \sqrt{3}$ 이므로,

$\angle \mathrm{OHM} = \angle \mathrm{BHM} = \frac{\pi}{3}$ 이다.

$\angle \mathrm{BHT} = \frac{\pi}{3}$이고, 삼수선 정리에 의해

직선 $m \perp \overline{\mathrm{AT}}$, 직선 $m \perp \overline{\mathrm{BT}}$이므로,

$\overline{\mathrm{BT}} = \overline{\mathrm{BH}} \times \sin\frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$



따라서 직각삼각형 ABT에서

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

18) [정답] ③ (출제자 : 14임현우)

[출제의도] 역행렬의 성질을 이용하여 식을 정리할 수 있는가?

[해설]

ㄱ. (참)

주어진 식 $A^2B^2 + A = E$에서 $A(AB^2 + E) = E$이므로

$A^{-1} = AB^2 + E$

ㄴ. (참)

주어진 식 $A^3 - BA^2 + A = E$에서

$(A^2 - BA + E)A = E$

$A^{-1} = A^2 - BA + E$

행렬 X에 대하여 $XX^{-1} = X^{-1}X = E$이므로

$(A^2 - BA + E)A = A(A^2 - BA + E)$

$A^3 - BA^2 + A = A^3 - ABA + A$

$BA^2 = ABA$

양 변의 오른쪽에 A^{-1}을 곱하면

$BA = AB$

ㄷ. (거짓)

$A^{-1} = AB^2 + E = A^2 + E - BA$

$AB^2 = A^2 - BA$

$AB = BA$ 이므로

$AB^2 = A^2 - AB$

양 변의 왼쪽에 A^{-1}을 곱하면

$B^2 = A - B$

$A = B^2 + B$

주어진 식 $A^2B^2 + A = E$에 $A = B^2 + B$를 대입하면

$(B^2 + B)^2B^2 + B^2 + B = E$

$B^6 + 2B^5 + B^4 + B^2 + B = E$

ㄷ이 참이려면 $B^5 = O$이여야 한다.

$A = B^2 + B = B(B + E)$에서

A^{-1}이 존재하므로 B^{-1}와 $(B+E)^{-1}$ 모두 존재하는데,

$B^5 = O$에서 $B^5(B^{-1})^5 = E = O$로 모순이므로 $B^5 \neq O$

따라서 ㄷ은 거짓.

19) [정답] ⑤ (출제자 : 15이상민)

[출제의도] 구와 구사이의 관계를 평면화 하여 볼 수 있는가?

[해설]

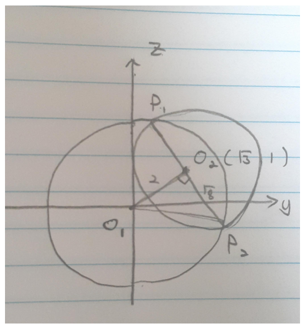
두 구 S_1, S_2의 중심을 각각 O_1, O_2라고 할 때, 구의 성질에 의하여 두 구의 중심을 지나는 직선은 교선을 포함하는 평면 α에 수직이므로 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}$ 즉, $(0,\ \sqrt{3},\ 1)$은 평면 α의 법선벡터 이다.

xy 평면의 법선벡터를 $\vec{n} = (0,\ 0,\ 1)$이라고 할 때, 내적을 이용해서 두 벡터 사이의 각도 θ를 구하면 그 각이 두 평면 사이의 각이 된다.

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}||\vec{n}|} = \frac{(0,\ \sqrt{3},\ 1) \cdot (0, 0, 1)}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$ 이다.

두 구의 중심을 지나고 xy 평면의 수직인 평면으로 잘라 단면화 시켜보면 아래 그림과 같다.



$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$는 구$S_2$의 지름이므로 $\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{P}_2} = \sqrt{8}$ 이다.

점과 점 사이의 거리인 $\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2} = \sqrt{3+1} = 2$ 임을 알 수 있고

피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{P}_2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12}$

즉 $a = (\sqrt{12})^2 = 12$

단면의 넓이는 $(\sqrt{8})^2\pi = 8\pi$ 이고 이면각 θ는 위에서 구했듯이 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 이므로 정사영의 넓이는

$8\pi \times \cos\frac{\pi}{3} = 8\pi \times \frac{1}{2} = 4\pi$ 로 $b = 4$ 임을 알 수 있다.

따라서 $a + b = 16$ 이다.

20) [정답] ② (출제자 : 12황성문)

[출제의도] 지표와 가수의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$\log x = n + \alpha$ (이 때, n은 정수, $0 \le \alpha < 1$인 실수)라 하자.

(가)에서 $f(x^2)$과 $f\left(\frac{1}{x^2}\right)$의 값은 가수에 따라 달라진다.

가수의 범위		0	$0 < \alpha < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < \alpha < 1$
지표	$\log x^2$	$2n$	$2n$	$2n+1$	$2n+1$
	$\log\frac{1}{x^2}$	$-2n$	$-2n-1$	$-2n-1$	$-2n-2$
가수	$\log x^2$	0	2α	0	$2\alpha - 1$
	$\log\frac{1}{x^2}$	0	$1-2\alpha$	0	$2-2\alpha$
$f(x^2) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{x^2}\right) = f(x)$		n	$n - \frac{1}{2}$	$n + \frac{1}{2}$	n

(나)에서 $6g(x)$가 자연수가 되므로 가수는 $\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$ 중 하나가 될 수 있음을 알 수 있다. (0은 안된다!)

(다)에서 $6 \le f(x)+6g(x) \le 8$ 이므로 지표의 값에 따라 가수를 달리하여 x의 값을 찾아낼 수 있다.

지표가 1일 때, 가수가 $\frac{5}{6}$ 이면 $1+6\times\frac{5}{6}=6$ 이므로 $x=10^{1+\frac{5}{6}}$ 일 때 위 조건을 만족한다. 같은 방식으로

지표가 2일 때, $\frac{4}{6}, \frac{5}{6}$

지표가 3일 때, $\frac{4}{6}, \frac{5}{6}$

지표가 4일 때, $\frac{4}{6}$

위 조건을 만족하는 모든 x의 값을 곱하면

$m=10^{1\times1+2\times2+3\times2+4\times1+\frac{4}{6}\times3+\frac{5}{6}\times3}$ 이므로

$\log m = 1\times1+2\times2+3\times2+4\times1+\frac{4}{6}\times3+\frac{5}{6}\times3$

$=\frac{117}{6}$ 이다. 따라서 $6\log m=117$

21) [정답] ⑤ (출제자 : 14임현우)

[출제의도]

1. 기함수와 우함수의 성질을 정적분의 연산에서 적절히 활용할 수 있는가?

2. 치환적분과 부분적분을 잘 이용하여 식을 간단히 할 수 있는가?

[해설]

먼저 $y=x$는 기함수이다. $g(x)$가 기함수이므로 $g''(x)$ 역시 기함수이다. 따라서 $xg''(x)$는 우함수이므로,

$$\int_{-3}^{3} xg''(x)dx = 2\int_{0}^{3} xg''(x)dx$$

부분적분을 하면,

$$2\int_{0}^{3} xg''(x)dx = 2[xg'(x)-g(x)]_0^3 = 6g'(3)-2g(3)+2g(0)$$

$g(x)$는 기함수이므로 $g(0)=0$

따라서 우리가 구해야 하는 값은 $6g'(3)-2g(3)$이다.

$g(x)=\int_{-6}^{2x} tf(x-t)dt$ 에서 양변에 $x=-3$을 대입하면

$g(-3)=0$ 인데, $g(x)$는 기함수이므로 $\underline{g(3)=0}$

위 식에서 $x-t=s$라 치환하면

$$g(x)=-\int_{x+6}^{-x}(x-s)f(s)ds$$
$$=-x\int_{x+6}^{-x}f(s)ds+\int_{x+6}^{-x}sf(s)ds$$

위 식에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=-\left\{\int_{x+6}^{-x}f(s)ds+x\{-f(-x)-f(x+6)\}\right\}$$
$$+\{-(-xf(-x))-(x+6)f(x+6)\}$$
$$=\int_{-x}^{x+6}f(s)ds+2xf(-x)-6f(x+6)$$

적분 구간의 양 끝인 $x+6$과 $-2x$가 같게 하는 x의 값은 -3이므로 양 변에 $x=-3$을 대입하면 $g'(-3)=-12f(3)=12$

$g'(x)$는 우함수이므로 $\underline{g'(3)=12}$

$$\therefore \int_{-3}^{3} xg''(x)dx = 6g'(3)-2g(3)=72$$

[참고]

$g(x)=-g(-x)$에서 양변을 미분하면 $g'(x)=g'(-x)$. 또 미분하면 $g''(x)=-g''(-x)$라 되므로, 기함수를 미분하면 우함수가, 우함수를 미분하면 기함수가 됨을 알 수 있다.

22) [정답] 6 (출제자 : 15유정훈)

[출제의도] 초월함수의 미분을 할 수 있는가?

[해설]

함수 $f(x)$를 미분해보면, $f'(x)=6xe^{x^2-1}$이다. 구하는 답 $f'(1)$의 값은 6이다.

23) [정답] 37 (출제자 : 14서재현)

[출제의도] 조건부확률을 이해하고 활용할 수 있는가?

[해설]

남학생 300명 중 $\frac{7}{10}$ 이 아침 운동을 한다고 하였으므로, 남학생이면서 아침 운동을 하는 학생의 수는 210명이다. 마찬가지로 여학생 200명 중 $\frac{7}{10}$ 이 아침 운동을 하지 않는다고 하였으므로 여학생이면서 아침 운동을 하지 않는 학생의 수는 140명이다. 이를 이용하여 이 학교 학생 중 아침 운동을 하는 사람, 하지 않는 사람, 남학생, 여학생으로 구분하여 표를 그려보면

아래와 같다.

	남학생	여학생	
아침 운동 O	210	60	270
아침 운동 X	90	140	230
	300	200	500

이 학교에서 임의로 뽑은 학생 한 명이 아침 운동을 하지 않을 때, 이 학생이 여학생일 확률은 $\frac{140}{230}=\frac{14}{23}$ 이다.

따라서 정답은 37이다.

24) [정답] 36 (출제자 : 14고정민)

[출제의도] 무리방정식을 계산할 수 있는가?

[해설]

$x^2-2x=A$라고 하면 주어진 식은

$A-\sqrt{2A-3}=3$으로 쓸 수 있고, 이 식을 정리하면 $A-3=\sqrt{2A-3}$이다.

한편, $A-3\ge 0$이고, $2A-3\ge 0$이여야 하므로, $A\ge 3$이어야 한다.

또한, $A-3=\sqrt{2A-3}$의 양변을 제곱하면 $(A-3)^2=2A-3$ 즉, $A^2-8A+12=0$이므로 $A=2$ 또는 $A=6$이다.

위에서 $A\ge 3$을 구했으므로 $A=6$이다.

따라서 $x^2-2x=6$이고, $x^2-2x-6=0$의 모든 실근의 곱인 k는 -6이므로 $k^2=36$이다.

25) [정답] 4 (출제자 : 15유정훈)

[출제의도] 로그의 실생활활용 문제에서 주어진 내용을 잘 적용할 수 있는가?

[해설]

v_{A} 의 값을 구해보면,

$p=\frac{3}{4}, r=\frac{1}{3}$ 일 때, $v_{\mathrm{A}}=k\times\frac{1}{3}\times\frac{\log\left(1-\frac{3}{4}\right)}{\frac{3}{4}}$ 이므로,

$v_{\mathrm{A}}=-\frac{8}{9}k\log 2$ 이다.

v_{B} 의 값을 구해보자.

$v=kr\frac{\log(1-p)}{p}$ 에서

$p=\frac{1}{2}, r=\frac{1}{9}$ 일 때, $v_{\mathrm{B}}=k\times\frac{1}{9}\times\frac{\log\left(1-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}$ 이므로,

$v_{\mathrm{B}}=-\frac{2}{9}k\log 2$ 이다.

$\frac{v_{\mathrm{A}}}{v_{\mathrm{B}}}$ 의 값을 구하는 것이므로, 답은 $\frac{-\frac{8}{9}k\log 2}{-\frac{2}{9}k\log 2}=4$ 이다.

26) [정답] 30 (출제자 : 14임현우)

[출제의도] 중복조합을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

[해설]

$a\times b$는 3의 배수가 아니므로

$a=2^A$, $b=2^B$라 놓을 수 있다.

(A, B는 음이 아닌 정수)

c, d는 $6^2=2^2\times 3^2$의 약수이면 되므로

$c=2^C\times 3^{C'}$, $d=2^D\times 3^{D'}$라 놓을 수 있다.

(C, C', D, D'는 음이 아닌 정수)

그러면 $2^A\times 2^B\times 2^C\times 2^D\times 3^{C'}\times 3^{D'}=2^2\times 3^2$

$A+B+C+D=2$, $C'+D'=2$

순서쌍 (A,B,C,D)의 개수 = ${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

순서쌍 (C', D')의 개수 = 3

=> 순서쌍 (A,B,C,C',D,D')의 개수 = $10\times 3=30$

순서쌍 (A,B,C,C',D,D')과 순서쌍 (a,b,c,d)는 일대일대응되므로 두 순서쌍의 개수는 같다.

따라서 순서쌍 (a,b,c,d)의 개수는 30

27) [정답] 240 (출제자 : 13오현주)

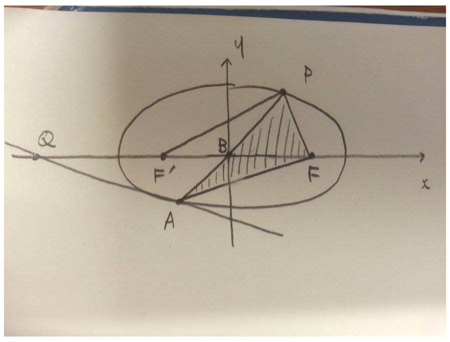
[출제의도] 1. 타원에 대한 정의와 접선, 이등변삼각형의 성질을 이용하여 각 점의 위치를 알 수 있는가.

2. 원점을 중심으로 하는 타원이 좌표축에 대하여 대칭임을 알고 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가.

[해설]

점 F의 좌표가 $(4,0)$이므로 $\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{PF}}=4$이고,

장축의 길이가 12이므로 타원의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{QF'}}=8$이다. 따라서 점 Q의 좌표는 $(-12,0)$이다.



삼각형 APF의 넓이S는 선분 AP와 x축이 만나는 점을 B라 할 때,

$S=\frac{1}{2}\times$(선분 BF의 길이)$\times$\{(점 P의 y좌표)+(점 A의 y좌표)\}

의 방법으로 구할 수 있다.

타원 위의 점 A의 좌표를 (a,b)라 할 때, 접점이 A인 접선의 방정식은 $\frac{ax}{36}+\frac{by}{20}=1$이다. 접선 위의 점 Q$(-12,0)$을 대입하면, $a=-3$, $b=-\sqrt{15}$임을 알 수 있다.

삼각형 PFF'는 $\overline{\mathrm{PF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}=8$인 이등변삼각형이므로 $\angle\mathrm{PFF'}=\theta$이라고 하면, $\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{FF'}}}{\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PF}}}=\frac{1}{4}$이므로

P의 y좌표는 $\overline{\mathrm{PF}}\sin\theta=4\sin\theta=4\sqrt{1-\cos^2\theta}=4\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{15}$이다.

원점을 중심으로 하는 타원은 좌표축에 대하여 대칭이고 타원 위의 두 점 A와 P가 x축으로부터 떨어진 거리가 같으므로 점 A와 P는 원점에 대하여 대칭임을 파악할 수 있다. 따라서 위의 점 B는 원점 O이다.

삼각형 APF의 넓이는,

$S=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{15}=4\sqrt{15}$이고 구하고자하는 값 $S^2=240$이다.

28) [정답] 10 (출제자 : 15이상민)

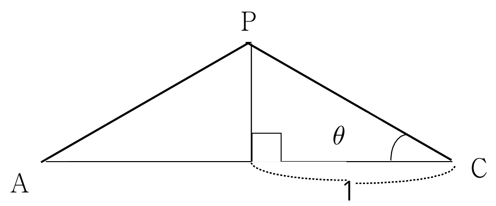
[출제의도] 사인법칙을 사용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

[해설]

삼각형 ABC 는 이등변삼각형이므로

$\angle ACB = \frac{\pi}{2} - \theta$, $\angle PCA = \theta$

즉 삼각형 PAC 는 $\overline{PA} = \overline{PC}$ 인 이등변삼각형이다. $\overline{AC} = 2$ 이므로 다음 그림에서 이등변 삼각형의 성질과 삼각비에 의하여



$\overline{PC} = \overline{AP} = \frac{1}{\cos\theta}$ 이다. 위와 같은 방식으로 $\overline{BC} = \overline{CD} = 4\sin\theta$ 임을 알 수 있다.

$\overline{PQ} = a$라 두면 삼각형 ACQ 에서 $\angle ACQ = 2\theta$ 이고 $\angle AQC = \pi - 3\theta$ 이므로 사인법칙에 의해

$$\frac{a + \frac{1}{\cos\theta}}{\sin 2\theta} = \frac{2}{\sin(\pi - 3\theta)}$$

$$a = \frac{2\sin 2\theta}{\sin(\pi - 3\theta)} - \frac{1}{\cos\theta}$$

$\angle CPQ = \theta + \theta = 2\theta$ 이므로 삼각형 PCQ 를 사인법칙을 이용하여 구하면

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos\theta} \times \left(\frac{2\sin 2\theta}{\sin(\pi - 3\theta)} - \frac{1}{\cos\theta}\right) \times \sin 2\theta$$

이고

$$\frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos\theta} \times \left(\frac{2\sin 2\theta}{\sin(\pi - 3\theta)} - \frac{1}{\cos\theta}\right) \times \frac{\sin 2\theta}{\theta}$$

$$\frac{S(\theta)}{\theta} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos\theta} \times \left(\frac{2\sin 2\theta}{\sin(\pi - 3\theta)} - \frac{1}{\cos\theta}\right) \times \frac{\sin 2\theta}{\theta}$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos\theta} \times \left(\frac{2\sin 2\theta}{\sin(\pi - 3\theta)} - \frac{1}{\cos\theta}\right) \times \frac{\sin 2\theta}{\theta}$$

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos\theta} \times \left(\frac{2\sin 2\theta}{\sin 3\theta} - \frac{1}{\cos\theta}\right) \times \frac{\sin\theta}{\theta}$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times \left(\frac{4}{3} - 1\right) \times 2$$

$$= \frac{1}{3}$$

즉 $a^2 + b^2 = 10$

29) 정답 : 22 (출제자 : 13오인수)

[출제의도] 연장선과 수선의 발, 삼각함수를 활용하여 주어진 도형의 위치를 파악하고, 벡터의 분해 또는 공간좌표를 활용하여 두 벡터의 내적의 최댓값을 구할 수 있는가?

[출제자의 말 - prologue]

두 벡터의 내적의 값을 묻는 문제는 많이 풀어보셨을 겁니다. 두 벡터의 내적은 정의 그대로 계산할 수 있고, 좌표의 성분을 통해서 계산할 수도 있습니다. 또는 정사영 관점에서 해석할 수 있으며, 벡터의 분해를 통해 해석할 수도 있습니다. 이 문제는 두 벡터의 내적의 네 가지 계산법 중 '벡터의 분해'에 초점이 맞춰져 있습니다. 벡터를 분해할 땐 되도록이면 수직 조건을 살피면서 분해하는 것이 좋습니다. 수직조건을 살피는 방법? 수직 조건을 살필 수 있는 좋은 방법은 바로 '연장선'과 '수선의 발'입니다. 해설을 통해 수직 조건이 얼마나 중요한 조건인지 잘 살펴보시기 바랍니다.

〈컬러로 보는 것을 추천 드립니다.〉

[해설]

1. 대략적인 위치 파악하기

① 두 원뿔 C_1, C_2가 원뿔 C에 접하는 상황이다.
C_1, C_2의 밑면이 C의 밑면에 접하는 점을 각각 P, Q라 하자.

② 원뿔 C의 밑면의 중심을 O라 하면 C_1, C_2가 C에 접하므로
네 점 A, O, P, O_1은 한 평면 위에 있고,
네 점 A, O, Q, O_2도 한 평면 위에 있다.
[보충] 이해가 잘 안 되면 C_1을 C의 맨 왼쪽에 외접하도록 돌린 그림을 상상해본다.

③ C와 C_1에서 $\overline{OP} = 3$, $\overline{OA} = 6\sqrt{2}$, $\overline{PO_1} = \sqrt{6}$ 이므로

$\overline{PA} = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{OA}^2} = \sqrt{9 + 72} = \sqrt{81} = 9$

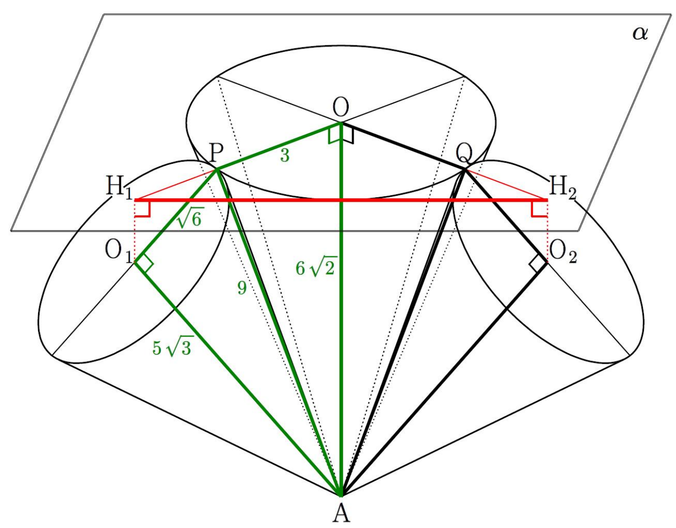
$\overline{O_1A} = \sqrt{\overline{PA}^2 - \overline{PO_1}^2} = \sqrt{81 - 6} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

C_2도 마찬가지이므로 $\overline{QA} = \overline{PA} = 9$, $\overline{O_2A} = \overline{O_1A} = 5\sqrt{3}$

④ 두 점 O_1, O_2의 평면 α 위로의 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면 선분 H_1H_2는 C의 밑면에 접한다.

⑤ 이때, 선분 H_1H_2가 C의 밑면에 접하는 점은 선분 H_1H_2의 중점이다.

'①~⑤'를 종합하면 다음 그림과 같다.



2. 구하고자 하는 값 파악하기

① $\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}=\left(\overrightarrow{XH_1}+\overrightarrow{H_1O_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{XH_2}+\overrightarrow{H_2O_2}\right)$

$=\overrightarrow{XH_1}\cdot\overrightarrow{XH_2}+\overrightarrow{H_1O_1}\cdot\overrightarrow{H_2O_2}$

$\left(\because \overrightarrow{XH_1}\perp\overrightarrow{H_2O_2},\ \overrightarrow{XH_2}\perp\overrightarrow{H_1O_1}\right)$

② $\overrightarrow{H_1O_1}\cdot\overrightarrow{H_2O_2}$는 고정값이므로 구하고자 하는 값은 $\overrightarrow{XH_1}\cdot\overrightarrow{XH_2}$가 최대일 때, 최댓값을 갖는다.

③ 선분 H_1H_2의 중점을 M이라 하면

$\overrightarrow{XH_1}\cdot\overrightarrow{XH_2}=\left(\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MH_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{XM}+\overrightarrow{MH_2}\right)$

$=\left|\overrightarrow{XM}\right|^2+\overrightarrow{XM}\cdot\left(\overrightarrow{MH_1}+\overrightarrow{MH_2}\right)+\overrightarrow{MH_1}\cdot\overrightarrow{MH_2}$에서

㉠ $\left(\overrightarrow{MH_1}+\overrightarrow{MH_2}\right)=\overrightarrow{MH_1}-\overrightarrow{MH_1}=\vec{0}$

㉡ $\overrightarrow{MH_1}\cdot\overrightarrow{MH_2}=-\left|\overrightarrow{MH_1}\right|^2$이므로

$\overrightarrow{XH_1}\cdot\overrightarrow{XH_2}=\left|\overrightarrow{XM}\right|^2-\left|\overrightarrow{MH_1}\right|^2$이다.

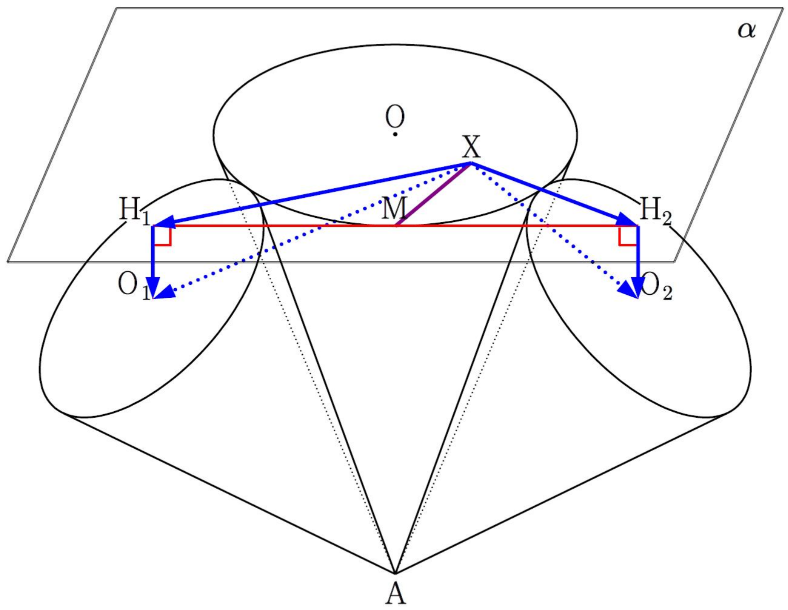
④ 한편, $\left|\overrightarrow{H_1O_1}\right|=\left|\overrightarrow{H_2O_2}\right|$, $\overrightarrow{H_1O_1}\,/\!\!/\,\overrightarrow{H_2O_2}$이므로

$\overrightarrow{H_1O_1}\cdot\overrightarrow{H_2O_2}=\left|\overrightarrow{H_1O_1}\right|^2$이다.

⑤ '①~④'에 의하여

$\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}=\overrightarrow{XH_1}\cdot\overrightarrow{XH_2}+\overrightarrow{H_1O_1}\cdot\overrightarrow{H_2O_2}$

$=\left(\left|\overrightarrow{XM}\right|^2-\left|\overrightarrow{MH_1}\right|^2\right)+\left|\overrightarrow{H_1O_1}\right|^2$



⑥ $\left|\overrightarrow{XM}\right|^2-\left|\overrightarrow{MH_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{H_1O_1}\right|^2$의 값이 최대가 되려면 $\left|\overrightarrow{MH_1}\right|^2$, $\left|\overrightarrow{H_1O_1}\right|^2$은 고정값이므로 $\left|\overrightarrow{XM}\right|^2$의 값이 최대가 되어야한다.

⑦ $\left|\overrightarrow{XM}\right|^2$의 값이 최대가 되려면

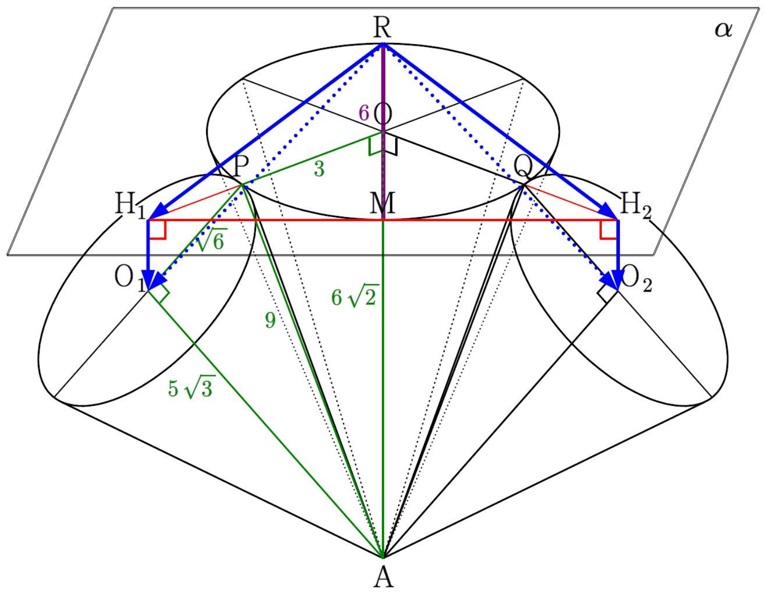
점 M은 C의 밑면(원)의 둘레 위의 점이고

점 X는 C의 밑면 위를 움직이는 점이므로

선분 XM이 C의 밑면의 지름이 되어야 한다.

⑧ 선분 XM이 C의 밑면의 지름이 되도록 하는 점 X의 위치를 R이라 하면 $\left|\overrightarrow{XM}\right|^2$의 최댓값은

$\left|\overrightarrow{RM}\right|^2=6^2=36$이다.

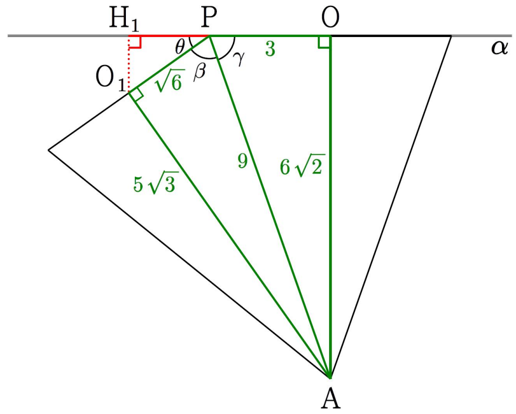


3. 구체적인 위치 파악하기

① $\left|\overrightarrow{XM}\right|^2-\left|\overrightarrow{MH_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{H_1O_1}\right|^2$의 최댓값은

$\left|\overrightarrow{RM}\right|^2-\left|\overrightarrow{MH_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{H_1O_1}\right|^2=36-\left|\overrightarrow{MH_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{H_1O_1}\right|^2$이다.

② 주어진 도형을 네 점 A, O, P, O_1을 포함하는 평면으로 자른 단면을 나타내면 다음과 같다.



③ $\angle O_1PH_1=\theta$라 하면 $\overline{H_1O_1}=\overline{PO_1}\sin\theta$이다.

$\angle O_1PH_1+\angle APO_1+\angle APO=\pi$에서

$\angle APO_1=\beta$, $\angle APO=\gamma$라 하면 $\theta=\pi-(\beta+\gamma)$이므로

$\sin\theta=\sin\left(\pi-(\beta+\gamma)\right)=\sin(\beta+\gamma)$

$=\sin\beta\cos\gamma+\cos\beta\sin\gamma$

$=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}\cdot\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{9}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$=\dfrac{5\sqrt{3}+4\sqrt{3}}{27}=\dfrac{9\sqrt{3}}{27}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore\ \overline{H_1O_1}=\overline{PO_1}\sin\theta=\sqrt{6}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{2}$

④ $\overline{PH_1}=\sqrt{\overline{PO_1}^2-\overline{H_1O_1}^2}=\sqrt{6-2}=\sqrt{4}=2$에서

$\overline{OH_1}=\overline{OP}+\overline{PH_1}=3+2=5$이므로

$\therefore\ \overline{MH_1}=\sqrt{\overline{OH_1}^2-\overline{OM}^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

⑤ $\left|\overrightarrow{RM}\right|^2-\left|\overrightarrow{MH_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{H_1O_1}\right|^2=36-\left|\overrightarrow{MH_1}\right|^2+\left|\overrightarrow{H_1O_1}\right|^2$

$=36-16+2=22$

따라서 두 벡터 $\overrightarrow{XO_1}$, $\overrightarrow{XO_2}$의 내적 $\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}$의 최댓값은 22이다.

★☀ 별해

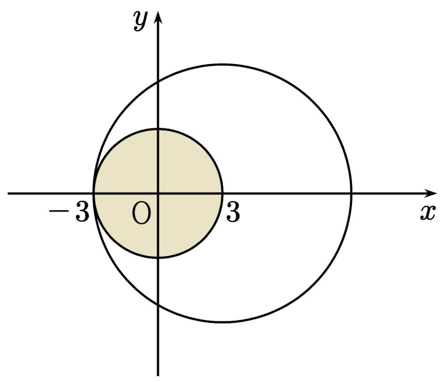
1. 대략적인 위치 파악하기 (1. '①~⑤'참고)
2. 구체적인 위치 파악하기 (3. '②~④'참고)

3. 구하고자 하는 값 파악하기

① 점 O를 원점으로 하고, 직선 OM을 x축,
선분 H_1H_2에 평행하고 점 O를 지나는 직선을 y축,
직선 AO를 z축으로 잡으면, 세 점 X, O_1, O_2의 좌표는 각각
$X(x,\ y,\ 0)\ (x^2+y^2 \le 9)$, $O_1(3,\ -4,\ -\sqrt{2})$, $O_2(3,\ 4,\ -\sqrt{2})$
라고 할 수 있다.

② $\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2} = (3-x,\ -4-y,\ -\sqrt{2})\cdot(3-x,\ 4-y,\ -\sqrt{2})$
$= (3-x)^2+(y^2-16)+2$
$= (x-3)^2+y^2-14$

③ $\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}$의 값이 최대가 되려면
$x^2+y^2 \le 9$를 만족하는 $(x,\ y)$에 대하여
$(x-3)^2+y^2$의 값이 최대가 되어야 한다.



④ $(x-3)^2+y^2=k^2$이라 하면 $0 \le k \le 6$이므로
$(x-3)^2+y^2$의 최댓값은 36이다.

⑤ $\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2} = (x-3)^2+y^2-14 \le 36-14 = 22$

따라서 두 벡터 $\overrightarrow{XO_1}$, $\overrightarrow{XO_2}$의 내적 $\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}$의 최댓값은 22이다.

〔출제자의 말 - epilogue〕
다음 풀이를 시도한 학생들이 많았을 것 같습니다.
벡터 분해를 두 점 H_1, H_2가 아닌 점 O를 기준으로 한 풀이입니다.
이 풀이의 경우 앞의 〔해설〕, 〔별해〕보다 풀이과정이 조금 돌아갑니다.
(자세한 계산과정은 생략했습니다.)

---

① 선분 O_1O_2의 중점을 N이라 하면
$\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2} = (\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OO_1})\cdot(\overrightarrow{XO}+\overrightarrow{OO_2})$
$= |\overrightarrow{XO}|^2+\overrightarrow{XO}\cdot(\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{OO_2})+\overrightarrow{OO_1}\cdot\overrightarrow{OO_2}$
$= |\overrightarrow{XO}|^2+2\,\overrightarrow{XO}\cdot\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OO_1}\cdot\overrightarrow{OO_2}$

② $\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}$의 값이 최대가 되려면 $|\overrightarrow{XO}| = 3$이 되어야 하고,
두 벡터 $\overrightarrow{XO}$, $\overrightarrow{ON}$이 이루는 각의 크기가 가장 작아야 한다.

③ 이때, $|\overrightarrow{XO}|^2 = 9$이고
$\overrightarrow{XO}\cdot\overrightarrow{ON}$을 정사영 관점에서 해석하면
$\overrightarrow{XO}\cdot\overrightarrow{ON} = \overline{XO}\times\overline{OM} = 9$이므로
$\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2} = 27+\overrightarrow{OO_1}\cdot\overrightarrow{OO_2}$

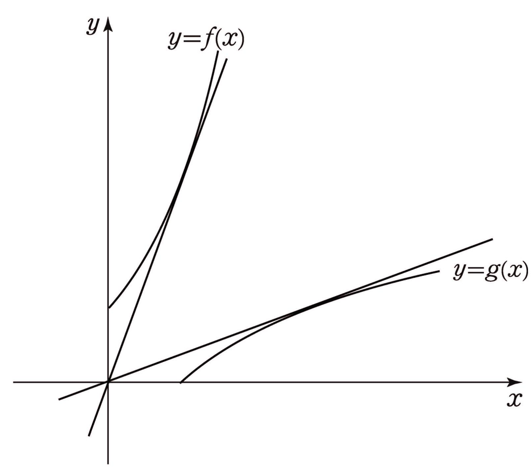
④ $\overrightarrow{OO_1}\cdot\overrightarrow{OO_2} = (\overrightarrow{OH_1}+\overrightarrow{H_1O_1})\cdot(\overrightarrow{OH_2}+\overrightarrow{H_2O_2})$
$= \overrightarrow{OH_1}\cdot\overrightarrow{OH_2}+\overrightarrow{H_1O_1}\cdot\overrightarrow{H_2O_2} = -7+2 = -5$

⑤ $\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2} = |\overrightarrow{XO}|^2+2\,\overrightarrow{XO}\cdot\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OO_1}\cdot\overrightarrow{OO_2}$
$= 27+\overrightarrow{OO_1}\cdot\overrightarrow{OO_2}$
$= 27+(-5) = 22$
따라서 두 벡터 $\overrightarrow{XO_1}$, $\overrightarrow{XO_2}$의 내적 $\overrightarrow{XO_1}\cdot\overrightarrow{XO_2}$의 최댓값은 22이다.

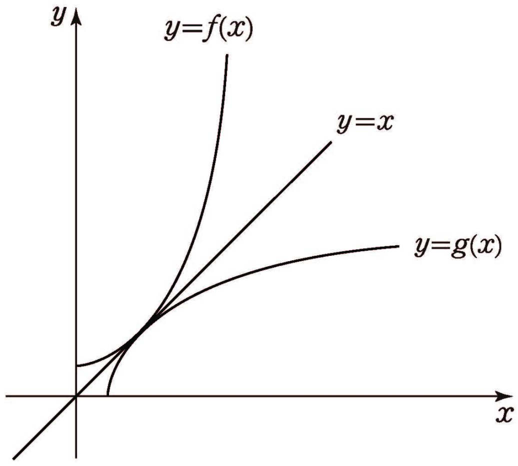
이 풀이의 단점은 앞의 〔해설〕보다 논리적으로 생각해야하는 부분의 난이도가 높고, 계산과정이 더 많이 들어갑니다. 이유는 간단합니다.
수직 조건을 살피지 못한 채 벡터를 분해했기 때문입니다.
문제의 상황에 맞춰서 '연장선'과 '수선의 발'을 잘 활용하면 어렵지 않게 풀이를 진행할 수 있습니다. 혹은 〔별해〕처럼 좌표를 잡아서 푸는 방법도 좋은 풀이로 이어질 수 있습니다. 남은 수험생활도 조금만 더 힘내시고, 저희 엡실론모의고사를 통해 많은 것을 얻어가셨으면 좋겠습니다.
끝까지 읽어주셔서 감사합니다.

30) [정답] 75 (출제자 : 11양종현)
[출제의도] 역함수의 미분법을 이해하고, 함수의 개형을 추론할 수 있는가?

[해설]
(가)에서 함수 $\dfrac{g(x)}{x}$가 $x=\alpha$에서 최댓값 $\dfrac{1}{\alpha}$을 가지므로 $\dfrac{g(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$,
$\left\{\dfrac{g(x)}{x}\right\}'_{x=\alpha} = \dfrac{\alpha g'(\alpha)-g(\alpha)}{\alpha^2}=0$가 성립한다.
따라서 $g(\alpha)=1$, $g'(\alpha)=\dfrac{g(\alpha)}{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$이 성립한다.
그런데 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로, $f(1)=\alpha$, $f'(1)=\alpha$이다.
또한 함수 $\dfrac{g(x)}{x}$가 $x=\alpha$에서 최댓값 $\dfrac{1}{\alpha}$을 갖는다는 의미는 모든 양수 x에 대하여 $\dfrac{g(x)}{x}\le\dfrac{1}{\alpha}$가 성립한다는 말이다.
그러므로 모든 양수 x에 대하여 $g(x)\le\dfrac{1}{\alpha}x\ (\because x>0)$
(나)에서 직선 $y=f'(1)(x-1)+f(1)$은 $f(1)=\alpha$, $f'(1)=\alpha$ 이므로 $y=\alpha x$ 즉, 아래 그림과 같이 함수 $f(x)$ 위의 점 $A(1,\ \alpha)$에서 접선을 그리면 원점을 지난다.



또한 (가)에서 모든 양수 x에 대하여 $g(x) \le \frac{1}{\alpha}x$ 임을 이용하면 $y=x$에 대한 대칭 때문에 모든 양수 x에 대하여 $f(x) \ge \alpha x$ 임을 알 수 있다.
(나)의 조건은 부등식 $\alpha x \le g(x)$를 만족하는 양의 실수 x가 존재함을 의미한다. $\alpha > 1$이라 가정해보면, 위 그림처럼 모든 양의 실수 x에 대하여 $g(x) \le \frac{1}{\alpha}x < \alpha x \le f(x)$ 이므로 $\alpha x \le g(x)$를 만족하는 양의 실수 x가 존재하지 않는다.
반면에 아래 그림과 같이 $\alpha = 1$일 때, $f(1) = g(1) = 1$ 이므로 $g(x) \le \frac{1}{\alpha}x = \alpha x \le f(x)$ 이고 $x = 1$에서 부등식 $x \le g(x)$를 만족한다. ($\because g(1) = 1$)



따라서 $f(1) = 1$, $f'(1) = 1$ 이다.
$f(1) = e^{a+b+c} = 1$, $f'(1) = (2a+b)e^{a+b+c} = 1$
$\therefore a+b+c = 0$, $2a+b = 1$ ⋯ ①
조건 (다)에서 $f(3) = e^{9a+3b+c} = e^3$ 이므로
$9a+3b+c = 3$ ⋯ ②
①과 ②에 의해 $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{3}{4}$ 이다.
따라서 $100(a+b) = 75$ 이다.

엡실론을 봐주신 모든 수험생 및 선생님 여러분들에게 진심으로 감사의 말씀을 드립니다.

2016학년도 엡실론 모의고사는 이것으로 모두 끝났습니다.

부족한 해설지를 끝까지 읽어주셔서 감사하며, 엡실론을 사랑해주신 수험생 여러분들께 좋은 결과가 있으리라 믿습니다.

수험생 여러분들의 건승을 기원합니다. 화이팅!