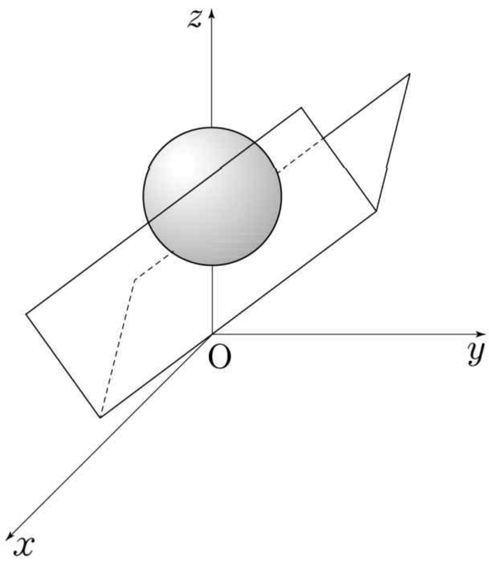
[2016수능 대비 포만한 오프라인 모의평가 수학 B형] 고난도 주요문항 해설

29. 좌표공간에서 구 $x^2+y^2+(z-2)^2=1$에 접하고 서로 수직인 두 평면 α, β가 만나서 생기는 직선을 l이라 하자. 직선 l이 원점을 지나고 yz평면 위에 있을 때, 평면 α의 방정식은 $ax+by+\sqrt{2}z=0$이다. $10a^2-b^2$의 값을 구하시오. [4점]



I) 조건의 해석

<u>구에 접하고</u> -> 구의 중심 $(0,0,2)$와 평면 α,β의 거리가 모두 1임을 알 수 있다

즉, z축과 두 평면이 이루는 각이 $\frac{\pi}{6}$이므로, 두 평면의 법선벡터는 모두 z축과 $\frac{\pi}{3}$의 각을 이룬다.

$\therefore (a,b,\sqrt{2})\cdot(0,0,1)=\sqrt{a^2+b^2+2}\times\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{2}$ 이므로

$$a^2+b^2=6$$

<u>서로 수직인</u> -> 아직 큰 의미를 이끌어내긴 힘들다. 따라서 유보!!

II) 그렇다면 평면 β는??

1. 원점을 지난다.
2. 구에 접한다.

이 두 조건을 만족한다는 점에서 평면 α와 같다.
따라서 $c^2+d^2=6$을 만족하는 어떤 실수 c, d에 대해 평면 β의 방정식을

$$\beta : cx+dy+\sqrt{2}z=0$$

라 할 수 있다.

III) 이제 수직 조건 해석을 해보자.
$\alpha \perp \beta$이므로 $(a, b, \sqrt{2}) \cdot (c, d, \sqrt{2})=0$

IV) 직선 l이 yz평면에 포함된다.

즉, 직선 l의 방향벡터를 $\vec{l}=(0, p, q)$라 할 수 있다.

$\vec{l}$는 평면 α, β의 두 법선벡터에 모두 수직이므로, 내적으로

$bp+q\sqrt{2}=dp+q\sqrt{2}=0$ ⋯⋯(☆)

$\therefore b=d$

※ 그림에서 $p \neq 0$임을 지레짐작하고 넘어갈 수도 있지만, 만약 이것이 찝찝하다면 $p \neq 0$임을 증명하고 넘어가도록 하자!!

만약 $p=0$라면 (☆) 식에서 $q=0$가 되어

직선 l의 방향벡터가 정의되지 않으므로 모순이다.

즉 $a^2=c^2$이고, $ac+bd+2=0$이므로 $ac=-(b^2+2)<0$
$\therefore c=-a$
$a^2=b^2+2$이므로 $a^2=4,\ b^2=2$

-아마 직선 l과 z축이 이루는 예각이 $\frac{\pi}{4}$라는 것을 활용하여 푼 경우가 많을 텐데, 그런 정보를 전혀 활용하지 않고도 구할 수 있다는 점이 강조되는 풀이입니다.

30. 함수 $f(x)=2e^{\sqrt{2}\sin x}+ax$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 어떤 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$$f'(x_1) \le g'(x_2)$$

를 만족시키는 양수 a의 최댓값과 최솟값의 합은 $pe+q$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이다.) [4점]

I) 역함수가 존재 : *도함수 $f'(x)$의 부호가 일정하다!!*

$f'(x)=2\sqrt{2}\cos x e^{\sqrt{2}\sin x}+a$

$$f''(x)=2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}\sin x}(\sqrt{2}\cos^2 x-\sin x)$$
$$=2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}\sin x}(1-\sqrt{2}\sin x)(\sqrt{2}+\sin x)$$

이므로

$f'(x)$는 $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 극값을 가지며, 그 중 $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 극솟값을, $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$일 때 극댓값을 가진다.

$\therefore a-2e \le f'(x) \le a+2e$인데

도함수 값의 부호가 일정하려면, 최댓값과 최솟값의 부호가 같아야 한다.

$\therefore (a-2e)(a+2e) \ge 0$이므로 $a \ge 2e$ ……ⓐ

II) 조건식 해석 : 역함수의 도함수????

$g'(x_2)=\dfrac{1}{f'(g(x_2))}$인데, 단조증가함수 f는 정의역과 치역이 모두 실수 전체의 집합인 함수이다.

즉, 함수 $g(x)$의 치역도 실수 전체의 집합이다.

2013학년도 9월 모의평가 수리 가형 21번에서도 같은 논리가 쓰입니다.

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $g'(x)\le\dfrac{1}{3}$이다.

(나) $\displaystyle\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{(x-3)g(x)}=\frac{8}{9}$

$f(1)$의 값은? [4점]

[2013학년도 9월 모의평가 수리 가형]

(가) 조건 해석

$\forall x\ \ g'(x)=\dfrac{1}{f'(g(x))}\ge\dfrac{1}{3}$이고, $g(x)$의 치역은 $(-\infty,\infty)$이므로

$\forall x\ f'(x)\ge3$ or $f'(x)<0$이다.

따라서 $g(x_2)=x_3$라 할 때

어떤 실수 x_1, x_2에 대해 $f'(x_1)\le g'(x_2)$임은 곧

어떤 실수 x_1, x_3에 대해 $f'(x_1)\le\dfrac{1}{f'(x_3)}$가 성립함과 동치이다.

어떤 실수 x_1, x_3에 대해 $f'(x_1) \cdot f'(x_3) \le 1$이 성립한다면

어떤 실수 x에 대해 $f'(x) \le 1$이 성립한다. ……★

<<<보충설명>>>

만약 모든 실수 x에 대해 $f'(x) > 1$이라면
모든 실수 x_1, x_3에 대해 $f'(x_1) \cdot f'(x_3) > 1$이다. ……☆

그런데
'모든 실수 x에 대해 $f'(x) > 1$' 은 '어떤 실수 x에 대해 $f'(x) \le 1$'의 부정이고
'모든 실수 x_1, x_3에 대해 $f'(x_1) \cdot f'(x_3) > 1$'은
'어떤 실수 x_1, x_3에 대해 $f'(x_1) \cdot f'(x_3) \le 1$'의 부정이다.

따라서 명제 ☆은 명제 ★의 대우이며, ☆이 참이면 ★도 참이다!!

즉, 함수 $f'(x)$의 최솟값 $a-2e$가 1보다 작거나 같아야만 한다.

$$\therefore a-2e \le 1 \quad \cdots\cdots ⓑ$$

ⓐ, ⓑ에서

$$2e \le a \le 2e+1$$