2025학년도 수능특강 핵심문항
미적분 COMMENT

by. 17학번머스크(OrbiID)

"이걸 활용한 넌 잘 될거야"

문제변형 기본틀

EBS 수능특강 미적 / 수능팀

1단원 수열의 극한

1 [24011-0018]

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.2단원.유제.1번		15수학1
대단원	중단원	난이도
15수극	급수	1

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n-1}{2^n+1}-\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}+1}\right)$의 값은?

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ 1

1)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.2단원.유제.1번	숫자	1

[출제포인트]
의외로 뜯어보면 이런 유형의 식을 조작하지 못하는 학생들이 많다. 기본기에 충실해야 한다.
일반항을 $n=1$부터 대입해서 나열하였을 때 소거됨을 확인 ㄱㄱ

[24011-0026]

3 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$일 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n + n^2 - 3n}{2a_n + 3n^2 - n}$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{4}{15}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{7}{15}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.2단원.Lv1.3번		미적분
대단원	중단원	난이도
급수	급수	2

2. 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{n}{n+1}\right) = 1$$

일 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{na_n + 1}{(2n+1)a_n + 1}$의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

2)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.2단원.Lv1.3번	숫자	1

[출제포인트]

급수가 수렴하면 일반항은 0으로 수렴하는지를 아는가를 묻는 기본 문제임. 사실 $a_n = \frac{n}{n+1}$으로 놓고 풀어도 답은 나온다.

[24011-0007]

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=2$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n(3a_n+1)}{n^2}$의 값은?

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.1단원.Lv1.1번		15미적
대단원	중단원	난이도
15수극	수열의 극한	1.5

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{a_n}=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^4}{a_n(6a_n+2)}$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

3)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.1단원.Lv1.1번	숫자	1.5

[출제포인트]

a_n을 결정할 수 없는 경우 문제에서 주어진 형태의 식을 조작하여 수렴하는 형태로 계산하는 문제이지만 앞 문제와 동일하게 $a_n=\frac{n^2}{3}$으로 놓고 풀어버려도 무방하다.

[24011-0008]

$\lim_{n\to\infty}\frac{an+3}{4n}=2$, $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n)=b$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

<table>
<tr><th colspan="3">원본 DATA</th></tr>
<tr><th colspan="2">출처</th><th>과목</th></tr>
<tr><td colspan="2">수특.미적.1단원.Lv1.2번</td><td>15미적</td></tr>
<tr><th>대단원</th><th>중단원</th><th>난이도</th></tr>
<tr><td>15수극</td><td>수열의 극한</td><td>2</td></tr>
</table>

4. $\lim_{n\to\infty}\frac{an-1}{3n}=3$, $\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{1+\frac{2a}{n}}-1\right)=b$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 9 ② 12 ③ 15 ④ 18 ⑤ 21

4)

<table>
<tr><th colspan="3">변형 DATA</th></tr>
<tr><th>출처</th><th>변형 유형</th><th>난이도</th></tr>
<tr><td>수특.미적.1단원.Lv1.2번</td><td>숫자</td><td>2</td></tr>
</table>

[출제포인트]

극한이 수렴하는 경우는 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴은 최고차 계수 비교

무리식 등장 $\infty-\infty$, $0\times\infty$에서는 유리화로 식을 정리 ㄱ

[24011-0009]

첫째항이 2이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \frac{4^n \times a_n - 1}{3 \times 2^{n+1}}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.1단원.Lv1.3번		15미적
대단원	중단원	난이도
15수극	수열의 극한	2

5. 첫째항이 1이고 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$\lim_{n \to \infty} \frac{(-2)^{n+2} + 3}{4^n \times a_n}$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

5)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.1단원.Lv1.3번	숫자	2

[출제포인트]
첫째항, 공비가 모두 주어져 있다. 단순 계산문제.
등비수열의 극한의 부정형에서는 다항식이 아니니 차수 대신 공비로 비교 ㅇ.<

ex. $\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 + 1}{3n^2}$ 은 최고차항이 2차 라고 하니까

$\lim_{n \to \infty} \frac{4^n + 3^n}{4^n + 2^n}$ 에서는 최고차항을 4^n이라고 생각해서 계수 ㄱ

$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n-1}+a^{-2n+1}}{a^{2n+1}+a^{-2n-1}}=\frac{1}{4}$을 만족시키는 모든 양수 a의 값의 합은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.1단원.유제.6번		15미적
대단원	중단원	난이도
15수극	수열의 극한	2

6. $\lim_{n\to\infty}\frac{a^{3n-2}+a^{-3n+1}}{a^{3n+1}+a^{-3n-2}}=\frac{1}{8}$이 되도록 하는 모든 양수 a의 값의 합은?

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

6)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.1단원.유제.6번	숫자	2

[출제포인트]

$0<a<1$, $a=1$, $a>1$인 케이스 분류하여 수렴값 계산하기.

그렇지 않으면 “모든” a를 찾지는 못할 수도 ....

2 [24011-0019]

자연수 n에 대하여 1부터 $(n+2)$까지의 자연수가 하나씩 적힌 $(n+2)$개의 공 중에서 서로 다른 2개를 택하는 경우의 수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.2단원.유제.2번		15수학1
대단원	중단원	난이도
15수극	급수	2

7. 자연수 n에 대하여 9×6^n의 모든 약수의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

7)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.2단원.유제.2번	숫자	2

[출제포인트]
자연수의 약수의 개수 구할 때는 소인수분해
ex. 6^n의 약수 개수는
$2^n\times3^n$으로 소인수분해한 후 $(n+1)(n+1)$

묻는 값이 $\frac{1}{a_n}$꼴로 나왔을 때는 부분분수 형태인 경우가 거의 99%이다.

예제 2 급수와 수열의 극한 사이의 관계 www.ebsi.co.kr

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)=10$일 때, $\lim_{n\to\infty}(S_{n+1}-2n)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

3 [24011-0020]

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\frac{3n}{n+2}\right)=1,\ \sum_{n=1}^{\infty}(b_n-4)=5$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}(a_n+6)(b_n+2)$의 값을 구하시오.

<table>
<tr><th colspan="3">원본 DATA</th></tr>
<tr><th colspan="2">출처</th><th>과목</th></tr>
<tr><td colspan="2">수특.미적분.2단원.유제.3번</td><td>15수학1</td></tr>
<tr><th>대단원</th><th>중단원</th><th>난이도</th></tr>
<tr><td>15수극</td><td>급수</td><td>2</td></tr>
</table>

8. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=5$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}(a_nS_n-3na_n)$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

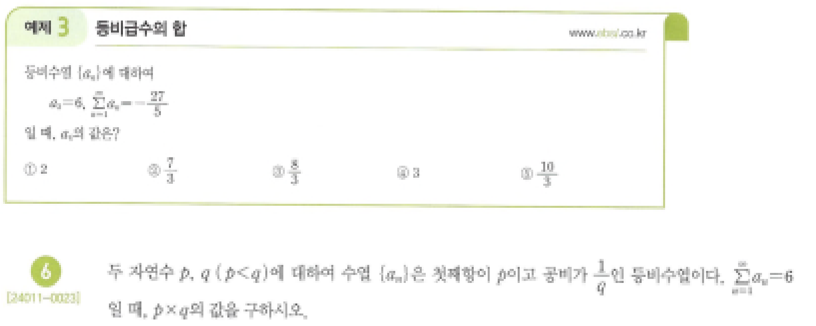
8)

<table>
<tr><th colspan="3">변형 DATA</th></tr>
<tr><th>출처</th><th>변형 유형</th><th>난이도</th></tr>
<tr><td>수특.미적분.2단원.유제.3번</td><td>숫자</td><td>2</td></tr>
</table>

[출제포인트]
주어진 조건이 담고 있는 정보가 두 가지

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=\lim_{n\to\infty}(S_n-3n)=5$$

라는 점에서 한 번쯤 풀어볼 만한 문제.
극한 계산할 때 수렴하는 것끼리는 쪼개서 계산 ㄱ
근데 발산하면 쪼갰다간 큰일남 주-의



예제 3 등비급수의 합 www.ebsi.co.kr

등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2=6,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=-\frac{27}{5}$$

일 때, a_1의 값은?

① 2 ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{10}{3}$

6 [24011-0023] 두 자연수 p, q $(p<q)$에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 p이고 공비가 $\frac{1}{q}$인 등비수열이다. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=6$ 일 때, $p\times q$의 값을 구하시오.

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.2단원.유제.6번		15수학1
대단원	중단원	난이도
15수극	급수	2

9. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2=-1,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{9}{10}$$

일 때, a_1의 값은?

① -2 ② $-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

9)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.2단원.유제.6번	숫자	2

[출제포인트]
기본유형. 수렴하는 등비급수의 합은
$\frac{\text{첫째항}}{1-\text{공비}}$

[24011-0028]

1 세 수 $a+13$, $a+1$, $a-2$가 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이룰 때, $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{2n}$의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.2단원.Lv2.1번		15수학1
대단원	중단원	난이도
15수극	급수	2

10. 서로 다른 세 수 $3a+1$, $a+1$, 1이 이 순서대로 공비가 r인 등비수열을 이룰 때, $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n(1-r^n)$의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ 1 ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{4}{3}$

10)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.2단원.Lv2.1번	숫자	2

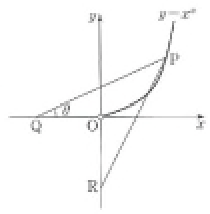
[출제포인트]

세 수가 등비수열이면 등비중항 $a_n \times a_{n+2} = (a_{n+1})^2$

시그마 분배는 ...... 곱하기는 하지 말고 ...... 덧셈뺄셈만 ㄱ ....

[24011-0017]

3 그림과 같이 1보다 큰 상수 a와 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^a\ (x>0)$ 위의 점 $\mathrm{P}(n,\ n^a)$과 점 $\mathrm{R}(0,\ (-a+1)n^a)$이 있다. 음의 실수 t에 대하여 점 $\mathrm{Q}(t,\ 0)$이 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$을 만족시킬 때, 직선 PQ와 x축이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\lim\limits_{n\to\infty}\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, 상수 a의 값은?



① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.1단원.Lv3.3번		15미적
대단원	중단원	난이도
15수극	수열의극한	4

11. 좌표평면에 상수 α와 자연수 n에 대하여 두 점

$$\mathrm{P}\left(n,\ n^{\alpha}\right),\ \mathrm{Q}\left(0,\ -n^{\alpha}\right)$$

이 있다. 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하자. x축 위의 점 R이 $\angle\mathrm{HRP}=\angle\mathrm{HQP}$를 만족시킬 때, 점 R의 x좌표를 $f(n)$이라 하자. 양수 k에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}=k$일 때, $k+\alpha$의 값은?

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

11)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.1단원.Lv3.3번	숫자	3

[출제포인트]
지수에 미지수를 놓는 형태+도형의 극한 조합이 신선해서
선별했음. 대-충이라도 그래프 위에 점을 찍어서 상황판단을
하자. 그림 한 눈에 보여서 도형의 성질 이용하기 편함
각의 이등분선의 성질도 까먹었으면 기억 ㄱ
α의 값이 대략적으로 추측이 간다면 금상첨화

[24011-0012]
두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $5n^2+2n<4na_n+b_n<5n^2+4n+1$이다.
(나) $\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+4)a_n}{2n^2+n}=\frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}$의 값은?

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.1단원.Lv2.2번		15미적
대단원	중단원	난이도
15수극	수열의 극한	2.5

12. 수열 $\{a_n\}$과 모든 항이 양수인 수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{nb_n}$의 값은?

(가) 모든 자연수 n에 대하여
$$(a_n)^2+9n^2(b_n)^2-n^2<6na_nb_n+2n+1$$
이다.
(나) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n+1}{n^2+b_n}=3$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

12)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.1단원.Lv2.2번	스페셜	3

[출제포인트]
복잡한 형태의 샌드위치정리
a_n과 b_n을 직접 구할 수는 없음 ㅠㅅㅠ
구하고자 하는 $\frac{a_n}{nb_n}$의 꼴을 부등식 안에서 만들어내자.
마지막에 lim 붙이면 < 에서 ≤ 가 되는 건 상식.

[24011-0013]

$0<k<1$인 상수 k와 2 이상의 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 원점 O와 두 점 $A_n\left(2-\frac{k}{n}, 0\right)$, $B_n\left(2, \frac{1}{n}\right)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 OA_nB_n의 외접원의 반지름의 길이를 R_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty} R_n=\frac{5}{4}$일 때, k의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{17}{24}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{19}{24}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.1단원.Lv2.3번		15미적
대단원	중단원	난이도
15수극	수열의 극한	3

13. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 원점 O와 두 점 $A_n(-2n, 0)$, $B_n(4n+1, 3n-2)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OA_nB_n의 넓이를 S_n이라 하고, 삼각형 OA_nB_n의 외접원의 반지름의 길이를 R_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{5S_n}{2n\times R_n}$의 값은?

① $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ ③ $\frac{3\sqrt{3}}{5}$
④ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

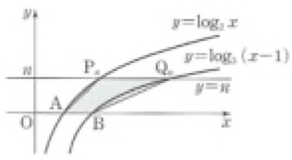
13)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.1단원.Lv2.3번	스페셜	3

[출제포인트]
제시한 도형의 설명이 간단하더라도 꼭 그림을 그려 해석하는 습관을 들이는게 좋다.
외접원 a.k.a 사인법칙
아니면 고1마냥 평면좌표로 구해도 되긴 함 ....

[24011-0014]

그림과 같이 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$이 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_3(x-1)$과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고, x축이 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=\log_3(x-1)$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 사각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{ABQ}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{n\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}}$의 값은?



① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.1단원.Lv2.4번		15미적
대단원	중단원	난이도
15수극	수열의 극한	2.5

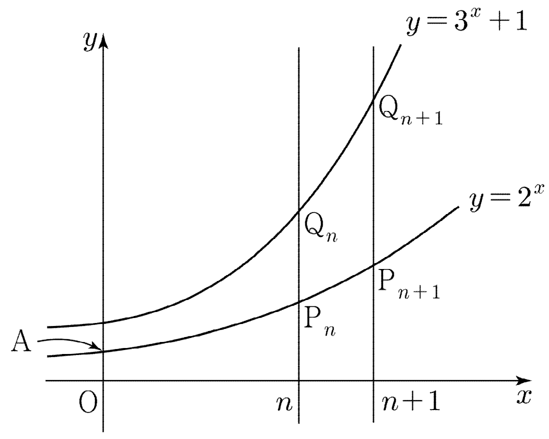
14. 그림과 같이 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=2^x,\ y=3^x+1$$

이 직선 $x=n$과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고,

곡선 $y=2^x$이 y축과 만나는 점을 A라 하자.

사각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이를 S_n, 삼각형 $\mathrm{AP}_n\mathrm{Q}_n$의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{n\times S_n}{T_{n+1}}$의 값은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

14)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.1단원.Lv2.4번	스페셜	3

[출제포인트]

사각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{Q}_n$이 사다리꼴. 그럼 끝. 대입 ㄱ. 고민 ㄴ.

[24011-0030]

3 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 양수 k에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-ka_n}{a_n}=1$이다.

(나) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2a_n+7a_n^2}{a_n^2+n^4}=1$

k의 값을 구하시오.

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.2단원.Lv2.3번		15수학1
대단원	중단원	난이도
15수극	급수	3

15. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$과 두 상수 p, q에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+n}{a_n-2n}=4, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}+\frac{pn-4}{n+2}\right)=q$$

일 때, $p\times q$의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

15)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.2단원.Lv2.3번	숫자	3

[출제포인트]

급수가 수렴하려면 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=-p$ / 공차는 $-p$임

[24011-0031]

4 $a_1=1$, $a_2=2$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n a_{n+1} a_{n+2} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은?

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{11}{3}$ ③ $\frac{23}{6}$ ④ 4 ⑤ $\frac{25}{6}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.2단원.Lv2.4번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15수극	급수	2

16. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\dfrac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = -\dfrac{1}{2}$

(나) a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10$일 때, a_1의 값을 구하시오.

16)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.2단원.Lv2.4번	스페셜	3

[출제포인트]
조건 (가)에서 홀수번째항끼리 등비수열
조건 (나)에서 $a_{2n-1}+a_{2n+1}=2a_{2n}$
둘이 합쳐 관계식 발견 규칙발견하면
홀은 홀대로 짝은 짝대로 등비수열 나옴

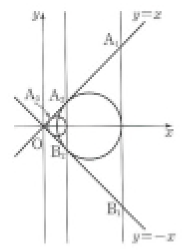
[24011-0033]

2 자연수 n에 대하여 직선 $y=x$ 위의 점 $A_n(x_n, x_n)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

> 점 $A_n(x_n, x_n)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=-x$와 만나는 점을 B_n이라 할 때, 삼각형 A_nOB_n에 내접하는 원이 직선 $y=x$와 만나는 점이 $A_{n+1}(x_{n+1}, x_{n+1})$이다.

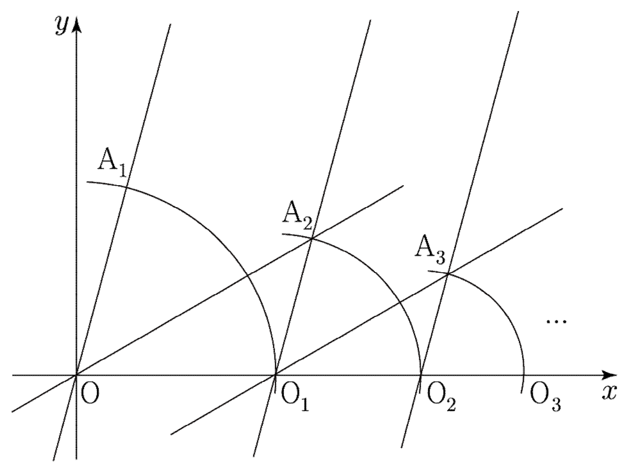
$x_1=8$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $8\sqrt{2}-2$ ② $8\sqrt{2}-1$ ③ $8\sqrt{2}$ ④ $8\sqrt{2}+1$ ⑤ $8\sqrt{2}+2$



원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.2단원.Lv3.2번		15수학1
대단원	중단원	난이도
15수극	급수	3

17. 그림과 같이 좌표평면 위의 점 O를 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 직선 위에 x좌표가 양수인 점 A_1을 $\overline{OA_1}=1$이 되도록 잡는다.
점 O를 중심으로 하고 선분 OA_1을 반지름으로 하는 원이 x축과 만나는 점 중 점 A_1에 가까운 점을 O_1이라 하자. 점 O_1을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 직선과 원점을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$인 직선이 만나는 점을 A_2라 하자.
점 O_1을 중심으로 하고 선분 O_1A_2를 반지름으로 하는 원이 x축과 만나는 점 중 A_2에 가까운 점을 O_2라 하자. 점 O_2를 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 직선이 점 O_1을 지나고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$인 직선과 만나는 점을 A_3이라 하자.
점 O_2를 중심으로 하고 선분 O_2A_3를 반지름으로 하는 원이 x축과 만나는 점 중 A_3에 가까운 점을 O_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 점 O_n의 좌표를 $(x_n, 0)$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} x_n$의 값은? (단, O는 원점이다.)



① $\sqrt{2}$ ② $1+\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{2}$
④ $2+\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

17)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.2단원.Lv3.2번	스페셜	3

[출제포인트]
덧셈정리 이용한 등비급수 활용 나름 신선
등비급수 문제는 작년 한 해동안 평가원이 배제했기 때문에
올해도 나올 가능성이 높지 않지만 기습 대비 ㄱ
굳이 너무 정확히 모든 걸 찾으려고 애쓰지 말고 규칙만 찾자.
어차피 급수 도형 문제 = 초항과 공비.

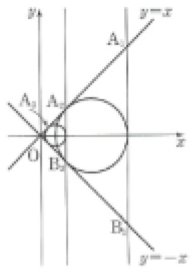
[24011-0033]

자연수 n에 대하여 직선 $y=x$ 위의 점 $A_n(x_n, x_n)$을 다음 규칙에 따라 정한다.

> 점 $A_n(x_n, x_n)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 직선 $y=-x$와 만나는 점을 B_n이라 할 때, 삼각형 A_nOB_n에 내접하는 원이 직선 $y=x$와 만나는 점이 $A_{n+1}(x_{n+1}, x_{n+1})$이다.

$x_1=8$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $8\sqrt{2}-2$　② $8\sqrt{2}-1$　③ $8\sqrt{2}$　④ $8\sqrt{2}+1$　⑤ $8\sqrt{2}+2$



원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.2단원.Lv3.2번		15미적
대단원	중단원	난이도
15수극	급수	3

18. 자연수 n에 대하여 직선 $y=2x$ 위의 점 $A_n(x_n, 2x_n)$에서 x축에 내린 수선의 발을 B_n이라 하자. 선분 OA_n 위에 점 A_{n+1}을 $\angle OB_nA_{n+1}=\frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고 점 A_{n+1}에서 x축에 내린 수선의 발을 B_{n+1}이라 하자. $x_1=6$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$의 값은? (단, $x_n>0$이고 O는 원점이다.)

① 9　② 10　③ 11　④ 12　⑤ 13

18)

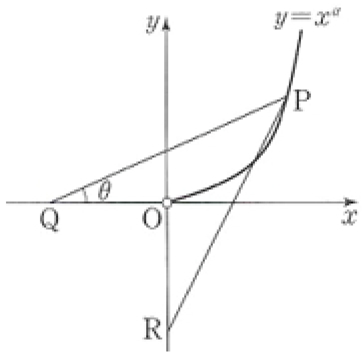
변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.2단원.Lv3.2번	스페셜	3

[출제포인트]
등비급수의 활용+각이등분선의 성질
윗 문제보다는 신선함이 떨어진다.
98% 등비급수. 고민 ㄴ. 초항과 공비 ㄱ.

[24011-0017]

그림과 같이 1보다 큰 상수 a와 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^a\ (x>0)$ 위의 점 $\mathrm{P}(n,\ n^a)$과 점 $\mathrm{R}(0,\ (-a+1)n^a)$이 있다. 음의 실수 t에 대하여 점 $\mathrm{Q}(t,\ 0)$이 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$을 만족시킬 때, 직선 PQ와 x축이 이루는 예각의 크기를 θ라 하자. $\lim_{n\to\infty}\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, 상수 a의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{6}$

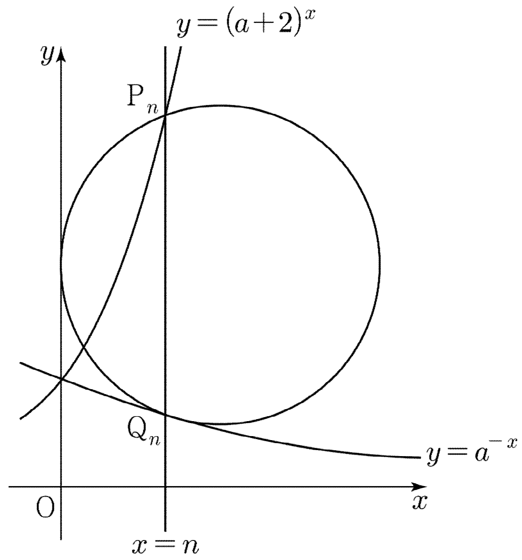


원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.1단원.Lv3.3번		15미적
대단원	중단원	난이도
15수극	수열의 극한	3

19. 그림과 같이 상수 $a\,(a>1)$과 자연수 n에 대하여 두 곡선

$$y=(a+2)^x,\quad y=a^{-x}$$

이 직선 $x=n$과 만나는 점을 각각 P_n, Q_n이라 하자. 두 점 P_n, Q_n을 모두 지나고 y축에 접하는 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\left\{n(2r_n-n)\times\frac{4^n}{7^{2n}+5^{2n}}\right\}=\frac{1}{4}$일 때, a의 값은?



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

19)

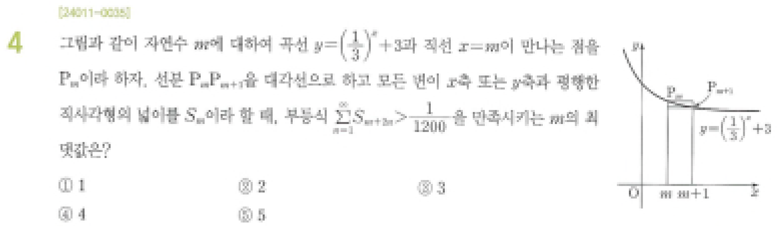
변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.1단원.Lv3.3번	스페셜	4

[출제포인트]

주어진 도형은 굉장히 깔끔한 편인데 비해 구해야 하는 값은 굉장히 귀찮은 형태. 킬러를 배제하고 계산량을 늘여서 출제한 작년 수능 기조에 맞는 문제

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$의 길이를 2가지 방법으로 표현해서 r_n을 구하자.

좌표 대입하기 & 원에서 현의 길이 구하기



[24011-0035]

4 그림과 같이 자연수 m에 대하여 곡선 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x+3$과 직선 $x=m$이 만나는 점을 P_m이라 하자. 선분 P_mP_{m+1}을 대각선으로 하고 모든 변이 x축 또는 y축과 평행한 직사각형의 넓이를 S_m이라 할 때, 부등식 $\sum_{n=1}^{\infty} S_{m+2n} > \frac{1}{1200}$을 만족시키는 m의 최댓값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.2단원.Lv3.4번		15수학1
대단원	중단원	난이도
15수극	급수	3

20. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_2\times a_n \ (a_2\neq 0),$$

$$b_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$$

를 만족시킨다. 상수 c에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} b_n=c$일 때, c의 값을 구하시오.

20)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.2단원.Lv3.4번	스페셜	4

[출제포인트]

$b_n=\sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ 도 등비수열인데 헷갈리는 학생들이 의외로 많다는 점에서 한 번쯤 연습하고 넘어가도 좋을 문제.

등비급수 -> $\frac{\text{첫째항}}{1-\text{공비}}$.

[24011-0034]

3 3의 배수인 자연수 p에 대하여 첫째항이 p이고 공비가 $\frac{3}{4}$인 등비수열 $\{a_n\}$과 첫째항이 6이고 공비가 $\frac{2p-10}{p-2}$인 등비수열 $\{b_n\}$이 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)=q$를 만족시킨다. $p+q$의 값은? (단, q는 상수이다.)

① -8 ② -7 ③ -6 ④ -5 ⑤ -4

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.2단원.Lv3.3번		미적분
대단원	중단원	난이도
급수	급수	4

21. 등비수열 $\{a_n\}$과 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=0$
>
> (나) 정수 k에 대하여 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4a_n}{b_n}=k$이다.

k의 최댓값을 M이라 하자. $k=M$이고 $a_1+b_1=-4$일 때, $|a_1 \times b_1|$의 값을 구하시오.

21)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.2단원.Lv3.3번	스페셜	4.5

[출제포인트]

$\frac{\text{등비수열}}{\text{등비수열}}$ 역시 등비수열.

조건이 간단하게 주어져 있는 점에 비해 생각해야 할 점이 많다는 점에서 짚어볼 점이 많다고 생각해 선별.

정수, 자연수 조건을 만족시키는 정수가 몇 개 없겠지 하고 접근.

2단원 미분법

[24011-0079]

8 함수 $f(x)=x^2e^{\frac{x}{2}}$에 대하여 $f''(2)$의 값은?

① $6e$ ② $7e$ ③ $8e$ ④ $9e$ ⑤ $10e$

원본 DATA		
출처		**과목**
수특.미적분.4단원.Lv1.8번		미적분
대단원	**중단원**	**난이도**
미분	여러 가지 미분법	1

22. 함수 $f(x)=(x^2+4)\times\sin\frac{\pi x}{2}$ 에 대하여 $f'(2)$ 의 값은?

① -2π ② -3π ③ -4π ④ -5π ⑤ -6π

22)

변형 DATA		
출처	**변형 유형**	**난이도**
수특.미적분.4단원.Lv1.8번	숫자	1

[출제포인트]

기본유형 - 그냥 곱의 미분. $\frac{\pi}{2}$ 빼먹으면 .... (한숨)

9
24011-0044]

함수 $f(x)=ax-3\sin x$에 대하여 $0\le x<2\pi$에서 x에 대한 방정식 $f'(x)=0$의 실근이 존재하도록 하는 정수 a의 개수는?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.3단원.유제.9번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15미분	여러가지함수의미분	1

23. 함수 $f(x)=kx+4\cos x$가 극값을 갖도록 하는 정수 k의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

23)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.3단원.유제.9번	숫자	1

[출제포인트]
$f'(x)=0$에서 부호 변화가 존재해야 극값을 가짐.
걍 냅다 $f'(x)=0$ 했다가는 근소한 차이로 배신당할수도..

1 [24011-0036]

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{6x} - e^{4x} - e^{2x} + 1}{x^2}$의 값은?

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.3단원.유제.1번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15미분	여러가지함수의미분	1.5

24. $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x - \cos^2 x + \cos^3 x}{x^4}$ 의 값은?

① $\frac{1}{16}$　② $\frac{1}{8}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{2}$　⑤ 1

24)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.3단원.유제.1번	숫자	1.5

[출제포인트]
로피탈 떠올리면 산으로 감.
보자마자 $1 - \cos^2 x$로 묶을 수 있어야 한다.

[24011-0047]

3 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+a}{\sin 3x}=b$를 만족시키는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.3단원.Lv1.3번		미적분
대단원	중단원	난이도
미분	여러 가지 함수의 미분	1

25. 두 상수 a, b에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(a+2x)}{1-\cos x}=b$$

일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

25)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.3단원.Lv1.3번	숫자	1.5

[출제포인트]
지수+로그+삼각 극한 짬뽕!
분자 수렴하려면 $x\times x$ 필요함
분모 수렴하려면 x^2 필요함
그럼 분자 분모 x^2으로 나눠버령

2 [24011-0063] 열린구간 $(0, \pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\cot x+\csc x$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}=-\frac{4}{3}$일 때, 상수 a의 값은? (단, $0<a<\pi$)

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $\frac{2}{3}\pi$ ⑤ $\frac{5}{6}\pi$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.4단원.유제.2번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15미분	여러 가지 미분법	2

26. 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=\sec x+\tan x$가 있다. 상수 $a\left(0<a<\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=2$일 때, a의 값은?

① $\frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{\pi}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}\pi$

26)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.4단원.유제 2번	숫자	2

[출제포인트]
$f'(a)=2$. 미분 ㄱ. 계산 ㄱ.

[24011-0074]

3 두 상수 a, b에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left\{\frac{\sin^2\left(\frac{2}{3}\pi+2h\right)}{\cos^2\left(\frac{2}{3}\pi+2h\right)}-a\right\}=b$일 때, ab의 값은?

① $-60\sqrt{3}$ ② $-48\sqrt{3}$ ③ $-36\sqrt{3}$ ④ $-24\sqrt{3}$ ⑤ $-12\sqrt{3}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.4단원.Lv1.3번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15미분	여러 가지 미분법	2

27. 두 상수 a, b에 대하여

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{3}+ah\right)-b}{h}=9$$

일 때, $a \times b$의 값은?

① $\sqrt{3}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{3}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{3}$

27)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.4단원.Lv1.3번	숫자	2

[출제포인트]

보자마자 $f(x)=\sin^3 x$라 놓고 $af'\left(\frac{\pi}{3}\right)$으로 생각.

4
[24011-0065]
함수 $f(x)=xe^{\cos x}$에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은?

① $2-\pi$ ② $1-\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{\pi}{2}$ ④ $1+\frac{\pi}{2}$ ⑤ $2+\pi$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.4단원.유제 4번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15미분	여러 가지 미분법	2

28. 함수 $f(x)=x\sin\pi(e^{x}-1)$에 대하여 $f'(\ln 2)$의 값은?

① $-2\pi\ln 2$ ② $-\pi\ln 2$ ③ $\pi\ln 2$
④ $2\pi\ln 2$ ⑤ $3\pi\ln 2$

28)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.4단원.유제 4번	숫자	2

[출제포인트]
단순한 합성함수의 미분법 기본 문제인데
우리 소중한 π. 미분할 때 잊지 말자.

[24011-0078]

7 함수 $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'\left(\frac{1}{3}\right)$의 값은?

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{5}{4}$　④ $\frac{7}{4}$　⑤ $\frac{9}{4}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.4단원.Lv1.7번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15미분	여러 가지 미분법	2

29. 함수 $f(x)=e^x-\frac{4}{e^x}$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(a)=\frac{1}{4}$이다. 상수 a의 값은?

① -2　② 0　③ 2　④ 4　⑤ 6

29)

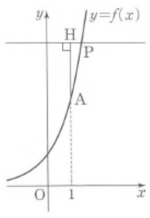
변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.4단원.Lv1.7번	숫자	2

[출제포인트]

기본유형 - 역함수의 미분계수

$f(a)=b$ 이면 $f'(a)\times g'(b)=1$

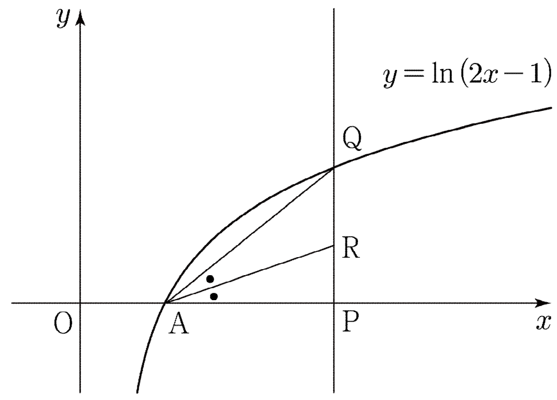
3 [24011-0038] 그림과 같이 함수 $f(x)=\frac{1}{2}e^{x+1}$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위에 두 점 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$, $\mathrm{P}(t,\ f(t))$가 있다. 점 A에서 점 P를 지나고 x축에 평행한 직선에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\lim_{t\to1+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\overline{\mathrm{PH}}}$의 값은? (단, $t>1$)



① $\frac{e^2}{4}$ ② $\frac{e^2}{2}$ ③ e^2
④ $2e^2$ ⑤ $4e^2$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.3단원.유제.3번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15미분	여러가지함수의미분	2.5

30. 그림과 같이 실수 $t\,(t>1)$에 대하여 점 $\mathrm{P}(t,\,0)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\ln(2x-1)$과 만나는 점을 Q라 하자. 점 $\mathrm{A}(1,\,0)$에 대하여 $\angle\mathrm{QAP}$의 이등분선이 선분 PQ와 만나는 점을 R이라 할 때, $\lim_{t\to1+}\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{PR}}}$의 값은?



① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

30)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.3단원.유제.3번	스페셜	2.5

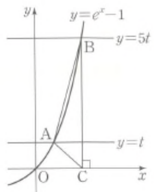
[출제포인트]

각의 이등분선의 성질을 이용하자. $\frac{\overline{\mathrm{QR}}}{\overline{\mathrm{PR}}}=\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{AP}}}$.

함수의 극한에서는 당장 식이 귀찮아도 일단 써보면 나옴

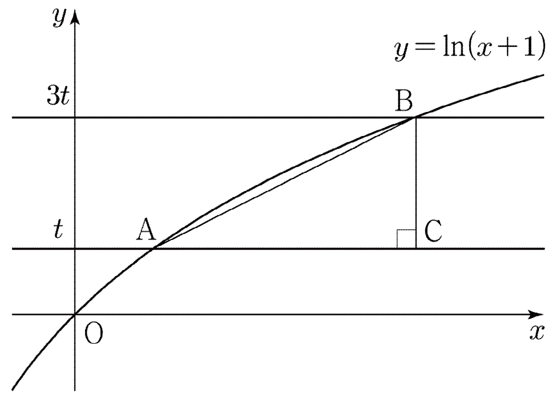
[24011-0050]

2 그림과 같이 양수 t에 대하여 곡선 $y=e^x-1$이 두 직선 $y=t$, $y=5t$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ACB의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 0+} \frac{S(t)}{t^2}$의 값을 구하시오.



원본 DATA		
출처		**과목**
수특.미적분.3단원.lv2.2번		15미적분
대단원	**중단원**	**난이도**
15미분	여러가지함수의미분	2.5

31. 그림과 같이 곡선 $y=\ln(x+1)$과 두 직선 $y=t$, $y=3t\ (t>0)$ 의 교점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 직선 $y=t$에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t \to 0+} \frac{S(t)}{t^2}$ 의 값을 구하시오.



31)

변형 DATA		
출처	**변형 유형**	**난이도**
수특.미적분.3단원.lv2.2번	숫자	2.5

[출제포인트]
직각삼각형 넓이니까 그대로 t를 활용해 좌표만 잘 잡으면 날로 먹을 수 있는 기회.

5 [24011-0040]

기울기가 m $(m>1)$이고 원점을 지나는 직선을 l이라 하고, 직선 l을 x축에 대하여 대칭이동한 직선을 l'이라 하자. 두 직선 l, l'이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$가 되도록 하는 m의 값은?

① 2 ② $1+\sqrt{2}$ ③ $1+\sqrt{3}$ ④ 3 ⑤ $1+\sqrt{5}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.3단원.유제.5번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15미분	여러가지함수의미분	2

32. 점 $\mathrm{P}(a,\ -2)$에서 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$에 그은 두 접선을 각각 l_1, l_2라 하자. 두 직선 l_1, l_2가 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$일 때, 양수 a의 값은?

① $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{11}}{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{14}}{2}$

32)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.3단원.유제.5번	스페셜	3

[출제포인트]
기울기 a.k.a $\tan\theta$

기본유형 – 좌표평면에서 두 직선이 이루는 각은 탄젠트 덧셈정리를 이용하자.
$\tan\theta = |\tan(\beta-\alpha)|$

[24011-0053]

5 실수 a와 자연수 n이

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan ax - \sin ax}{x^n} = 108$$

을 만족시킬 때, $a+n$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.3단원.lv2.5번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15미분	여러가지함수의미분	3

33. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 인 모든 실수 x에 대하여

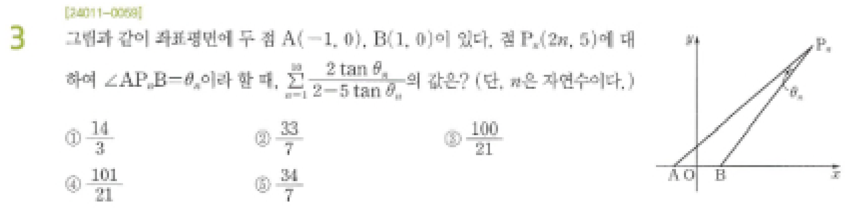
$$(\tan x - \sin x)^2 f(x) = (a - 2\cos x)^3$$

을 만족시킬 때, $a \times f(0)$의 값을 구하시오.
(단, a는 상수이다.)

33)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.3단원.lv2.5번	스페셜	3

[출제포인트]
$x=0$ 대입해서 a부터 구해주기
$0 \times f(x) = 0$ 꼴로 표현된 함수는 항상 극한을 취해볼 생각을 해야 한다. 식 정리해서 $f(0)$ ㄱㄱ.



[24011-0069]

3 그림과 같이 좌표평면에 두 점 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$이 있다. 점 $P_n(2n, 5)$에 대하여 $\angle AP_nB=\theta_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{2\tan\theta_n}{2-5\tan\theta_n}$의 값은? (단, n은 자연수이다.)

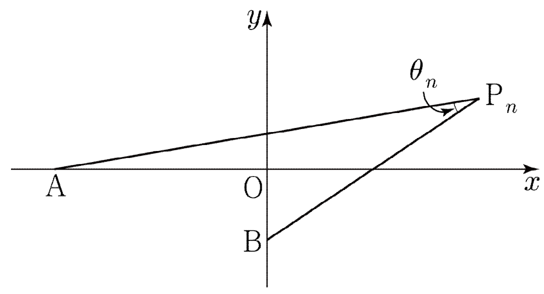
① $\frac{14}{3}$ ② $\frac{33}{7}$ ③ $\frac{100}{21}$ ④ $\frac{101}{21}$ ⑤ $\frac{34}{7}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.3단원.Lv3.3번		15미적
대단원	중단원	난이도
15미분	여러가지함수의미분	3

34. 그림과 같이 좌표평면 위에 두 점

$A(-3, 0)$, $B(0, -1)$

이 있다. 자연수 n에 대하여 점 P_n을 $P_n(n, 1)$이라 하고, $\angle AP_nB=\theta_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\left(\tan\theta_n-\frac{1}{n+1}\right)$의 값은?



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

34)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.3단원.Lv3.3번	숫자	3

[출제포인트]
특수한 도형 위의 세 점이 아니라, 연관성이 없는 두 점과 직선 위의 한 점으로 이루어진 각의 크기라는 점에서 익숙하지 않아 한 번쯤 풀어봐도 좋을 듯.

코사인법칙 vs 기울기로 덧셈정리

[24011-0080]

1 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 $f(1)\times f'(1)\neq 0$인 함수 $f(x)$에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\frac{f(x)e^{x}}{x^{k}+1}$$

이라 하자. $\frac{g(1)}{f(1)}=\frac{g'(1)}{f'(1)}$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.4단원.Lv2.1번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15미분	여러 가지 미분법	3

35. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$을 만족시킨다. 함수

$$g(x)=e^{x^{k}}\sqrt{f(x)}$$

에 대하여 $2g'(1)f(1)=12g(1)f(1)+f'(1)g(1)$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

35)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.4단원.Lv2.1번	숫자	3

[출제포인트]
참고 - 지수에 식이 들어가고 곱의 미분이 너무 복잡할 것 같으면 양변에 ln을 취해서 정리해놓고 미분 ㄱ

[24011-0086]

7 곡선 $e^{2x}-ke^{x+y}+y^2=-4$가 x축과 서로 다른 두 점 P, Q에서 만나고, 곡선 위의 두 점 P, Q에서의 접선의 기울기의 차가 $\frac{6}{5}$일 때, 상수 k의 값은? (단, $k>4$)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.4단원.Lv2.7번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15미분	여러 가지 미분법	3

36. 두 실수 a, $b\,(a<b)$에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a,\,2a)$, $\mathrm{B}(b,\,2b)$가 모두 곡선 $C: e^y-5e^x+6=0$ 위에 있다. 곡선 C 위의 두 점 A, B에서의 접선이 이루는 예각을 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은?

① $\frac{5}{31}$ ② $\frac{6}{31}$ ③ $\frac{7}{31}$ ④ $\frac{8}{31}$ ⑤ $\frac{9}{31}$

36)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.4단원.Lv2.5번	스페셜	3

[출제포인트]
매개변수로 표현된 함수 + 접선이 이루는 예각의 크기 라는 조합이 신선해서 한 번쯤 풀어볼 만한 문항.
두 점 A, B는 $y=2x$ 위의 점이라 놓고 교점 구하기

[24011-0108]

8 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\left(0\le t\le\frac{\pi}{4}\right)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=\sqrt{2}\cos 2t+2,\ y=\sqrt{3}\sin 2t-\cos 2t$$

이다. 시각 $t=a$에서 점 P가 x축 위에 있을 때, 시각 $t=a$에서의 점 P의 속력은? $\left(\text{단, } 0<a<\frac{\pi}{4}\right)$

① $2\sqrt{3}$ ② $\sqrt{14}$ ③ 4 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{5}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.5단원.Lv2.3번		15미적
대단원	중단원	난이도
15미적	도활	2

37. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0<t<\pi)$에서의 위치 (x, y)가

$$x=\sin t+\cos t,\ y=2\cos t-\sin t$$

이다. 시각 $t=a$에서 점 P가 y축 위에 있을 때, 시각 $t=a$에서의 점 P의 속력은? (단, $0<a<\pi$)

① $\sqrt{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ④ $\frac{\sqrt{11}}{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

37)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.5단원.Lv2.3번	숫자	3

[출제포인트]
기본유형 연습

[24011-0103]

3 함수 $f(x)=|x^2-3|e^{-x}$의 모든 극댓값의 곱은? (단, $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=0$)

① $\frac{10}{e^2}$ ② $\frac{12}{e^2}$ ③ $\frac{14}{e^2}$ ④ $\frac{16}{e^2}$ ⑤ $\frac{18}{e^2}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.5단원.Lv1.3번		15수학1
대단원	중단원	난이도
15미분	도함수의 활용	2

38. 양수 a에 대하여 함수

$$f(x)=|x^2-3a^2|e^{\frac{x}{a}}$$

의 모든 극댓값의 곱이 $\frac{3}{4}$일 때, a의 값은?

(단, $\lim_{x\to-\infty} x^2e^x=0$)

① $\frac{\sqrt{e}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{e}}{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{e}}{4}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{e}}{4}$

38)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.5단원.Lv1.3번	숫자	3

[출제포인트]
지수함수 어차피 0보다 큼.
절댓값 없다고 생각해서 그린 뒤에 접어올리삼
대부분의 경우 절댓값이 없는 상태의 함수의 모든 극값이
절댓값이 씌워졌을 때 극댓값이 됨

[24011-0107]

7 모든 양의 실수 x에 대하여 부등식 $\ln 2x \le \frac{x}{e^2} + k$가 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값은?

① $1+\ln 2$ ② $1+2\ln 2$ ③ $2+\ln 2$ ④ $2+2\ln 2$ ⑤ $3+\ln 2$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.5단원.Lv1.7번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15미분	도함수의 활용	2

39. 모든 양의 실수 x에 대하여 부등식

$$\frac{\ln ax}{x} \le k \le \frac{e^x}{x}$$

이 성립하도록 하는 실수 k의 값이 하나뿐일 때, 양수 a의 값은?

① $\sqrt{e}$ ② e ③ $e\sqrt{e}$ ④ e^2 ⑤ $e^2\sqrt{e}$

39)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.5단원.Lv1.7번	스페셜	3

[출제포인트]
좌우에 있는 함수 그리기 번거로우니
어차피 양의 실수 x 양변에 전부 곱해서 각각 그려보자.
$\ln ax \le kx \le e^x$
하나밖에 없다 = 접할거다

황제17머스크

[24011-0101]

1 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=(x+2)e^x$에 그은 두 접선의 기울기의 곱은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.5단원.Lv1.1번		15미적
대단원	중단원	난이도
15미적	도활	2

40. 원점에서 곡선 $y=e^{ax^2}\ (a>0)$에 그은 두 접선의 기울기의 곱이 -4일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{2}{e}$ ③ $\frac{3}{e}$ ④ $\frac{4}{e}$ ⑤ $\frac{5}{e}$

40)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.5단원.Lv1.1번	숫자	3

[출제포인트]
주어진 함수가 우함수임을 파악한다면, 자연스럽게 두 접선의 기울기가 각각 2, -2임을 알 수 있다. 제1사분면 쪽만 계산하자.

[24011-0105]

5 닫힌구간 $[a,\ a+6]$에서 함수 $f(x)=\dfrac{8x}{x^2-2x+9}$의 최댓값이 2, 최솟값이 1이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합을 구하시오.

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.5단원.Lv1.5번		15미적
대단원	중단원	난이도
15미적	도함	2

41. 양의 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[-t,\ t]$에서 함수

$$f(x)=\frac{x-3}{x^2-6x+10}$$

의 최댓값을 $g(t)$라 하자. $g(1)+g(5)$의 값이 $\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

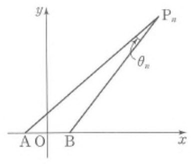
41)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.5단원.Lv1.5번	스페셜	3.5

[출제포인트]
기본유형 연습 : 그래프 개형 파악하기 + 예전 기출 비슷한 느낌

[24011-0059]

3 그림과 같이 좌표평면에 두 점 A$(-1,\ 0)$, B$(1,\ 0)$이 있다. 점 $\mathrm{P}_n(2n,\ 5)$에 대하여 $\angle \mathrm{AP}_n\mathrm{B}=\theta_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{2\tan\theta_n}{2-5\tan\theta_n}$의 값은? (단, n은 자연수이다.)



① $\frac{14}{3}$ ② $\frac{33}{7}$ ③ $\frac{100}{21}$ ④ $\frac{101}{21}$ ⑤ $\frac{34}{7}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.3단원.lv3.3번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15미분	여러가지함수의미분	3.5

42. 좌표평면 위의 세 점

A$(k,\ 5k^2)$, B$(2k,\ 8k^2)$, C$(4k,\ 8k^2)$

에 대하여 $\tan(\angle\mathrm{BAC})$의 값이 최대가 되도록 하는 양수 k의 값을 a라 하고, 이때 $\tan(\angle\mathrm{BAC})$의 값을 M이라 하자. $30\times a\times M$의 값을 구하시오.

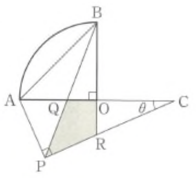
42)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.3단원.lv3.3번	스페셜	3.5

[출제포인트]
탄젠트 덧셈정리 + **산술기하**를 이용한 최댓값 구하기.
미분이용해도 됨

[24011-0061]

5 그림과 같이 $\overline{OA}=\overline{OB}=1$이고 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 AOB가 있다. 선분 OA를 1 : 2로 외분하는 점 C에 대하여 $\angle CPA=\frac{\pi}{2}$, $\angle PCA=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{4}\right)$인 점 P를 선분 OA와 선분 BP가 만나도록 정한다. 두 선분 OA, BP가 만나는 점을 Q, 두 직선 OB, CP가 만나는 점을 R이라 할 때, 사각형 OQPR의 넓이를 $f(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{\theta}$의 값은?

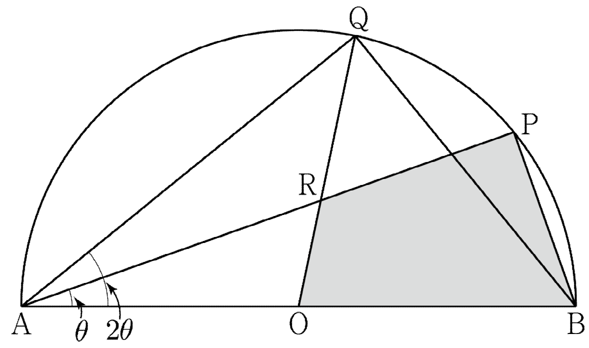


① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{8}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.3단원.lv3.5번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15미분	여러가지함수의미분	3.5

43. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB=\theta$, $\angle QAB=2\theta$가 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 선분 OQ와 선분 AP가 만나는 점을 R이라 하고 사각형 OBPR의 넓이를 $S(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\alpha$일 때, 3α의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$)



43)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.3단원.lv3.5번	스페셜	3.5

[출제포인트]
반원 위에 놓인 점이라면 응당 직각 표시를 하고 해석을 시작.
이상하게 생긴 사각형은 삼각형 두 개로 뽀개자.
삼각형 OAR에서 사인법칙을 이용하여 변의 길이 표현.

황제17머스크

[24011-0113]

5 $0<t<1$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=\ln(1+e^x)-tx$의 극값을 $g(t)$라 할 때, $g(t)$의 최댓값은?

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

[24011-0114]

6 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=\cos^2 x+7\cos x$가 있다. 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선 중 y절편이 최대인 직선이 곡선과 접하는 점을 P라 할 때, 점 P의 y좌표는?

① $\frac{21}{16}$ ② $\frac{23}{16}$ ③ $\frac{25}{16}$ ④ $\frac{27}{16}$ ⑤ $\frac{29}{16}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.5단원.Lv2.5번+6번		15미적
대단원	중단원	난이도
15미적	도활	3

44. $x>0$에서 정의된 함수 $f(x)=\sin\frac{\pi x}{a}$ $(a>0)$이 있다. 함수

$$g(x)=f(x)-xf'(x)$$

가 극대가 되도록 하는 실수 x의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 a_1, a_2, a_3, $\cdots$ 이라 하자. $(a_2)^2=a_1+a_3$일 때, $f'(2)$의 값은?

① $-\frac{5}{2}\pi$ ② -2π ③ $-\frac{3}{2}\pi$

④ $-\pi$ ⑤ $-\frac{\pi}{2}$

44)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.5단원.Lv2.5번+6번	스페셜	3.5

[출제포인트]

극대가 되도록 하는 x의 값이 수열적인 표현으로 나왔을 때는 규칙성 파악.

극대. 미분계수가 "양수"에서 "음수"가 되는 지점.

[24011-0087]

8 열린구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=ax\tan x$의 역함수를 $g(x)$라 하자. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2g(x)-x}{2x-\pi}=b$일 때, ab의 값은? (단, a, b는 상수이고, $a>0$이다.)

① $-\frac{4\pi}{1+\pi}$ ② $-\frac{4\pi}{2+\pi}$ ③ $-\frac{2\pi}{1+\pi}$ ④ $-\frac{2\pi}{2+\pi}$ ⑤ $-\frac{\pi}{2+\pi}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.4단원.Lv2.8번		15미적
대단원	중단원	난이도
15미분	여러가지미분법	3

A.2-2-1-1. 양승진 x CSM17 1회 문제편 (미주O)(최종본.0802ver).3차최윤동
문제사용

45. 실수 $a\,(a>e)$에 대하여 구간 $[1, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)=axe^{-x}$이 있다. 함수 $f(x)$와 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f'(g(x))$가 열린구간 $(0, 1)$에서 감소할 때, a의 최솟값은? (단, $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$)

① $\frac{4e^2}{5}$ ② $\frac{7e^2}{10}$ ③ $\frac{3e^2}{5}$ ④ $\frac{e^2}{2}$ ⑤ $\frac{2e^2}{5}$

45)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.4단원.Lv2.8번	스페셜	4

[출제포인트]

$f'(g(x))=\frac{1}{g'(x)}$가 감소함. $g'(x)$는 증가함. $g''(x)\geq 0$임.

합성함수 그래프 : n축 사용 연습.

[24011-0113]

5 $0<t<1$인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=\ln(1+e^{x})-tx$의 극값을 $g(t)$라 할 때, $g(t)$의 최댓값은?

① $\ln 2$ ② $\ln 3$ ③ $2\ln 2$ ④ $\ln 5$ ⑤ $\ln 6$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.5단원.Lv2.5번		미적분
대단원	중단원	난이도
미분	도함수의 활용	3

46. $0<t<\pi$인 실수 t에 대하여 열린구간 $(0,\ 1)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\cos\pi x+tx$$

가 $x=\alpha$, $x=\beta\,(\alpha<\beta)$에서 극값을 갖는다. 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\beta-\alpha$$

라 할 때, $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$의 값은?

① $-\frac{2\sqrt{3}}{3\pi^2}$ ② $-\frac{\sqrt{3}}{\pi^2}$ ③ $-\frac{4\sqrt{3}}{3\pi^2}$
④ $-\frac{5\sqrt{3}}{3\pi^2}$ ⑤ $-\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2}$

46)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.5단원.Lv2.5번	스페셜	4

[출제포인트]
변수 t를 사용하여 x좌표를 새로운 함수로 정의 되었을 때
1. 합성함수 미분법 또는 음함수 미분을 이용하여 구하자.
2. 삼각함수 그래프 대칭성을 이용하여 β를 α로 나타내기.

[24011-0089]

2 $0<t<\frac{5}{2}$인 실수 t에 대하여 열린구간 $(0,\ \pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=2tx-t\cos x-5\sin x$가 있다. x축에 평행한 직선이 함수 $y=f(x)$의 그래프에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하면 함수 $g(t)$는 열린구간 $\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$에서 미분가능하다. $g(\alpha)=\frac{\pi}{6}$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times g'(\alpha)$의 값은?

① $-\frac{7\sqrt{3}}{8}$ ② $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ③ $-\frac{5\sqrt{3}}{8}$ ④ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$

<table>
<tr><th colspan="3">원본 DATA</th></tr>
<tr><th colspan="2">출처</th><th>과목</th></tr>
<tr><td colspan="2">수특.미적분.4단원.Lv3.2번</td><td>15미적분</td></tr>
<tr><th>대단원</th><th>중단원</th><th>난이도</th></tr>
<tr><td>15미분</td><td>여러 가지 미분법</td><td>3</td></tr>
</table>

47. 양의 실수 t에 대하여 열린구간 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수 $f(x)=e^{tx}\cos x$가 있다. 함수 $f(x)$의 최댓값을 $g(t)$라 할 때, $g'(1)$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ ② $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}e^{\frac{\pi}{4}}$ ③ $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}e^{\frac{\pi}{4}}$
④ $\frac{\sqrt{2}\pi}{8}e^{\frac{\pi}{4}}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}\pi}{10}e^{\frac{\pi}{4}}$

47)

<table>
<tr><th colspan="3">변형 DATA</th></tr>
<tr><th>출처</th><th>변형 유형</th><th>난이도</th></tr>
<tr><td>수특.미적분.4단원.Lv3.2번</td><td>스페셜</td><td>4</td></tr>
</table>

[출제포인트]
변수 t를 사용하여 최댓값 또는 최솟값을 새로운 함수로 정의됨
1. 그래프 개형 파악
2. 극댓값이 최대가 될 것

[24011-0118]

2 자연수 n과 실수 k에 대하여 곡선 $y=\ln(n+x)-\ln(n-x)$가 직선 $y=kx$와 만나는 서로 다른 점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{20} a_n=16$이 되도록 하는 모든 k의 값의 범위가 $p<k\le q$일 때, $70pq$의 값을 구하시오.

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.5단원.Lv3.2번		15미적
대단원	중단원	난이도
15미적	도활	4

48. 양의 실수 a와 자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\frac{a}{n}(e^{x}-e^{-x})$$

이다. 함수 $|f(x)-2nx|$가 $x=t$에서 미분가능하지 않은 실수 t의 개수를 $g(n)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{8} g(n)=11$이 되도록 하는 a의 값을 구하시오.

48)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.5단원.Lv3.2번	스페셜	4

[출제포인트]
변곡점에 대해 물어보는 빈출유형.
$y=|곡선-직선|$ 형태의 그래프에서 미분 가능성은 곡선과 직선이 만나는 점에서의 곡선의 접선 기울기를 이용하여 파악한다.
그러니 $f(x)-2nx=0$을 구하되 접하는 순간은 제외 ㄱ

[24011-0112]

4 함수 $f(x)=(x^2+a)e^x$에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 실수이다.)

보기

ㄱ. 함수 $f(x)$가 극값을 갖기 위한 a의 값의 범위는 $a<1$이다.

ㄴ. 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 존재하면 함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.

ㄷ. $a>0$일 때, 함수 $\frac{1}{f(x)}$이 극댓값 M, 극솟값 m을 가지면 $M\times m>\frac{e^2}{4}$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.5단원.Lv2.4번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15미분	도함수의 활용	3

49. 두 상수 a, $b\,(b>0)$에 대하여 함수

$$f(x)=(x+a)e^{bx}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f'(t)(x-t)+f(t)$$

의 실근 중 가장 작은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 감소하는 실수 t의 값의 범위가 $-10\le t<-6$일 때, $a\times b$의 값은? (단, $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

49)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.5단원.Lv2.4번	스페셜	4

[출제포인트]
이런 유형의 문제에서 함수를 꼼꼼하게 그리고 t의 값을 일일이 경우를 나누어 세세하게 분석할 필요는 없다. 문제에서 주어진 상황에 맞는 경우를 찾고, 그에 맞춰 주어진 양쪽 범위의 값을 대입하면 된다. “실근의 개수를 $g(t)$라 할 때”라는 발문은 수능에 수도 없이 출제된 문항이므로 출제 가능성이 항상 높다.

50 황제17머스크

[24011-0118]

3 $f(0)=0$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f'(x)e^{-f(x)}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=0$)

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

(나) 실수 t에 대하여 방정식 $|g(x)|=t$의 서로 다른 양의 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때, $\lim_{t\to g(k)+} h(t)\neq\lim_{t\to g(k)-} h(t)$인 모든 양수 k의 값의 합은 3이다.

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.5단원.Lv3.3번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15미분	도함수의 활용	5

50. $f(0)=f(1)=4$이고 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)|+2$라 하자. 함수

$$h(x)=g(x)\sin\frac{\pi}{g(x)}$$

가 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킬 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

> x에 대한 방정식 $h(x)=n$의 실근이 존재하면
> x에 대한 방정식 $h(x)=n$의 서로 다른 실근의 개수는 n이다.

50)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.5단원.Lv3.3번	스페셜	5

출제포인트]
$h'(x)$를 구해서 그래프의 개형을 그리고 $f(x)$의 그래프를 찾자.
또는 n축 연습

[24011-0119]

3 $f(0)=0$인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=f'(x)e^{-f(x)}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$)

(가) 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.
(나) 실수 t에 대하여 방정식 $|g(x)|=t$의 서로 다른 양의 실근의 개수를 $h(t)$라 할 때, $\lim_{t\to g(k)+}h(t)\neq\lim_{t\to g(k)-}h(t)$인 모든 양수 k의 값의 합은 3이다.

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.5단원.Lv3.3번		15미적
대단원	중단원	난이도
15미적	도활	4

51. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax & (x\le 0) \\ \dfrac{2x}{x^2+1} & (x>0) \end{cases}$$

이다. 양수 k와 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)=f(t)+k$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $k\times f(-4)$의 값을 구하시오.

(가) 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 실수 α의 개수는 3이다.
(나) $\left|\lim_{t\to p+}g(t)-\lim_{t\to p-}g(t)\right|=2$인 모든 실수 p의 값의 합은 -3이다.

51)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.5단원.Lv3.3번	스페셜	5

[출제포인트]
방정식의 실근개수나 교점의 개수를 함숫값으로 갖는 함수에서의 극한 활용이므로 $f(x)$의 그래프를 그려서 가능한 $g(t)$의 치역을 관찰하자.
특수한 경우를 얼마나 잘 찾아내는지가 관건이다. 이런 형태의 조건으로 주어지는 경우 대부분 특수한 형태를 시사하고 있으므로 그런 경우를 먼저 살펴보는 것이 유리하다.

3단원 적분법

9
[24011-0148]

함수 $f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$에 대하여 $0\le x\le \ln 2$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$ ④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.7단원.유제9번		미적분
대단원	중단원	난이도
적분	정적분의 활용	1

52. 함수 $f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ 에 대하여 $0\le x\le 3$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 길이는?

① 4 ② $\frac{14}{3}$ ③ $\frac{16}{3}$ ④ 6 ⑤ $\frac{20}{3}$

52)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.7단원.유제9번	숫자	1.5

[출제포인트]
기본유형 연습하기 : 곡선의 길이

4
[24011-0123]

$\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx - \int_{\sqrt{3}}^1 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$의 값은?

① $\frac{11}{3}$ ② 4 ③ $\frac{13}{3}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ 5

핵심 : 치환적분 (솔직히 위끝 아래끝 나눈 건 의미가 없는 듯)

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.6단원.유제.4번		15미적
대단원	중단원	난이도
15적분	여러 가지 적분법	2

53. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^{-3} e^{\frac{1}{x}}\,dx$ 의 값은?

① 1 ② e ③ e^2 ④ e^3 ⑤ e^4

53)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.6단원.유제.4번	스페셜	2

[출제포인트]
기본유형 연습하기 : 치환적분 → 부분적분

황제17머스크

8 [24011-0127]

$\lim_{x \to \pi} \frac{1}{x^2-\pi^2} \int_{\pi}^{x} \sin \frac{t}{2}\, dt$의 값은?

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{1}{2\pi}$ ③ $\frac{1}{3\pi}$ ④ $\frac{1}{4\pi}$ ⑤ $\frac{1}{5\pi}$

핵심 : 정적분으로 표현된 함수의 극한

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.6단원.유제.8번		15미적
대단원	중단원	난이도
15적분	여러 가지 적분법	2

54. $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{24}{9x^2-\pi^2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{x} \frac{\cos t}{\cos t+1}\, dt$의 값은?

① $\frac{2}{3\pi}$ ② $\frac{1}{\pi}$ ③ $\frac{4}{3\pi}$ ④ $\frac{5}{3\pi}$ ⑤ $\frac{2}{\pi}$

54)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.6단원.유제.8번	숫자	2

[출제포인트]

정적분과 극한이 함께 있는 경우에

정적분을 $F-F$ 형태로 바꾸면 미분계수꼴로 정리할 수 있다.

[24011-0128]

1 $\int_{2}^{3} \frac{x^2-1}{(x-1)(x+2)}dx$의 값은?

① $\ln\frac{2}{5}e$ ② $\ln\frac{4}{5}e$ ③ $\ln\frac{6}{5}e$ ④ $\ln\frac{8}{5}e$ ⑤ $\ln 2e$

핵심 : 단위 유리함수(분모가 일차식)로의 변환

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.6단원.Lv1.1번		15미적
대단원	중단원	난이도
15적분	여러 가지 적분법	2

55. $\int_{1}^{2} \frac{x}{x^2+3x+2}dx$ 의 값은?

① $5\ln 2-4\ln 3$ ② $5\ln 2-3\ln 3$ ③ $5\ln 2-2\ln 3$
④ $6\ln 2-3\ln 3$ ⑤ $6\ln 2-2\ln 3$

55)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.6단원.Lv1.1번	숫자	2

[출제포인트]
치환도 아닌 것 같고 부분도 아닌 것 같다.
그렇다면 애매한 유리식이니 부분분수를 활용하여 적분 가능한 형태로 식 변형 하기

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{2x}{(2x+2)(x+2)} = \frac{2x}{x}\left(\frac{1}{2x+2} - \frac{1}{x+2}\right)$$

2
[24011-0141]

$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \sqrt[n]{2^k}$ 의 값은?

① $\frac{2\ln 2-1}{(\ln 2)^2}$ ② $\frac{3\ln 2-1}{(\ln 2)^2}$ ③ $\frac{4\ln 2-1}{(\ln 2)^2}$ ④ $\frac{5\ln 2-1}{(\ln 2)^2}$ ⑤ $\frac{6\ln 2-1}{(\ln 2)^2}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.7단원.유제2번		15미적
대단원	중단원	난이도
15적분	정적분의활용	1

56. $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{\frac{k}{n}}}}{n}$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

56)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.7단원.유제2번	숫자	2

[출제포인트]

항상 시그마 앞에 $\frac{1}{n}$ 을 만든 후, $\frac{k}{n}=x$ 로 바꿔 생각하자.

[24011-0152]

4 곡선 $y=(-x^2+4)e^x$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① e^2+5e^{-2} ② $2e^2+6e^{-2}$ ③ $3e^2+7e^{-2}$ ④ $4e^2+8e^{-2}$ ⑤ $5e^2+9e^{-2}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.7단원.Lv1.4번		미적분
대단원	중단원	난이도
적분	정적분의 활용	2

57. 곡선 $y=e^{2x}-3e^x+2$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{3}{2}-\ln 2$ ② $\frac{3}{2}-2\ln 2$ ③ $\frac{5}{2}-\ln 2$

④ $\frac{5}{2}-2\ln 2$ ⑤ $\frac{7}{2}-\ln 2$

57)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.7단원.Lv1.4번	숫자	2

[출제포인트]
지수 형태로 표현된 함수의 인수분해도 눈에 익숙해져야 한다.
기본유형 - x축으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기
1. x축과의 교점 파악
2. 그래프 개형 파악

[24011-0156]

8 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x = \cos t + t \sin t,\ y = \sin t - t \cos t$$

일 때, 시각 $t = \frac{\pi}{2}$에서 $t = \pi$까지 점 P가 움직인 거리는?

① $\frac{3}{8}\pi^2$ ② π^2 ③ $\frac{13}{8}\pi^2$ ④ $\frac{9}{4}\pi^2$ ⑤ $\frac{23}{8}\pi^2$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.7단원.Lv1.8번		미적분
대단원	중단원	난이도
적분	정적분의 활용	2

58. 좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t $(t \geq 0)$에서의 위치 (x, y)가

$$x = e^t + e^{-t},\ y = 2t + 1$$

일 때, 시각 $t = \ln 3$에서 $t = \ln 6$까지 점 P가 움직인 거리는?

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{17}{6}$ ④ 3 ⑤ $\frac{19}{6}$

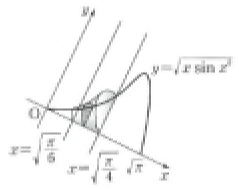
58)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.7단원.Lv1.8번	숫자	2

[출제포인트]
기본유형- 매개변수로 표현된 함수의 움직인 거리 유형은
반드시 피적분함수가 제곱식으로 표현될 수 밖에 없다. 인내심을 가지고 전개해보도록 하자.

[24011-0155]

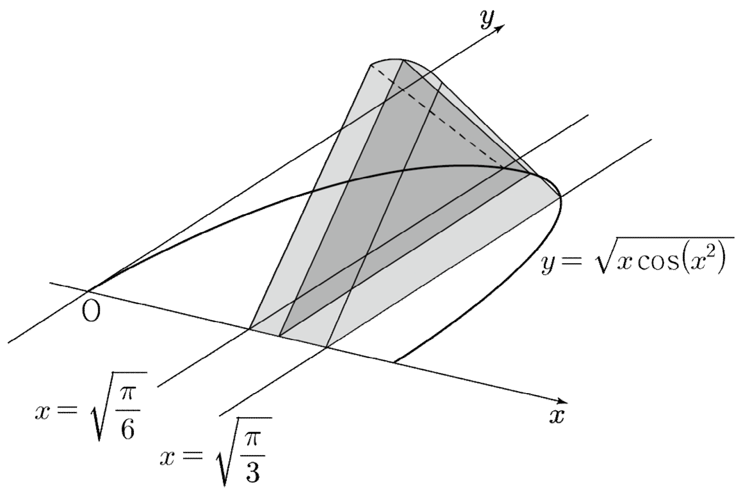
7 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x\sin x^2}\,(0\le x\le\sqrt{\pi})$와 x축 및 두 직선 $x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{4}}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 반원일 때, 이 입체도형의 부피는?



① $\frac{\sqrt{2}-1}{32}\pi$ ② $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{32}\pi$ ③ $\frac{2-\sqrt{3}}{32}\pi$
④ $\frac{\sqrt{5}-2}{32}\pi$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5}}{32}\pi$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.7단원.Lv1.7번		15미적
대단원	중단원	난이도
15적분	정적분의활용	2

59. 그림과 같이 곡선 $y=\sqrt{x\cos(x^2)}$ $\left(0\le x\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$와 x축 및 두 직선 $x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정삼각형인 입체도형의 부피는?



① $\frac{2-\sqrt{3}}{16}$ ② $\frac{3-\sqrt{3}}{16}$ ③ $\frac{4-\sqrt{3}}{16}$
④ $\frac{5-\sqrt{3}}{16}$ ⑤ $\frac{6-\sqrt{3}}{16}$

59)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.7단원.Lv1.7번	숫자	2

[출제포인트]
정삼각형, 정사각형, 반원 등등 단면이 일정한 도형인 정적분 문제는 빈출유형

[24011-0133]

1 $\int_0^{\frac{5}{6}\pi} \left| \sin x - \frac{2}{\pi}x \right| dx$의 값은?

① $\frac{6-\pi}{18}$ ② $\frac{7-\pi}{18}$ ③ $\frac{8-\pi}{18}$ ④ $\frac{9-\pi}{18}$ ⑤ $\frac{10-\pi}{18}$

핵심 : $\frac{2}{\pi}x$라는 직선이 $\sin x$와 위치관계가 어떻게 되는가

직관이 필요 없고 방정식으로 나올 수 있도록 바꿔보기.
추가로, 함수의 개형을 그려봐야 하는 형태면 좋을 듯.

$\sin x = \frac{2}{\pi}x$라는 방정식을 못 풀어서 직관에 의존하는데
이 직관이 쉽다고 쳐도 모르면 못 풀지 않나?

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.6단원.Lv2.1번		15미적
대단원	중단원	난이도
15적분	여러 가지 적분법	2

60. 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^3 f(x)dx$의 최솟값은?

(가) 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(나) 모든 실수 x에 대하여
$$\left\{f(x) - \frac{10x}{x^2+1}\right\} \times \{f(x) + x - 6\} = 0$$
이다.

① $4+10\ln 2$ ② $\frac{9}{2}+10\ln 2$ ③ $5+10\ln 2$
④ $\frac{11}{2}+10\ln 2$ ⑤ $6+10\ln 2$

60)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.6단원.Lv2.1번	스페셜	3

[출제포인트]
$(f(x)-g(x))(f(x)-h(x))=0$ 형태로 출제되는 경우 방정식 $g(x)=h(x)$의 서로 다른 실근을 모두 구한 후 그래프 개형을 추론하자.

[24011-0136]

4 $0 \le x \le 1$일 때, x에 대한 방정식

$$2\pi\int_0^{2x}|t-x|\cos 2\pi t\,dt = x\sin 4\pi x$$

의 서로 다른 실근의 개수는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

핵심 : $|t-x|$ 가지고 범위나누기
너무 노가다임.

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.6단원.Lv2.4번		15미적
대단원	중단원	난이도
15적분	여러 가지 적분법	3.5

61. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$(x-e)f(x) = \int_1^x (t-k)\ln t\,dt$$

를 만족시킨다. $f(e)$의 값은?

① $\dfrac{4e-1-e^2}{4}$ ② $\dfrac{3e-1-e^2}{4}$ ③ $\dfrac{2e-1-e^2}{4}$

④ $\dfrac{3e-1-2e^2}{4}$ ⑤ $\dfrac{4e-1-2e^2}{4}$

61)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.6단원.Lv2.4번	스페셜	3

[출제포인트]
$x=e$를 대입하여 k를 구해주자
그 다음 양변 미분만 하면 뚝-딱 ($f(e)=e-k$)
적분한 게 아깝다면 직접 $f(x)$ 구해도 무방 .... (비추)

[24011-0130]

3 $\int_1^e x(\ln x)^2 dx$의 값은?

① e^2-1 ② $\frac{e^2-1}{2}$ ③ $\frac{e^2-1}{3}$ ④ $\frac{e^2-1}{4}$

핵심 : 부분적분

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.6단원.Lv1.3번		15미적
대단원	중단원	난이도
15적분	여러 가지 적분법	2

62. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{4\sin^3 x\cos x \ln(1+\cos x)\}dx$ 의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

62)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.6단원.Lv1.3번	스페셜	3

[출제포인트]
복잡해 보이지만, $f(x)\times \ln\{g(x)\}$ 형태에서 망설임 없이 부분적분을 해보도록 하자. 이런 형태의 부분적분이 나오면 생각보다 멈칫하거나 혼란스러워할 수 있다.

피적분함수에 사인이나 코사인의 홀수 거듭제곱꼴이 있는 경우 예를 들어 $\sin^{2n+1}x$는 $(1-\cos^2 x)^n \sin x$로 바꾸어 치환적분하자.

[24011-0158]

2 함수 $f(x)=-xe^x$의 그래프 위의 점 $\mathrm{P}(-2,\ f(-2))$에서의 접선을 l이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 접선 l 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, 곡선 $y=f(x)$와 접선 l은 점 P에서만 만난다.)

① $\frac{9}{e^2}-1$ ② $\frac{9}{e^2}$ ③ $\frac{9}{e^2}+1$ ④ $\frac{9}{e^2}+2$ ⑤ $\frac{9}{e^2}+3$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.7단원.Lv2.2번		미적분
대단원	중단원	난이도
적분	정적분의 활용	3

63. 상수 $a\,(a<0)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=\ln(|x|+1)+a,\ \ g(x)=\frac{1}{3}|x|$$

의 그래프가 만나는 점의 개수가 2일 때, 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{8}{3}-2\ln 3$ ② $\frac{8}{3}-\ln 3$ ③ $\frac{10}{3}-2\ln 3$
④ $\frac{10}{3}-\ln 3$ ⑤ $4-2\ln 3$

63)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.7단원.Lv2.2번	스페셜	3

[출제포인트]
두 함수에 모두 절댓값이 들어가 있으므로 두 그래프 모두 y축에 대칭임을 알아냈으면 $x>0$에서 한 번 만난다고 두고 풀면됨.

[24011-0159]

3 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ \ln a)$에서의 접선과 평행하고 점 $(1,\ 0)$을 지나는 직선을 l이라 하자. 곡선 $y=\ln x$와 x축 및 직선 $x=e$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 l이 이등분할 때, a의 값은?

① $e-1$ ② $(e-1)^2$ ③ $(e-1)^3$ ④ $(e-1)^4$ ⑤ $(e-1)^5$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.7단원.Lv2.3번		15미적분
대단원	중단원	난이도
15적분	정적분의 활용	3

64. 곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x}$ 위에 두 점 P, Q를 직선 PQ가 원점 O를 지나도록 잡는다. 곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x}$와 선분 OP 및 x축으로 둘러싸인 영역을 A라 하고, 곡선 $y=\dfrac{\ln x}{x}$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

(A의 넓이)$=$(B의 넓이)

일 때, 점 Q의 y좌표는? (단, 점 Q의 x좌표는 점 P의 x좌표보다 크다.)

① $\dfrac{1}{e}$ ② $\dfrac{2}{e^2}$ ③ $\dfrac{3}{e^3}$ ④ $\dfrac{4}{e^4}$ ⑤ $\dfrac{5}{e^5}$

64)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.7단원.Lv2.3번	스페셜	3

[출제포인트]

(A의 넓이)=(B의 넓이)

(A의 넓이)−(B의 넓이)=0

위와 같은 발문은 거의 대부분 $\int_a^b f(x)dx=0$임을 내포하고 있는 조건이므로 a, b, $f(x)$를 찾는 데에 주력하도록 하자.

이 문제는 (삼각형 넓이)=(정적분 값) 파악하기.

[24011-0135]

3 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)=\int_{x}^{2x}\frac{\ln t}{t^2}dt$가 $x=a$에서 최댓값 b를 가질 때, 두 실수 a, b에 대하여 ab의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

핵심 : 정적분으로 표현된 함수의 미분
극값을 갖는 x의 개수가 1인 것이 핵심인 듯 한데,
심심함. 차라리 간단한 그래프 해석을 통해
한 번에 원하는 상황이 무엇인지 알 수 있도록?

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.6단원.Lv2.3번		15미적
대단원	중단원	난이도
15적분	여러 가지 적분법	3

65. 실수 t에 대하여 곡선 $y=e^x$ 위의 점 $(t,\ e^t)$에서의 접선의 방정식을 $y=f(x)$라 하자.

$$\left\{\int_{-1}^{1}|f(x)|dx\right\}^2 \neq \left\{\int_{-1}^{1}f(x)dx\right\}^2$$

인 모든 t의 값의 범위가 $\alpha<t<\beta$일 때, $\beta-\alpha$의 값을 구하시오.

65)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.6단원.Lv2.3번	스페셜	3.5

[출제포인트]

$\int_{a}^{b}|f(x)|dx=\int_{a}^{b}f(x)dx$이기 위해서는 주어진 구간 (a,b)에서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 존재하지 않아야 한다.
피적분함수에 절댓값이 포함된 경우와, 적분값 전체에 절댓값이 씌워져 있는 경우 모두 대비하기 위해 한 번쯤 풀어볼 만한 가치가 있다. 주어진 등식의 의미가 접선의 x절편이 $-1<x$절편<1임을 파악하기.

[24011-0161]

5 함수 $f(x)=(\ln x)^2+2\ln x+3$에 대하여 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 $(a,\ f(a))$일 때, 직선 $y=f(a)$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{2}{e^2}$ ③ $\frac{3}{e^2}$ ④ $\frac{4}{e^2}$ ⑤ $\frac{5}{e^2}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.7단원.Lv2.5번		미적분
대단원	중단원	난이도
적분	정적분의 활용	3

66. 함수 $f(x)=axe^{-x}\ (a>0)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 접선을 l이라 하자. y축과 직선 l 및 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $3+e$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{e^2}{3-e}$ ② $\frac{e^2}{4-e}$ ③ $\frac{e^2}{5-e}$
④ $\frac{e^3}{3-e}$ ⑤ $\frac{e^3}{4-e}$

66)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.7단원.Lv2.5번	스페셜	3.5

[출제포인트]

$y=xe^x$, $y=xe^{-x}$와 같은 식으로 주어진 함수의 그래프의 개형은 알고 있으면 좋다. 개형을 빠르게 그릴 수 있다면 체감 난이도가 확 낮아진다. a는 변곡점의 좌표 등에 큰 영향을 끼치지 않는다 아무 생각 없이 구하다보면 나올 것

[24011-0186]

2 점 $\mathrm{A}\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}e\right)$를 지나고 함수 $f(x)=k(\ln x)^2$의 그래프에 접하는 두 접선 l_1, l_2가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=f(x)$와 두 접선 l_1, l_2가 접하는 점의 x좌표는 각각 p, q $(p<q)$이다.
(나) 두 접선 l_1, l_2는 서로 수직이다.

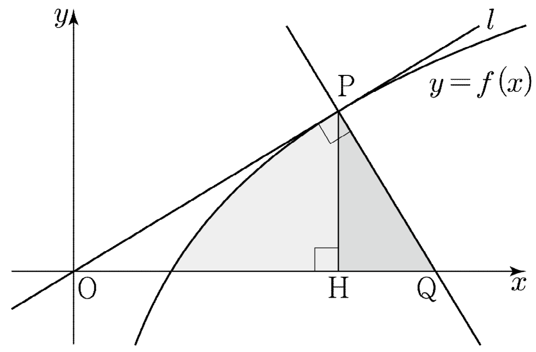
곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=p$, $x=q$ 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는? (단, k는 양의 상수이다.)

① $\frac{\sqrt{3}}{6}(e^4-1)$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}(e^4-1)$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{2}(e^4-1)$ ④ $\frac{2\sqrt{3}}{3}(e^4-1)$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{6}(e^4-1)$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.7단원.Lv3.2번		15미적
대단원	중단원	난이도
15적분	정적분의활용	4

67. 원점에서 함수 $f(x)=k\ln x$의 그래프에 그은 접선 l의 접점을 P라 하자. 점 P를 지나고 직선 l과 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 Q, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 PH, x축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 삼각형 PHQ의 넓이가 같을 때, 양수 k의 값은?

① $\sqrt{e}$ ② $\sqrt{2e}$ ③ $\sqrt{3e}$ ④ $2\sqrt{e}$ ⑤ $\sqrt{5e}$



67)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.7단원.Lv3.2번	스페셜	4

[출제포인트]

$y=f(x)$, 접선, 법선, 축 등으로 둘러싸인 부분들의 넓이 조건을 이용하여 미정계수 구하기 - 그냥 계산문제인데

이 문제에서는 점 Q의 좌표를 구하기보단 삼각형 OPH와 삼각형 PHQ가 닮음임을 생각하면 접선을 구하지 않아도 됨

[24011-0167]

3 양의 상수 a에 대하여 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 정의된 두 함수 $f(x)=a\sec x$, $g(x)=2\sin x\cos x$의 그래프가 단 한 점에서만 만나고 그 점에서의 접선이 서로 일치한다. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{2\sqrt{3}}{9}\ln(2+\sqrt{3})-\frac{1}{2}$ ② $\frac{2\sqrt{3}}{9}\ln(2+\sqrt{3})-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2\sqrt{3}}{9}\ln(2+\sqrt{3})-\frac{1}{4}$
④ $\frac{2\sqrt{3}}{9}\ln(2+\sqrt{3})-\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{3}}{9}\ln(2+\sqrt{3})-\frac{1}{6}$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적.7단원.Lv3.3번		미적분
대단원	중단원	난이도
적분	정적분의 활용	4

68. 두 상수 a, $b\,(0<b<2)$에 대하여 두 함수

$$f(x)=ax^2-2ax,\quad g(x)=\sin b\pi x+2$$

의 그래프가 오직 한 점 $\mathrm{P}(1,\,f(1))$에서만 만날 때, 두 곡선 $y=f(x)$ 및 $y=g(x)$와 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는?

① $\frac{4}{3}+\frac{2}{3\pi}$ ② $2+\frac{2}{3\pi}$ ③ $\frac{8}{3}+\frac{2}{3\pi}$
④ $\frac{4}{3}+\frac{4}{3\pi}$ ⑤ $2+\frac{4}{3\pi}$

68)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적.7단원.Lv3.3번	스페셜	4

[출제포인트]
두 곡선이 오직 한 점에서 만나므로 $x=1$에서 서로 접하는 상황임을 눈치채야 한다. 특수한 경우를 다루고 있다는 점에서 한 번쯤 풀어볼 만하다.
두 곡선이 한 점에서만 만나는 특수한 경우의 넓이 구하기 - 그래프 개형 파악이 중요하다.

[24011-0139]

3 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f(x)}}dx$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
(나) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=12$
(다) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=12$

① $2\pi-12$ ② $3\pi-12$ ③ $4\pi-12$ ④ $5\pi-12$ ⑤ $6\pi-12$

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.6단원.Lv3.3번		미적분
대단원	중단원	난이도
미분	여러 가지 적분법	5

69. 함수 $f(x)=a(x^3-x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_{-1}^{x}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt$$

의 극솟값이 -2일 때, $f(2)$의 값을 구하시오.

69)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.6단원.Lv3.3번	스페셜	5

[출제포인트]
$g'(x)$의 분모가 항상 0보다 크기 때문에, 실질적으로 신경써야 하는 부분은 분자에만 있다. 표현에 겁먹지 않아야 한다.

[참고]
$f(-x)=-f(x)$일 때,

$h(x)=\frac{1}{1+2^{f(x)}}$이면

$$h(-x)=\frac{1}{1+2^{f(-x)}}=\frac{1}{1+2^{-f(x)}}=\frac{2^{f(x)}}{1+2^{f(x)}}$$

이므로 $h(x)+h(-x)=1$이고 $y=h(x)$는 점 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$에 대하여 대칭이다.

3 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xf'(x)}{1+\pi^{f'(x)}}dx$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
(나) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=12$
(다) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=12$

① $2\pi-12$ ② $3\pi-12$ ③ $4\pi-12$ ④ $5\pi-12$ ⑤ $6\pi-12$

핵심 : (가) 조건을 이용한 함수 변형
우함수, 기함수 모두 사용해서 주어진 적분식을
간단하게 만들 수 있는 함수라면 뭐든 좋음.

원본 DATA		
출처		과목
수특.미적분.6단원.Lv3.3번		15미적
대단원	중단원	난이도
15적분	여러 가지 적분법	4

70. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $\int_{-5}^{5}\{g(e^x)\}^2 dx$의 값을 구하시오.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)f(-x)=1$이다.
(나) $f(2)=e^5$, $\int_0^2 x\ln\{f(x)\}\,dx=7$

70)

변형 DATA		
출처	변형 유형	난이도
수특.미적분.6단원.Lv3.3번	스페셜	5

[출제포인트]
주어진 함수 $f(x)$ 자체보다는, $\ln\{f(x)\}+\ln\{f(-x)\}=0$임을 이용하는 점이 신선하다. 즉 $f(x)$가 아니라 $\ln\{f(x)\}$가 원점대칭임을 이용해서 풀어나가야 하는 문제.
역함수 $g(x)$를 t로 치환하는 과정도 잊지 않아야 한다.
두 과정을 모두 학습할 수 있다는 점에서 풀어볼 가치가 있다.

정답 및 해설

1) 정답 ①

$f(n)=\dfrac{2^n-1}{2^n+1}$ 이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n-1}{2^n+1}-\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\{f(n)-f(n+1)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\{f(1)-f(n+1)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2+1}-\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$$

2) 정답 ③

급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n}{n+1}\right)=1$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n}{n+1}\right)=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}a_n=1$$

따라서 구하는 값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{(2n+1)a_n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+\frac{1}{n}}{\left(2+\frac{1}{n}\right)a_n+\frac{1}{n}}=\frac{1+0}{2\times1+0}=\frac{1}{2}$$

3) 정답 ②

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{a_n}=3$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\frac{a_n}{n^2}}=3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^4}{a_n(6a_n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\frac{a_n}{n^2}\times\left(\frac{6a_n}{n^2}+\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{4}{\frac{1}{3}\times\frac{6}{3}}=6$$

4) 정답 ④

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{an-1}{3n}=3$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an-1}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a-\frac{1}{n}}{3}=\frac{a}{3}=3$$

$\therefore\ a=9$

한편, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{1+\frac{18}{n}}-1\right)=b$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\sqrt{1+\frac{18}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+18n}-n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{18n}{\sqrt{n^2+18n}+n}$$
$$=9$$

이므로 $b=9$ 이고 $a+b=18$ 이다.

5) 정답 ②

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 1, 공비가 $-\dfrac{1}{2}$ 이므로

$$a_n=1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

따라서 구하는 값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{n+2}+3}{4^n\times a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times(-2)^n+3}{-2\times(-2)^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{-2}=-2$$

6) 정답 ③

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^{3n-2}+a^{-3n+1}}{a^{3n+1}+a^{-3n-2}}=\frac{1}{8}$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{3n-2}+a^{-3n+1}}{a^{3n+1}+a^{-3n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{3n-2}+a^3\times a^{-3n-2}}{a^3\times a^{3n-2}+a^{-3n-2}}$$

(ⅰ) $0<a<1$ 일 때

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a^{3n-2}=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{3n-2}+a^3\times a^{-3n-2}}{a^3\times a^{3n-2}+a^{-3n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^3\times a^{-3n-2}}{a^{-3n-2}}$$
$$=a^3=\frac{1}{8}$$

$\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

(ⅱ) $a=1$ 일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{3n-2}+a^3\times a^{-3n-2}}{a^3\times a^{3n-2}+a^{-3n-2}}=\frac{1+1}{1+1}=1\neq\frac{1}{8}$$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $a>1$ 일 때

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a^{-3n-2}=0$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{3n-2}+a^3\times a^{-3n-2}}{a^3\times a^{3n-2}+a^{-3n-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{3n-2}}{a^3\times a^{3n-2}}$$
$$=\frac{1}{a^3}=\frac{1}{8}$$

$\therefore\ a=2$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 양수 a 의 값의 합은

$$\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

7) 정답 ②

$9\times6^n=2^n\times3^{n+2}$ 에서 약수의 개수는 $(n+1)(n+3)$ 이므로

$a_n=(n+1)(n+3)$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12}$$

8) 정답 ⑤

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=5$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-3)=0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty}a_n=3 \qquad \cdots ㉠$$

또한

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-3)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(S_n-3n)=5 \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}(a_nS_n-3na_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}(S_n-3n)$$
$$=3\times5=15$$

9) 정답 ③

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하고 $a_1=a$ 라 하면

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{9}{10}$ 이므로 $-1<r<1$ 이어야 한다.

이때 $a_2=-1$ 이므로 $ar=-1$ 이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{a}{1-r}=\frac{9}{10},\ 10a=9-9r$$
$$10ar=9r-9r^2$$
$$9r^2-9r-10=0$$
$$(3r+2)(3r-5)=0 \qquad \therefore\ r=-\frac{2}{3}\ (\because\ -1<r<1)$$

따라서 $a_1=a_2\times\frac{1}{r}=(-1)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$

10) 정답 ①

서로 다른 세 수 $3a+1$, $a+1$, 1 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로 등비중항에 의하여

$$(a+1)^2=3a+1$$
$$a^2+2a+1=3a+1$$
$$a^2-a=0$$
$$\therefore\ a=0 \text{ 또는 } a=1$$

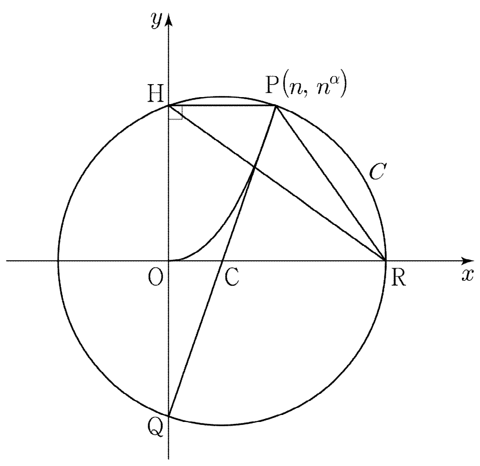
이때 $a=0$ 이면 세 수 $3a+1$, $a+1$, 1 이 모두 같으므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore\ a=1$$

따라서 주어진 세 수는 4, 2, 1 이므로 $r=\frac{1}{2}$ 이고

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^n\left(1-r^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty} r^n-\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

11) 정답 ③



$\angle\mathrm{HRP}=\angle\mathrm{HQP}$ 이므로 사각형 PRQH는 외접원 C 를 가진다.

이때 $\angle\mathrm{PHQ}=\frac{\pi}{2}$ 이므로 선분 PQ는 원 C 의 지름이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{n^2+4n^{2\alpha}}$ 이므로 원 C 의 반지름의 길이는 $\frac{1}{2}\sqrt{n^2+4n^{2\alpha}}$ 이다.

또한 선분 PQ의 중점을 C라 하면 $\mathrm{C}\left(\frac{n}{2},\,0\right)$ 이다.

즉, 원 C 는 중심이 $\left(\frac{n}{2},\,0\right)$ 이고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\sqrt{n^2+4n^{2\alpha}}$ 이므로

점 R의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}\left(n+\sqrt{n^2+4n^{2\alpha}}\right),\,0\right)$ 이다.

$$\therefore\ f(n)=\frac{1}{2}\left(n+\sqrt{n^2+4n^{2\alpha}}\right)$$

한편, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}=k$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2+4n^{2\alpha}}}{2n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+\sqrt{\frac{1}{n^4}+4n^{2\alpha-6}}}{2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{\alpha-3}}{2}=k$$

$$\therefore\ \alpha=3,\ k=1$$

따라서 $k+\alpha=4$ 이다.

12) 정답 ③

조건 (나)에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n+1}{n^2+b_n}=3$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-3n+1}{n^2+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{b_n}{n^2}}=3$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}=\frac{1}{3}$$

조건 (가)에서 모든 자연수 n 에 대하여

$$\left(a_n\right)^2+9n^2\left(b_n\right)^2-n^2<6na_nb_n+2n+1$$

이므로

$$\left(a_n\right)^2-6na_nb_n+9n^2\left(b_n\right)^2<n^2+2n+1$$
$$\left(a_n-3nb_n\right)^2<(n+1)^2$$
$$3nb_n-n-1<a_n<3nb_n+n+1$$

$nb_n>0$ 이므로 양변을 nb_n 으로 나누면

$$3-\frac{n+1}{nb_n}<\frac{a_n}{nb_n}<3+\frac{n+1}{nb_n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{nb_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^3\times\frac{b_n}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{\frac{b_n}{n^2}}=0$ 이므로

극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{nb_n}=3$ 이다.

13) 정답 ⑤

선분 OA_n 은 x 축에 평행하고 $\overline{\mathrm{OA}_n}=2n$ 이므로

삼각형 $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$ 의 높이는 점 B_n 의 y 좌표와 같다.

$$\therefore\ S_n=\frac{1}{2}\times 2n\times(3n-2)=n(3n-2)$$

한편, 사인법칙에 의하여 $2R_n=\frac{\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}}{\sin\left(\angle\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n\right)}$ 이다.

$$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\sqrt{(6n+1)^2+(3n-2)^2}=\sqrt{45n^2+5},$$
$$\sin\left(\angle\mathrm{A}_n\mathrm{OB}_n\right)=\frac{3n-2}{\sqrt{(4n+1)^2+(3n-2)^2}}=\frac{3n-2}{\sqrt{25n^2-4n+5}}$$
$$\therefore\ 2R_n=\sqrt{45n^2+5}\times\frac{\sqrt{25n^2-4n+5}}{3n-2}$$

따라서 구하는 값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5S_n}{2n\times R_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n(3n-2)}{n\times\sqrt{45n^2+5}\times\frac{\sqrt{25n^2-4n+5}}{3n-2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5(3n-2)^2}{\sqrt{45n^2+5}\times\sqrt{25n^2-4n+5}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3-\frac{2}{n}\right)^2}{\sqrt{45+\frac{5}{n^2}}\times\sqrt{1-\frac{4}{25n}+\frac{1}{5n^2}}}$$
$$=\frac{9}{3\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

14) 정답 ④

사각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{Q}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$ 은 평행한 두 변의 길이가 각각 $3^{n+1}+1-2^{n+1}$, 3^n+1-2^n 이고, 높이가 1 인 사다리꼴이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\times\left(3^{n+1}+3^n-2^{n+1}-2^n+2\right)$$

이다. 한편 삼각형 $\mathrm{AP}_n\mathrm{Q}_n$ 은 밑변의 길이가 3^n-2^n+1, 높이가 n 이므로

$$T_n=\frac{1}{2}\times n\times\left(3^n-2^n+1\right)$$

이고

$$T_{n+1}=\frac{1}{2}\times(n+1)\times\left(3^{n+1}-2^{n+1}+1\right)$$

따라서 구하는 값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\times S_n}{T_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2}\times\left(3^{n+1}+3^n-2^{n+1}-2^n+2\right)}{\frac{n+1}{2}\times\left(3^{n+1}-2^{n+1}+1\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4\times 3^n-3\times 2^n+2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\times(3\times 3^n-2\times 2^n+1)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4-3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{2}{3^n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\times\left\{3-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3^n}\right\}}$$

$$=\frac{3+1}{(1+0)\times 3}=\frac{4}{3}$$

15) 정답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$a_n=1+(n-1)d=dn+1-d$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+n}{a_n-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(d+1)n+1-d}{(d-2)n+1-d}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{d+1+\frac{1-d}{n}}{d-2+\frac{1-d}{n}}=4$$

$$\frac{d+1}{d-2}=4 \qquad \therefore\ d=3$$

따라서 $a_n=3n-2$이다.

또한 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}+\frac{pn-4}{n+2}\right)=q$에서 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}+\frac{pn-4}{n+2}\right)=0$$

이다. 한편,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{2}{n}}{1}=3,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{pn-4}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{p-\frac{4}{n}}{1+\frac{2}{n}}=p$$

이므로 $3+p=0$, $p=-3$이다.

$f(n)=\frac{a_n}{n}=\frac{3n-2}{n}$라 하면 $\frac{3n+4}{n+2}=f(n+2)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+4}{n+2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\{f(n)-f(n+2)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{f(1)+f(2)-f(n+1)-f(n+2)\}$$

$$=1+2-\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n+1}\right)-\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2}{n+2}\right)$$

$$=-3$$

따라서 $p=-3$, $q=-3$이고 $p\times q=9$이다.

16) 정답 12

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 조건 (가)에서 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n+1}=-\frac{1}{2}a_{2n-1}$$

이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$은 첫째항이 a이고, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

조건 (나)에서 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n}=\frac{a_{2n-1}+a_{2n+1}}{2}=\frac{a_{2n-1}-\frac{1}{2}a_{2n-1}}{2}=\frac{1}{4}a_{2n-1}$$

이므로 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 $\frac{a}{4}$이고, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$$

$$=\frac{a}{1+\frac{1}{2}}+\frac{\frac{a}{4}}{1+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2a}{3}+\frac{a}{6}$$

$$=\frac{5a}{6}=10$$

$$\therefore\ a=12$$

17) 정답 ④

직선 OA_1과 직선 O_1A_2는 x축과 이루는 각이 같으므로 서로 평행하고

$$\angle A_1OA_2=\angle OA_2O_1=\frac{\pi}{4}$$

이다. 삼각형 OO_1A_2에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{OO_1}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\overline{O_1A_2}}{\sin\frac{\pi}{6}},\quad \overline{O_1A_2}=\overline{O_1O_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

모든 자연수 n에 대하여 직선 O_nA_{n+1}과 직선 $O_{n+1}A_{n+2}$가 x축과 이루는 각의 크기가 같으므로 서로 평행하고

$$\angle A_{n+1}OA_{n+2}=\angle O_nA_{n+2}O_{n+1}=\frac{\pi}{4}$$

이다. 또한 삼각형 $O_nO_{n+1}A_{n+2}$에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{O_nO_{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\overline{O_{n+1}A_{n+2}}}{\sin\frac{\pi}{6}},\quad \overline{O_{n+1}A_{n+2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{O_nO_{n+1}}$$

이고 $\overline{O_{n+1}A_{n+2}}=\overline{O_{n+1}O_{n+2}}$이므로

$$\overline{O_{n+1}O_{n+2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{O_nO_{n+1}}$$

이다. $a_1=\overline{O_1O_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$라 하고 $a_n=\overline{O_nO_{n+1}}$이라 하면

$$a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}a_n$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이고 공비가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$인 등비수열이다.

따라서 점 O_n의 x좌표인 x_n은

$$x_n=\overline{OO_1}+\overline{O_1O_2}+\overline{O_2O_3}+\cdots+\overline{O_{n-1}O_n}$$

$$=1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$$

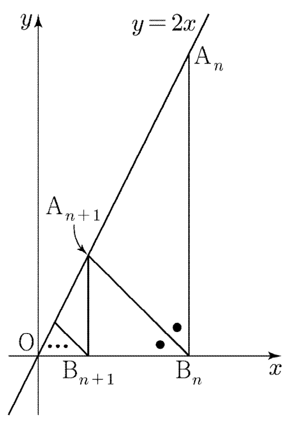
이므로

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}a_k$$

$$=1+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=2+\sqrt{2}$$

18) 정답 ①



$B_n(x_n, 0)$이고, $\angle OB_nA_{n+1}=\angle A_nB_nA_{n+1}=\frac{\pi}{4}$이므로 각의 이등분선의 성질에 의하여 $\overline{OA_{n+1}}:\overline{A_nA_{n+1}}=\overline{OB_n}:\overline{A_nB_n}$이다.

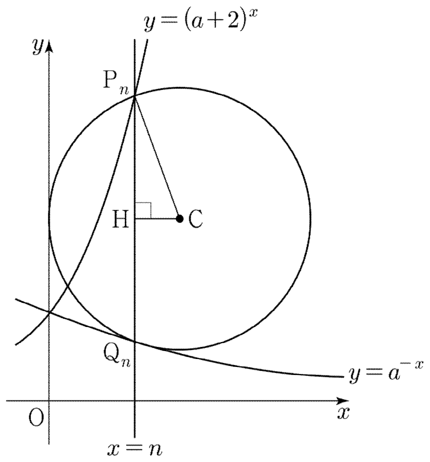
즉, 점 A_{n+1}은 선분 OA_n을 $1:2$로 내분하는 점이므로

모든 자연수 n에 대하여 $x_{n+1}=\frac{1}{3}x_n$이 성립한다.

따라서 수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 6, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\frac{6}{1-\frac{1}{3}}=9$$이다.

19) 정답 ②



두 점 P_n, Q_n을 모두 지나고 y축에 접하는 원의 중심을 C라 하고, 점 C에서 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 P_n의 x좌표가 n이므로

$\overline{\mathrm{CH}}=r_n-n$, $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}}=\dfrac{(a+2)^n-a^{-n}}{2}$ 이다.

따라서 피타고라스의 정리에 의하여

$$(r_n)^2=(r_n-n)^2+\frac{(a+2)^{2n}+\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}-2\times\left(\frac{a+2}{a}\right)^n}{4}$$

$$r_n=\frac{n}{2}+\frac{(a+2)^{2n}+\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}-2\times\left(\frac{a+2}{a}\right)^n}{8n}$$

이므로

$$n(2r_n-n)=\frac{(a+2)^{2n}+\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}-2\times\left(\frac{a+2}{a}\right)^n}{4}$$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{n(2r_n-n)\times\dfrac{4^n}{7^{2n}+5^{2n}}\right\}=\dfrac{1}{4}$ 에서

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n(2r_n-n)\times\frac{4^n}{7^{2n}+5^{2n}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2^{2n}}{4}\times\frac{(a+2)^{2n}+\left(\frac{1}{a}\right)^{2n}-2\times\left(\frac{a+2}{a}\right)^n}{7^{2n}+5^{2n}}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{4}\times\frac{\left(\frac{2a+4}{7}\right)^{2n}+\left(\frac{2}{7a}\right)^{2n}-2\times\left(\frac{4a+8}{49a}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{7}\right)^{2n}}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}$$

한편, $a>1$일 때 $0<\dfrac{2}{7a}<1$, $0<\dfrac{4a+8}{49a}<1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2a+4}{7}\right)^{2n}+\left(\frac{2}{7a}\right)^{2n}-2\times\left(\frac{4a+8}{49a}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{7}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2a+4}{7}\right)^{2n}$$

이고, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2a+4}{7}\right)^{2n}=1$ 이다.

따라서 $\dfrac{2a+4}{7}=1$이고 $a=\dfrac{3}{2}$ 이다.

20) 정답 2

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 공비가 $a_2=r$ $(0<|r|<1)$인 등비수열이므로

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{1}{1-r}$ 로 수렴한다.

수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n+k}=\frac{a_{n+1}}{1-r}=\frac{r^n}{1-r}$$

이므로 수열 $\{b_n\}$은 $b_1=\dfrac{r}{1-r}$이고 공비가 r인 등비수열이다.

즉, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\dfrac{r}{(1-r)^2}$ 로 수렴한다.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=c$에서

$$\frac{1}{1-r}=\frac{r}{(1-r)^2}\qquad\therefore\ r=\frac{1}{2}\ \ (\because\ 0<|r|<1)$$

따라서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=2$이므로 $c=2$이다.

21) 정답 21

등비수열 $\{b_n\}$의 공비가 $\dfrac{1}{2}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{b_1}{1-\frac{1}{2}}=2b_1$$

조건 (가)에서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=0$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n=0,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=-2b_1$$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(-1<r<1)$이라 하면

$$\frac{a_1}{1-r}+2b_1=0$$

$$\therefore\ \frac{a_1}{b_1}=-2(1-r)\qquad\cdots\ ㉠$$

조건 (나)에서 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4a_n}{b_n}=k$이므로 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4a_n}{b_n}$이 수렴한다.

등비수열 $\left\{\dfrac{4a_n}{b_n}\right\}$의 공비는 $2r$이므로 $-1<2r<1$, 즉 $-\dfrac{1}{2}<r<\dfrac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4a_n}{b_n}=\frac{\frac{4a_1}{b_1}}{1-2r}=k$$

$$\therefore\ \frac{a_1}{b_1}=\frac{k(1-2r)}{4}\qquad\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡에 의하여

$$-2(1-r)=\frac{k(1-2r)}{4},\ k=\frac{8r-8}{1-2r}$$

$\dfrac{8r-8}{1-2r}=-4+\dfrac{2}{r-\frac{1}{2}}$에서 $-\dfrac{1}{2}<r<\dfrac{1}{2}$이므로 $k<-6$

따라서 정수 k의 최댓값 $M=-7$이다.

$k=M$일 때, $\dfrac{8r-8}{1-2r}=-7$, $8r-8=-7+14r$, $r=-\dfrac{1}{6}$

이다. ㉠에서 $3a_1+7b_1=0$이고, $a_1+b_1=-4$이므로

$$a_1=-7,\ b_1=3$$

$$\therefore\ |a_1\times b_1|=21$$

22) 정답 ③

$f(x)=(x^2+4)\times\sin\dfrac{\pi x}{2}$ 에서

$$f'(x)=2x\sin\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi(x^2+4)}{2}\cos\frac{\pi x}{2}$$

이므로 $f'(2)=-4\pi$이다.

23) 정답 ④

$f(x)=kx+4\cos x$에서 $f'(x)=k-4\sin x$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 $f'(x)$의 부호가 바뀌는 지점이 존재해야 하므로

$$-4<k<4$$

따라서 정수 k의 값은 -3, -2, $\cdots$, 3이므로 개수는 7

24) 정답 ④

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x-\cos^2x+\cos^3x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)-\cos^2x(1-\cos x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1-\cos^2x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)\sin^2x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1-\cos x}{x^2}\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\right\}$$

$=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

25) 정답 9

$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(a+2x)}{1-\cos x}=b$ 에서 $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{x}\times\frac{\ln(a+2x)}{x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}=b$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=2\times\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}=2,$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos x}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+2x)}{x}$ 가 수렴한다.

$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\ln(a+2x)}{x}\times 2}{\frac{1}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\ln(a+2x)}{x}=b$

$\lim_{x\to 0}\frac{4\ln(a+2x)}{x}=b$ 에서 (분모) $\to 0$ 이므로 (분자) $\to 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0}4\ln(a+2x)=0$ 에서 $\ln a=0$ $\quad\therefore\ a=1$

또한 $b=\lim_{x\to 0}\frac{4\ln(1+2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{8\ln(1+2x)}{2x}=8$

$\therefore\ a+b=9$

26) 정답 ②

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=2$ 에서

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=2$

$f(x)=\sec x+\tan x$ 에서

$f'(x)=\sec x\tan x+\sec^2 x$

이고, 위의 식에 $x=a$ 를 대입하면

$f'(a)=\sec a\tan a+\sec^2 a=2$

위 식의 양변에 $\cos^2 a$ 을 곱하면

$\sin a+1=2\cos^2 a$

$2\sin^2 a+\sin a-1=0$

$(2\sin a-1)(\sin a+1)=0$

$\therefore\ \sin a=\frac{1}{2}\ (\because\ 0<a<\frac{\pi}{2})$

따라서 구하는 값은 $a=\frac{\pi}{6}$ 이다.

27) 정답 ③

$\lim_{h\to 0}\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{3}+ah\right)-b}{h}=9$ 에서 극한값이 존재하고 (분모) $\to 0$ 이므로 (분자) $\to 0$ 이어야 한다.

즉, $\lim_{h\to 0}\left\{\sin^3\left(\frac{\pi}{3}+ah\right)-b\right\}=0$ 에서

$\sin^3\frac{\pi}{3}-b=0\qquad\therefore\ b=\frac{3\sqrt{3}}{8}$

$\lim_{h\to 0}\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{3}+ah\right)-\frac{3\sqrt{3}}{8}}{h}=9$ 에서 $f(x)=\sin^3 x$ 이라 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{3}+ah\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a\left\{f\left(\frac{\pi}{3}+ah\right)-f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right\}}{ah}$

$=af'\left(\frac{\pi}{3}\right)$

또한 $f'(x)=3\sin^2 x\cos x$ 이므로

$af'\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\times 3\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\times\left(\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{9}{8}a=9$

$\therefore\ a=8$

따라서 구하는 값은 $a\times b=8\times\frac{3\sqrt{3}}{8}=3\sqrt{3}$ 이다.

28) 정답 ①

$f(x)=x\sin\pi(e^x-1)$ 에서

$f'(x)=\sin\pi(e^x-1)+\pi xe^x\cos\pi(e^x-1)$

위의 식에 $x=\ln 2$ 를 대입하면

$f'(\ln 2)=\sin\pi(e^{\ln 2}-1)+\pi(\ln 2)\times e^{\ln 2}\times\cos\pi(e^{\ln 2}-1)$

$=\sin\pi+2\pi(\ln 2)\cos\pi$

$=-2\pi\ln 2$

29) 정답 ②

$f(x)=e^x-\frac{4}{e^x}$ 에서

$f'(x)=e^x+\frac{4}{e^x}$

$g(a)=b$ 라 하면 $f(b)=a$ 이므로 $g'(a)=\frac{1}{f'(b)}=\frac{1}{4}$ 이다.

이때 $f'(b)=e^b+\frac{4}{e^b}=4$ 에서

$e^{2b}-4e^b+4=0$

$(e^b-2)^2=0$

$e^b=2\qquad\therefore\ b=\ln 2$

따라서 $f(\ln 2)=e^{\ln 2}-\frac{4}{e^{\ln 2}}=0$ 이므로 $a=0$ 이다.

30) 정답 ③

선분 AR 이 $\angle$QAP 의 이등분선이므로 $\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{QR}}{\overline{PR}}$ 이고

점 Q 의 좌표는 $(t,\ln(2t-1))$ 이므로

$\overline{AQ}=\sqrt{(t-1)^2+\{\ln(2t-1)\}^2}$

이때 $x=t-1$ 이라 하면 $t\to 1+$ 일 때 $x\to 0+$ 이므로

$\lim_{t\to 1+}\frac{\overline{QR}}{\overline{PR}}=\lim_{t\to 1+}\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}}$

$=\lim_{t\to 1+}\frac{\sqrt{(t-1)^2+\{\ln(2t-1)\}^2}}{t-1}$

$=\lim_{t\to 1+}\sqrt{1+\left\{\frac{\ln(2t-1)}{t-1}\right\}^2}$

$=\lim_{x\to 0+}\sqrt{1+\left\{\frac{\ln(2x+1)}{x}\right\}^2}$

$=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$

31) 정답 2

세 점 A, B, C의 좌표는 각각 $\mathrm{A}(e^t-1,\ t)$, $\mathrm{B}(e^{3t}-1,\ 3t)$, $\mathrm{C}(e^{3t}-1,\ t)$ 이므로

$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}\times\{(e^{3t}-1)-(e^t-1)\}\times 2t$

$=t\times\{(e^{3t}-1)-(e^t-1)\}$

따라서

$\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t^2}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{t\times\{(e^{3t}-1)-(e^t-1)\}}{t^2}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{(e^{3t}-1)-(e^t-1)}{t}$

$=\lim_{t\to 0+}\frac{e^{3t}-1}{t}-\lim_{t\to 0+}\frac{e^t-1}{t}$

$=3-1=2$

32) 정답 ②

점 P 에서 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$ 이라 하면 $y'=x$ 이고 접선의 기울기는 t 이므로 점 $\left(t,\ \frac{1}{2}t^2\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y=t(x-t)+\frac{1}{2}t^2$$

이 직선이 $(a,\ -2)$를 지나므로

$$-2=t(a-t)+\frac{1}{2}t^2$$

$$t^2-2at-4=0$$

이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2a,\ \ \alpha\beta=-4$$

이고

$$|\beta-\alpha|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{4a^2+16}$$

두 직선 l_1, l_2의 기울기를 각각 α, β라 하면 두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$이므로

$$\tan\frac{\pi}{3}=\left|\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\right|$$

$$=\frac{\sqrt{4a^2+16}}{3}$$

에서 $\sqrt{4a^2+16}=3\sqrt{3}$

$$\therefore\ a=\frac{\sqrt{11}}{2}\ (\because\ a>0)$$

33) 정답 8

$x\neq 0$일 때 $f(x)=\dfrac{(a-2\cos x)^3}{(\tan x-\sin x)^2}$이고, 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{(a-2\cos x)^3}{(\tan x-\sin x)^2}$$

$x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}(a-2\cos x)^3=0$에서 $a-2\cos 0=0$ $\quad\therefore\ a=2$

따라서

$$f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{(2-2\cos x)^3}{(\tan x-\sin x)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8\times(1-\cos x)^3\times\cos^2 x}{\sin^2 x(1-\cos x)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8\times\cos^2 x\times(1-\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8\times\cos^2 x\times(1-\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8\times\cos^2 x\times\sin^2 x}{\sin^2 x\times(1+\cos x)}$$

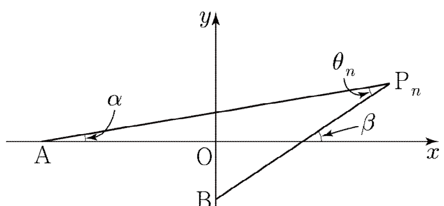
$$=\lim_{x\to 0}\frac{8\times\cos^2 x}{1+\cos x}$$

$$=\frac{8}{1+1}=4$$

이므로 구하는 값은

$$a\times f(0)=2\times 4=8$$

34) 정답 ⑤



직선 AP_n이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 α,

직선 BP_n이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 β라 하자.

$$\tan\alpha=\frac{1}{n+3},\ \ \tan\beta=\frac{2}{n}$$

이고 $\theta_n=\beta-\alpha$이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan\theta_n=\tan(\beta-\alpha)$$

$$=\left|\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}\right|$$

$$=\left|\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n+3}}{1+\frac{2}{n}\times\frac{1}{n+3}}\right|$$

$$=\frac{n+6}{(n+1)(n+2)}\ \ (\because\ n\text{은 자연수})$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{10}\left(\tan\theta_n-\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{10}\left\{\frac{n+6}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{n+1}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{4}{(n+1)(n+2)}$$

$$=4\times\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=4\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)=\frac{5}{3}$$

35) 정답 6

$g(x)=e^{x^k}\sqrt{f(x)}$에서 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln g(x)=x^k+\frac{1}{2}\ln f(x)$$

이고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=kx^{k-1}+\frac{f'(x)}{2f(x)}$$

$$\frac{g'(1)}{g(1)}=k+\frac{f'(1)}{2f(1)}$$

이고 양변에 $2g(1)f(1)$을 곱하면

$$2g'(1)f(1)=2kg(1)f(1)+f'(1)g(1)$$

이므로 상수 k의 값은 6이다.

36) 정답 ①

두 점 $\mathrm{A}(a,\ 2a)$, $\mathrm{B}(b,\ 2b)$는 직선 $y=2x$ 위의 점이므로

두 실수 a, b는 방정식 $e^{2x}-5e^x+6=0$의 두 실근이다.

$$e^{2x}-5e^x+6=0$$

$$(e^x-2)(e^x-3)=0$$

$$e^x=2\ \text{또는}\ e^x=3$$

$$\therefore\ x=\ln 2\ \text{또는}\ x=\ln 3$$

즉, $a=\ln 2$, $b=\ln 3$ ($\because\ a<b$)

한편 $e^y-5e^x+6=0$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$$e^y\frac{dy}{dx}-5e^x=0$$

$$\therefore\ y'=\frac{5e^x}{e^y}$$

위 식에 $x=\ln 2$, $y=2\ln 2$와 $x=\ln 3$, $y=2\ln 3$을 각각 대입하면

두 접선의 기울기는 각각 $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{3}$이다.

따라서 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan\theta=\left|\frac{\frac{5}{2}-\frac{5}{3}}{1+\frac{5}{2}\times\frac{5}{3}}\right|=\frac{5}{31}$$

37) 정답 ③

시각 $t=a$에서 점 P가 y축 위에 있으므로 점 P의 x좌표는 0이다.

방정식 $\sin a+\cos a=0$에서 $0<a<\pi$이므로 $a=\frac{3}{4}\pi$

한편, $x=\sin t+\cos t$에서

$$\frac{dx}{dt}=\cos t-\sin t$$

$y=2\cos t-\sin t$에서

$$\frac{dy}{dt}=-2\sin t-\cos t$$

시각 $t=a$에서의 점 P의 속도는

$$(\cos a-\sin a,\ -2\sin a-\cos a)=\left(-\sqrt{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

따라서 점 P의 시각 $t=a$에서의 속력은

$$\sqrt{(-\sqrt{2})^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

38) 정답 ②

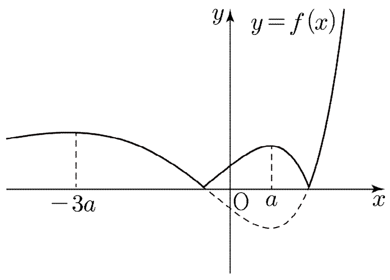
$g(x)=(x^2-3a^2)e^{\frac{x}{a}}$이라 하면

$$g'(x)=2xe^{\frac{x}{a}}+\frac{1}{a}(x^2-3a^2)e^{\frac{x}{a}}$$
$$=\frac{1}{a}(x^2+2ax-3a^2)e^{\frac{x}{a}}$$
$$=\frac{1}{a}(x+3a)(x-a)e^{\frac{x}{a}}$$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-3a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

한편, $e^{\frac{x}{a}}>0$ 이므로 $f(x)=\left|x^2-3a^2\right|e^{\frac{x}{a}}=|g(x)|$ 이고
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=-3a$, $x=a$에서 극댓값을 갖는다.

$$f(-3a)=\left|9a^2-3a^2\right|e^{\frac{-3a}{a}}=6a^2e^{-3}$$
$$f(a)=\left|a^2-3a^2\right|e^{\frac{a}{a}}=2a^2e$$

함수 $f(x)$의 모든 극댓값의 곱이 $\frac{3}{4}$ 이므로

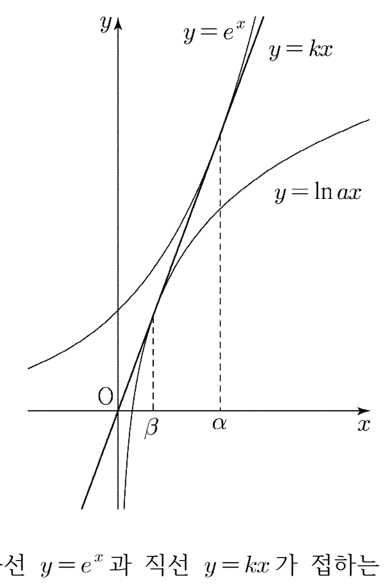
$$6a^2e^{-3}\times 2a^2e=12a^4e^{-2}=\frac{3}{4}$$
$$a^4=\frac{e^2}{16} \qquad \therefore\ a=\frac{\sqrt{e}}{2}$$

39) 정답 ④

부등식 $\frac{\ln ax}{x}\le k\le \frac{e^x}{x}$ 에서 모든 양의 실수 x에 대하여

$$\ln ax\le kx\le e^x$$

이 성립하도록 하는 실수 k의 값이 하나뿐이므로 그림과 같이 직선 $y=kx$는 두 곡선 $y=e^x$, $y=\ln ax$와 각각 접해야 한다.



곡선 $y=e^x$과 직선 $y=kx$가 접하는 점의 x좌표를 α라 하면 함수 $y=e^x$의 도함수는 $y'=e^x$이므로

$$k=\frac{e^{\alpha}}{\alpha}=e^{\alpha}$$

에서 $\alpha=1$, $k=e$
또한 곡선 $y=\ln ax$와 직선 $y=ex$가 접하는 점의 x좌표를 β라 하면 함수 $y=\ln ax$의 도함수는 $y'=\frac{1}{x}$ 이므로

$$e=\frac{\ln a\beta}{\beta}=\frac{1}{\beta}$$

에서 $\beta=\frac{1}{e}$, $\ln\frac{a}{e}=1$, $\therefore\ a=e^2$

[다른 풀이]
양의 실수 x에 대하여 $f(x)=\frac{\ln ax}{x}$, $g(x)=\frac{e^x}{x}$라 하면
함수 $f(x)$의 최댓값 M, 함수 $g(x)$의 최솟값 m에 대하여

$$\frac{\ln ax}{x}\le M\le k\le m\le \frac{e^x}{x}$$

이때 조건을 만족시키는 실수 k의 값이 하나뿐이므로 $M=m$이다.
$f'(x)=\frac{1-\ln ax}{x^2}$ 이므로 $f'(x)=0$에서 $x=\frac{e}{a}$

$$M=f\left(\frac{e}{a}\right)=\frac{a}{e}$$

$g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$ 이므로 $g'(x)=0$에서 $x=1$

$$m=g(1)=e$$

$M=m$에서 $\frac{a}{e}=e$ 이므로 $a=e^2$이다.

40) 정답 ②

$f(x)=e^{ax^2}$이라 하면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로
곡선 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.
따라서 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 두 접선의 기울기는 각각 -2, 2이다.
즉, 직선 $y=2x$는 곡선 $y=f(x)$와 접한다.
접점의 좌표를 $\left(t, e^{at^2}\right)$이라 하면 양수 t에 대하여 접선의 기울기는

$$f'(t)=2ate^{at^2} \qquad \cdots ㉠$$

이므로 점 $\left(t, e^{at^2}\right)$에서 그은 접선의 방정식은

$$y-e^{at^2}=2ate^{at^2}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0-e^{at^2}=2ate^{at^2}(0-t),\ 2at^2e^{at^2}=e^{at^2}$$
$$\therefore\ 2at^2=1\ (\because\ e^{at^2}>0) \qquad \cdots ㉡$$

㉠에서 양수 t에 대하여 접선의 기울기 $f'(t)$는 양수이므로

$$2ate^{at^2}=2$$

㉡에서 $2at=\frac{1}{t}$, $at^2=\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{t}\times\sqrt{e}=2 \qquad \therefore\ t=\frac{\sqrt{e}}{2}$$

따라서 상수 a의 값은 $a=\frac{1}{2t^2}=\frac{2}{e}$

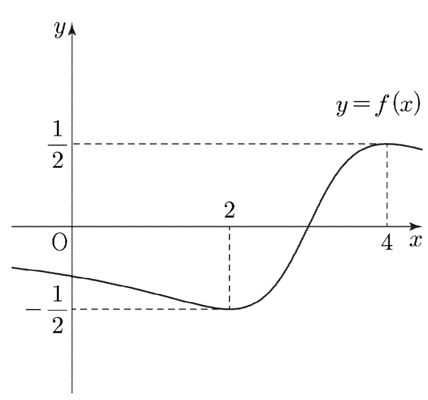
41) 정답 43

$f(x)=\frac{x-3}{x^2-6x+10}$ 에서

$$f'(x)=\frac{x^2-6x+10-(x-3)(2x-6)}{\left(x^2-6x+10\right)^2}=-\frac{(x-2)(x-4)}{\left(x^2-6x+10\right)^2}$$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘



$g(1)$, $g(5)$는 각각 닫힌구간 $[-1, 1]$, $[-5, 5]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이므로

$g(1)=f(-1)=-\dfrac{4}{17}$, $g(5)=f(4)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ g(1)+g(5)=-\dfrac{4}{17}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{34}$

따라서 $p=34$, $q=9$ 이고 $p+q=43$ 이다.

[참고]

$f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-6x+10}=\dfrac{x-3}{(x-3)^2+1}$ 에서

함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동시키면

$y=\dfrac{x}{x^2+1}$ 이므로 더 간단하게 미분할 수 있다.

42) 정답 10

두 직선 AB, AC가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1, θ_2라 하면

$\tan\theta_1=\dfrac{8k^2-5k^2}{2k-k}=3k$, $\tan\theta_2=\dfrac{8k^2-5k^2}{4k-k}=k$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\begin{aligned}\tan(\angle \mathrm{BAC})&=\tan(\theta_1-\theta_2)\\&=\left|\frac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}\right|\\&=\left|\frac{3k-k}{1+3k\times k}\right|\\&=\frac{2k}{1+3k^2}\quad(\because\ k>0)\end{aligned}$$

$\dfrac{2k}{1+3k^2}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{k}+3k}$ 에서 $\dfrac{1}{k}>0$, $3k>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{2}{\dfrac{1}{k}+3k}\le\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

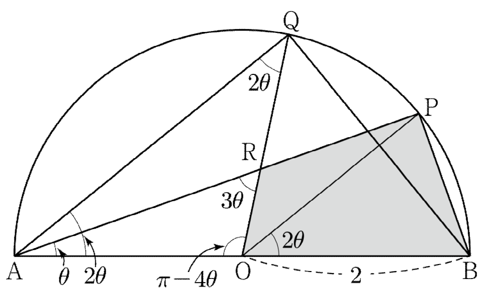
(단, 등호는 $\dfrac{1}{k}=3k$, 즉 $k=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때 성립한다.)

따라서 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $M=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$30\times a\times M=30\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=10$

43) 정답 16

사각형 OBPR의 넓이는 삼각형 PAB의 넓이에서 삼각형 AOR의 넓이를 뺀 값과 같으므로 다음과 같이 구할 수 있다.



삼각형 PAB에서 $\overline{\mathrm{AB}}=4$이고 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\cos\theta=4\cos\theta$

이므로 삼각형 PAB의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{PA}}\times\sin\theta&=\frac{1}{2}\times4\times4\cos\theta\times\sin\theta\\&=8\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

이고 삼각형 AOQ에서 $\angle\mathrm{OQA}=2\theta$ 이므로 $\angle\mathrm{AOQ}=\pi-4\theta$

삼각형 AOR에서 $\angle\mathrm{AOR}=3\theta$ 이므로 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{OR}}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{\mathrm{OA}}}{\sin3\theta}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OR}}=\dfrac{2\sin\theta}{\sin3\theta}$

삼각형 AOR의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin(\pi-4\theta)$

$\dfrac{1}{2}\times2\times\overline{\mathrm{OR}}\times\sin4\theta=\dfrac{2\sin\theta\sin4\theta}{\sin3\theta}$

따라서

$S(\theta)=8\sin\theta\cos\theta-\dfrac{2\sin\theta\sin4\theta}{\sin3\theta}$

이므로

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\sin\theta\cos\theta-\dfrac{2\sin\theta\sin4\theta}{\sin3\theta}}{\theta}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\sin\theta\cos\theta}{\theta}-\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\theta\sin4\theta}{\theta\times\sin3\theta}\\&=8-\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin4\theta}{\sin3\theta}\\&=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}=\alpha\end{aligned}$$

$\therefore\ 3\alpha=16$

44) 정답 ③

$g(x)=f(x)-xf'(x)$ 에서

$$\begin{aligned}g'(x)&=f'(x)-f'(x)-xf''(x)\\&=-xf''(x)=\frac{\pi^2}{a^2}x\sin\frac{\pi x}{a}\end{aligned}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	a	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	$3a$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a이고 공차가 $2a$인 등차수열을 이룬다.

$a_n=(2n-1)a$ 이고 $(a_2)^2=a_1+a_3$ 이므로

$9a^2=6a\qquad\therefore\ a=\dfrac{2}{3}$

$f'(x)=\dfrac{\pi}{a}\cos\dfrac{\pi x}{a}=\dfrac{3}{2}\pi\cos\dfrac{3}{2}\pi x$ 이므로 $f'(2)$ 의 값은

$\dfrac{3}{2}\pi\times(-1)=-\dfrac{3}{2}\pi$

45) 정답 ④

$f'(x)=a(1-x)e^{-x}$ 이고 $a>0$ 이므로 $x\ge1$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 는 감소함수이다.

함수 $g(x)$ 가 $f(x)$ 의 역함수이므로

$f(g(x))=x$

위 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)f'(g(x))=1$

$\therefore\ f'(g(x))=\dfrac{1}{g'(x)}$

$\dfrac{d}{dx}\left\{\dfrac{1}{g'(x)}\right\}=-\dfrac{g''(x)}{\{g'(x)\}^2}$ 이고 $\dfrac{1}{g'(x)}$ 이 열린구간 $(0,1)$ 에서 감소하므로 열린구간 $(0,1)$ 에서

$-\dfrac{g''(x)}{\{g'(x)\}^2}\le0\qquad\therefore\ g''(x)\ge0$

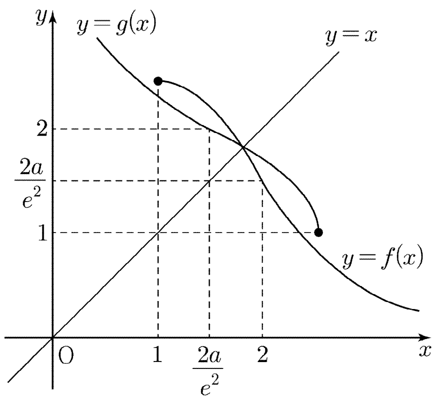
즉, 곡선 $y=g(x)$ 는 열린구간 $(0,1)$ 에서 아래로 볼록이어야 한다.

$f''(x)=a(x-2)e^{-x}$ 이므로 곡선 $y=f''(x)$ 는 열린구간 $(2,\infty)$ 에서 아래로 볼록인 곡선이고, $f(2)=\dfrac{2a}{e^2}$ 이므로 곡선 $y=g(x)$ 는 열린구간 $\left(0,\dfrac{2a}{e^2}\right)$ 에서 아래로 볼록인 곡선이다.

방정식 $f''(x)=0$ 에서 $x=2$ 이고, 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\dfrac{a}{e}$	↘	$\dfrac{2a}{e^2}$	↘

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $\frac{2a}{e^2} \geq 1$일 때 주어진 조건을 만족시키고,

$a \geq \frac{e^2}{2}$ 이므로 a의 최솟값은 $\frac{e^2}{2}$ 이다.

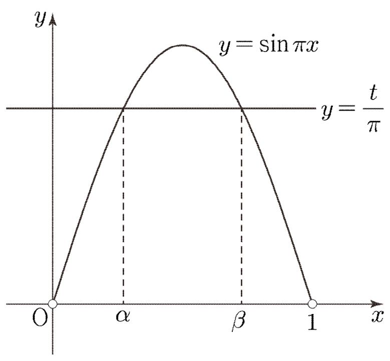
46) 정답 ③

$f(x)=\cos\pi x+tx$에서 $f'(x)=-\pi\sin\pi x+t$이므로

방정식 $f'(x)=0$에서 $\sin\pi x=\frac{t}{\pi}$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta\ (\alpha<\beta)$에서 극값을 가지므로

α, β는 각각 함수 $y=\sin\pi x\ (0<x<1)$의 그래프와 직선 $y=\frac{t}{\pi}$가 만나는 두 점의 x좌표와 같다.



$h(t)=\alpha\left(0<h(t)<\frac{1}{2}\right)$이라 하면

함수 $y=\sin\pi x\ (0<x<1)$의 그래프는 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로

$\beta=1-h(t)$이다.

따라서

$$g(t)=\beta-\alpha=\{1-h(t)\}-h(t)=1-2h(t) \quad \cdots ㉠$$

또한 $\sin\{\pi h(t)\}=\frac{t}{\pi}$에서 $t=\frac{\pi}{2}$일 때, $\sin\left\{\pi h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\frac{1}{2}$

$$\therefore\ \pi h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{6},\ 즉\ h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{6}\ \left(\because\ 0<h(t)<\frac{1}{2}\right)$$

$\sin\{\pi h(t)\}=\frac{t}{\pi}$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$\pi h'(t)\cos\{\pi h(t)\}=\frac{1}{\pi} \quad \cdots ㉡$$

㉡에 $t=\frac{\pi}{2}$을 대입하면

$$\pi h'\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left\{\pi h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}=\frac{1}{\pi},\ 즉\ h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3\pi^2}$$

㉠에서 $g'(t)=-2h'(t)$이므로

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\times\frac{2\sqrt{3}}{3\pi^2}=-\frac{4\sqrt{3}}{3\pi^2}$$

47) 정답 ④

$f(x)=e^{tx}\cos x$에서 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=(-\sin x+t\cos x)\times e^{tx}$$

x에 대한 방정식 $-\sin x+t\cos x=0$의 실근을 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$t=\tan\alpha$이므로 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $t>0$에서 실수 α의 값의 개수는 1이다.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\alpha$에서 극대이자 최댓값을 가지므로

$g(t)=e^{t\alpha}\cos\alpha$이고 $t=\tan\alpha$이다.

$t=1$일 때, $\alpha=\frac{\pi}{4}$이고

$t=\tan\alpha$에서 양변을 t에 대하여 미분하면 $\frac{dt}{d\alpha}=\sec^2\alpha$이다.

한편 $g(t)=e^{t\alpha}\cos\alpha$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$g'(t)=\alpha e^{t\alpha}\cos\alpha+(t\cos\alpha-\sin\alpha)e^{t\alpha}\times\frac{d\alpha}{dt}$$

$t=1$일 때 $\alpha=\frac{\pi}{4}$이고 $\frac{d\alpha}{dt}=\cos^2\alpha=\frac{1}{2}$이므로 위의 식에 대입하면

$$g'(1)=\frac{\pi}{4}e^{\frac{\pi}{4}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{\frac{\pi}{4}}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}e^{\frac{\pi}{4}}$$

48) 정답 36

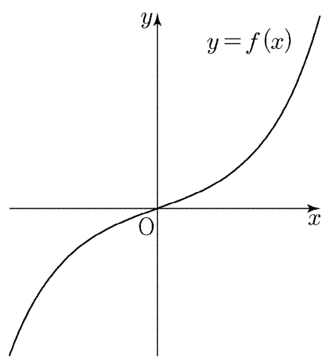
$f(x)=\frac{a}{n}(e^x-e^{-x})$에서

$$f'(x)=\frac{a}{n}(e^x+e^{-x}),\ f''(x)=\frac{a}{n}(e^x-e^{-x})$$

$f''(x)=0$에서 $x=0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f'(0)=\frac{2a}{n}$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 방정식은

$$y=\frac{2a}{n}x$$

이때 직선 $y=2nx$에 대하여

$\frac{2a}{n}<2n$, $n>\sqrt{a}$일 때 $g(n)=3$

$\frac{2a}{n}=2n$, $n=\sqrt{a}$일 때 $g(n)=0$

$\frac{2a}{n}>2n$, $n<\sqrt{a}$일 때 $g(n)=1$

즉, $\sum_{n=1}^{8}g(n)=11$을 만족시키는 $g(n)$의 값은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$g(n)$	1	1	1	1	1	0	3	3

따라서 $\sqrt{a}=6$이고 $a=36$이다.

49) 정답 ⑤

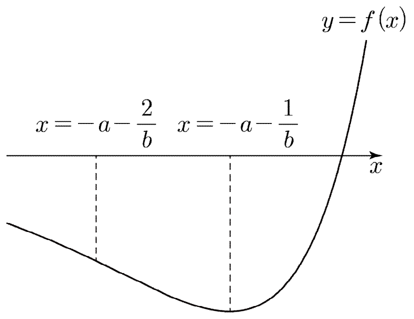
$f(x)=(x+a)e^{bx}$ 에서

$$f'(x)=e^{bx}+b(x+a)e^{bx}=b\left(x+a+\frac{1}{b}\right)e^{bx},$$

$$f''(x)=be^{bx}+b^2\left(x+a+\frac{1}{b}\right)e^{bx}=b^2\left(x+a+\frac{2}{b}\right)e^{bx}$$

함수 $f(x)$는 $x=-a-\frac{1}{b}$ 에서 극소이고, $x=-a-\frac{2}{b}$ 에서 변곡점을 갖는다.

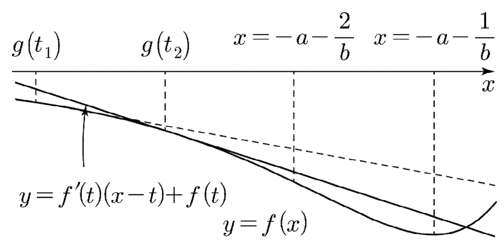
함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $g(t)$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$가 만나는 점 중 x좌표가 가장 작은 점의 x좌표이다.

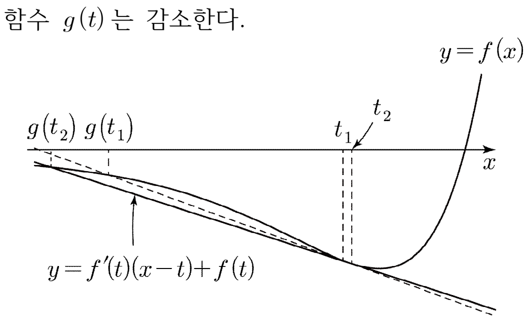
(ⅰ) $t\le -a-\frac{2}{b}$ 일 때

$g(t)=t$ 이므로 그림과 같이 $t_1<t_2$ 일 때 $g(t_1)<g(t_2)$ 이고 함수 $g(t)$는 증가한다.



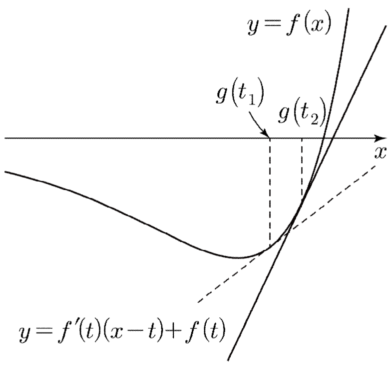
(ⅱ) $-a-\frac{2}{b}\le t<-a-\frac{1}{b}$ 일 때

그림과 같이 $t_1<t_2$ 일 때 $g(t_1)>g(t_2)$ 이므로 함수 $g(t)$는 감소한다.



(ⅲ) $t\ge -a-\frac{1}{b}$ 일 때

$g(t)=t$ 이므로 그림과 같이 $t_1<t_2$ 일 때 $g(t_1)<g(t_2)$ 이고 함수 $g(t)$는 증가한다.



(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 함수 $g(t)$가 감소하는 실수 t의 값의 범위는 $-a-\frac{2}{b}\le t<-a-\frac{1}{b}$ 이므로 조건에 의하여

$$-a-\frac{2}{b}=-10,\ -a-\frac{1}{b}=-6$$

두 식을 연립하면 $a=2$, $b=\frac{1}{4}$ 이므로 $a\times b=\frac{1}{2}$

50) 정답 112

$h(x)=g(x)\sin\frac{\pi}{g(x)}$ 에서

$$h'(x)=g'(x)\sin\frac{\pi}{g(x)}-\frac{\pi g'(x)}{g(x)}\cos\frac{\pi}{g(x)}$$

$$=g'(x)\cos\frac{\pi}{g(x)}\left\{\tan\frac{\pi}{g(x)}-\frac{\pi}{g(x)}\right\}$$

이때 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=|f(x)|+2\ge 2$ 이므로 $0<\frac{\pi}{g(x)}\le\frac{\pi}{2}$

따라서 $\cos\frac{\pi}{g(x)}\ge 0$, $\tan\frac{\pi}{g(x)}\ge\frac{\pi}{g(x)}$ 이므로 함수 $h(x)$의 증가와 감소는 함수 $g(x)$의 증가와 감소와 같다.

삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=0$인 실수 α가 반드시 존재하므로

$$h(\alpha)=2\times\sin\frac{\pi}{2}=2$$

조건에 의하여 방정식 $h(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수가 2이어야 하므로 방정식 $g(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수가 2이어야 한다.

따라서 함수 $g(x)$는 극솟값 2를 갖는다. … ㉠

또한 $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\pi}{|f(x)|+2}=0$, $\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi}{|f(x)|+2}=0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=\lim_{x\to\infty}\pi\times\frac{\sin\frac{\pi}{g(x)}}{\frac{\pi}{g(x)}}=\pi,$$

$$\lim_{x\to-\infty}h(x)=\lim_{x\to-\infty}\pi\times\frac{\sin\frac{\pi}{g(x)}}{\frac{\pi}{g(x)}}=\pi$$

이고 반드시 $h(\beta)=3$인 실수 β가 존재한다.

조건에 의하여 방정식 $h(x)=3$의 서로 다른 실근의 개수가 3이어야 한다.

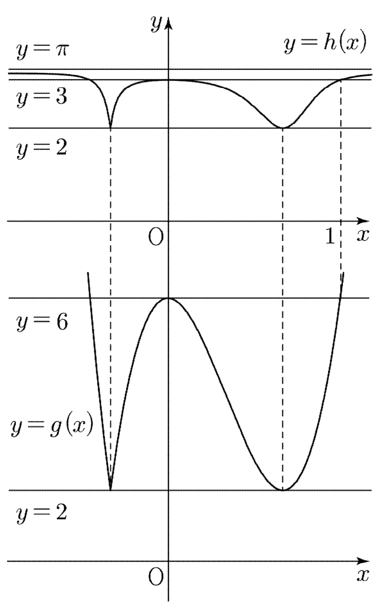
이때

$$h(0)=h(1)=6\times\sin\frac{\pi}{6}=3$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 가져야 한다.

즉, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극댓값을 갖는다. … ㉡

㉠, ㉡에 의하여 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(x)=kx^2(x-1)+4\ (k>0)$ 이라 하면

$$f'(x)=3kx\left(x-\frac{2}{3}\right)$$

$f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{4}{27}k+4=0$ 이므로 $k=27$

따라서 $f(x)=27x^2(x-1)+4$ 이고 $f(2)=112$ 이다.

51) 정답 9

$x<0$ 일 때 $f'(x)=2x+a$ 이고 방정식 $f'(x)=0$ 에서 $x=-\frac{a}{2}$

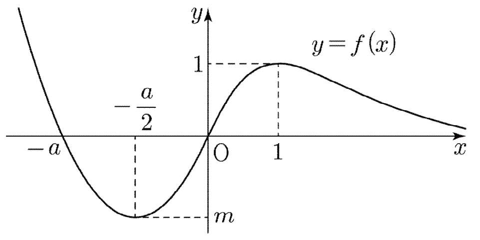
$x>0$ 일 때

$$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

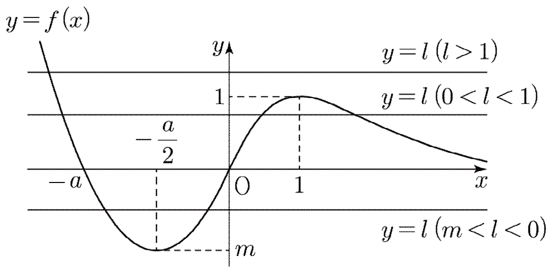
이고 $f'(x)=0$ 에서 $x=1$ 이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 그림과 같다.

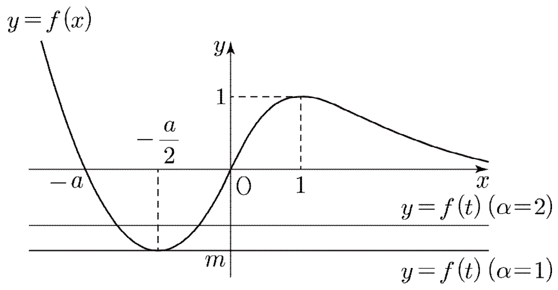


x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)+k$의 서로 다른 실근의 개수가 $g(t)$이므로 $g(t)$의 값은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(t)+k$가 만나는 점의 개수에 따라 변한다.
$f(t)+k=l$, 함수 $f(x)$의 극솟값을 m이라 하면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=l$이 만나는 점의 개수는 $m<l<0$일 때 2, $0<l<1$일 때 3, $l>1$일 때 1이므로 $l=0$, $l=1$일 때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=l$이 만나는 점의 개수가 변한다.

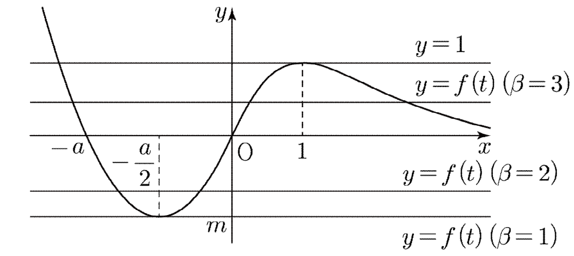


즉, $l=0$, $l=1$일 때 함수 $g(t)$는 불연속이다.
조건 (가)에 의하여 함수 $g(t)$의 불연속점의 개수가 3이므로 $l=0$일 때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(t)$가 만나는 점의 개수와 $l=1$일 때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(t)$가 만나는 점의 개수의 합이 3이어야 한다. $\cdots$ ㉠

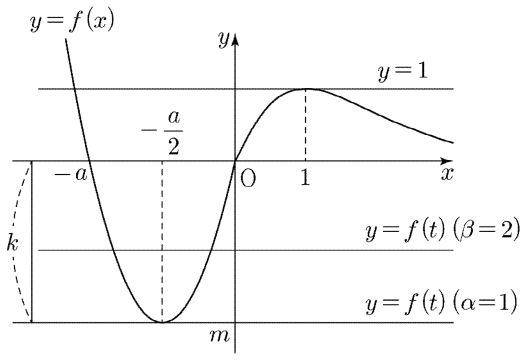
(ⅰ) $l=0$일 때
$f(t)=-k<0$이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(t)$가 만나는 점의 개수를 α라 하면 $\alpha=1$ 또는 $\alpha=2$이다.



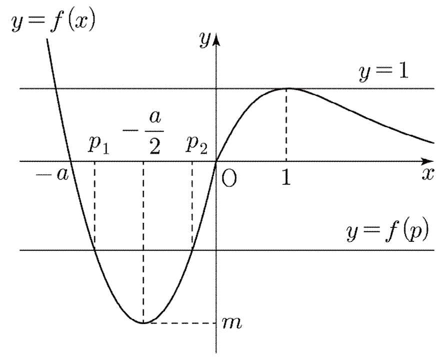
(ⅱ) $l=1$일 때
$f(t)=1-k<1$이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(t)$가 만나는 점의 개수를 β라 하면 $\alpha\le\beta$이고 $\beta=1$ 또는 $\beta=2$ 또는 $\beta=3$이다.



(ⅰ), (ⅱ)와 ㉠에 의하여 $\alpha+\beta=3$이므로 $\alpha=1$, $\beta=2$이다.



조건 (나)에서 $\left|\lim_{t\to p+}g(t)-\lim_{t\to p-}g(t)\right|=2$를 만족시키려면 $t\to p+$일 때와 $t\to p-$일 때의 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=l$이 만나는 점의 개수의 차가 2이어야 하므로 $l=1$이어야 한다.



즉, $\left|\lim_{t\to p+}g(t)-\lim_{t\to p-}g(t)\right|=2$를 만족시키는 실수 p는 $f(p)+k=1$, $p^2+ap+k-1=0$을 만족시키고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 p의 값의 합은 $-a=-3$이므로 $a=3$이다.

$$\therefore\ f(x)=\begin{cases} x^2+3x & (x\le 0) \\ \dfrac{2x}{x^2+1} & (x>0)\end{cases}$$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f\left(-\frac{a}{2}\right)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}$이므로 $k=\frac{9}{4}$이고
$k\times f(-4)=\frac{9}{4}\times 4=9$이다.

52) 정답 ②

$f(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$에서 $f'(x)=x^{\frac{1}{2}}$이고, $0\le x\le 3$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는

$$\begin{aligned}\int_0^3\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx&=\int_0^3\sqrt{1+x}\,dx\\&=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3\\&=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}\end{aligned}$$

53) 정답 ③

$\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{-3}e^{\frac{1}{x}}dx$에서 $\frac{1}{x}=t$라 하면 $\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{x^2}$,
$x=\frac{1}{2}$일 때 $t=2$이고, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^{1}x^{-3}e^{\frac{1}{x}}dx&=-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left\{\frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right\}dx\\&=-\int_2^1te^t\,dt\\&=\int_1^2te^t\,dt\\&=\Big[te^t\Big]_1^2-\int_1^2e^t\,dt\\&=(2e^2-e)-\Big[e^t\Big]_1^2=e^2\end{aligned}$$

54) 정답 ③

$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{24}{9x^2-\pi^2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{x} \frac{\cos t}{\cos t+1} dt$ 에서 $f(t)=\frac{\cos t}{\cos t+1}$ 라 하면
$f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하자.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{24}{9x^2-\pi^2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{x} \frac{\cos t}{\cos t+1} dt = \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{24}{(3x+\pi)(3x-\pi)} \int_{\frac{\pi}{3}}^{x} f(t)\,dt$$
$$= \frac{4}{\pi} \times \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{1}{x-\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{\pi}{3}}^{x} f(t)\,dt$$
$$= \frac{4}{\pi} \times \lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \frac{F(x)-F\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}$$
$$= \frac{4}{\pi} F'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{\pi} f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

따라서 구하는 값은
$$\frac{4}{\pi} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3\pi}$$

55) 정답 ②

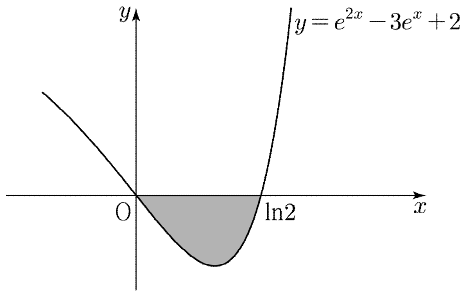
$\int_{1}^{2} \frac{x}{x^2+3x+2} dx$ 에서
$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} \quad (a,\ b\text{는 상수})$$
$$= \frac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}$$
$$= \frac{(a+b)x+(2a+b)}{(x+1)(x+2)}$$
$a+b=1,\ 2a+b=0$
$\therefore\ a=-1,\ b=2$
즉,
$$\int_{1}^{2} \frac{x}{x^2+3x+2} dx = \int_{1}^{2} \frac{x}{(x+1)(x+2)} dx$$
$$= \int_{1}^{2} \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1} \right) dx$$
$$= \Big[2\ln(x+2) - \ln(x+1) \Big]_{1}^{2}$$
$$= 5\ln 2 - 3\ln 3$$

56) 정답 ②

$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\sqrt{\frac{k}{n}}}}{n} = \int_{0}^{1} e^{\sqrt{x}} dx$ 에서 $\sqrt{x}=t$ 라 하면
$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=1$ 일 때 $t=1$ 이고
$x=t^2$ 에서 $\frac{dx}{dt}=2t$ 이므로
$$\int_{0}^{1} e^{\sqrt{x}} dx = \int_{0}^{1} 2te^t\,dt$$
$$= \Big[2te^t \Big]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} 2e^t\,dt$$
$$= 2e - \Big[2e^t \Big]_{0}^{1} = 2$$

57) 정답 ②

방정식
$$e^{2x}-3e^x+2=(e^x-1)(e^x-2)=0$$
에서 곡선 $y=e^{2x}-3e^x+2$ 는 x 축과 $x=0,\ x=\ln 2$ 에서 만난다.



따라서 둘러싸인 부분의 넓이는
$$\int_{0}^{\ln 2} \left| e^{2x}-3e^x+2 \right| dx = -\left[\frac{e^{2x}}{2} - 3e^x + 2x \right]_{0}^{\ln 2}$$
$$= \frac{3}{2} - 2\ln 2$$

58) 정답 ⑤

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$ 에서의 위치 (x, y) 가
$x=e^t+e^{-t},\ y=2t+1$
이므로
$\frac{dx}{dt}=e^t-e^{-t},\ \frac{dy}{dt}=2$
따라서 시각 $t=\ln 3$ 에서 $t=\ln 6$ 까지 점 P가 움직인 거리는
$$\int_{\ln 3}^{\ln 6} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
$$= \int_{\ln 3}^{\ln 6} \sqrt{(e^t-e^{-t})^2+4}\,dt$$
$$= \int_{\ln 3}^{\ln 6} \sqrt{e^{2t}+e^{-2t}+2}\,dt$$
$$= \int_{\ln 3}^{\ln 6} (e^t+e^{-t})\,dt$$
$$= \Big[e^t - e^{-t} \Big]_{\ln 3}^{\ln 6}$$
$$= 6 - \frac{1}{6} - 3 + \frac{1}{3} = \frac{19}{6}$$

59) 정답 ②

주어진 입체도형을 x 축 위의 점 $(t, 0)\ \left(\sqrt{\frac{\pi}{6}} < t < \sqrt{\frac{\pi}{3}} \right)$ 을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 한 변의 길이가 $\sqrt{t\cos(t^2)}$ 인 정삼각형이므로 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면
$$S(t) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\sqrt{t\cos(t^2)} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} t\cos(t^2)$$
따라서 곡선 $y=\sqrt{x\cos(x^2)}$ 와 x 축 및 두 직선
$x=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ 로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형의 부피는
$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} S(t)\,dt = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} t\cos(t^2)\,dt$$
$t^2=x$ 라 하면 $t=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$ 일 때 $x=\frac{\pi}{6}$, $t=\sqrt{\frac{\pi}{3}}$ 일 때
$x=\frac{\pi}{3}$ 이고 $\frac{dx}{dt}=2t$ 이므로
$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{3}}} t\cos(t^2)\,dt = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x\,dx$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{8} \times \Big[\sin x \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{8} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right)$$
$$= \frac{3-\sqrt{3}}{16}$$

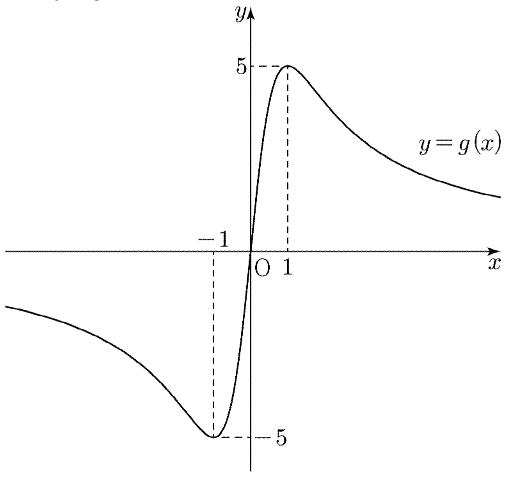
60) 정답 ②

조건 (나)에서 모든 실수 x 에 대하여
$f(x)=\frac{10x}{x^2+1}$ 또는 $f(x)=6-x$
$g(x)=\frac{10x}{x^2+1}$ 라 하면
$$g'(x) = \frac{10(x^2+1)-10x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-10(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$
방정식 $g'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=1$ 이므로
함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	5	$\searrow$

이때 $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$, $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$이므로

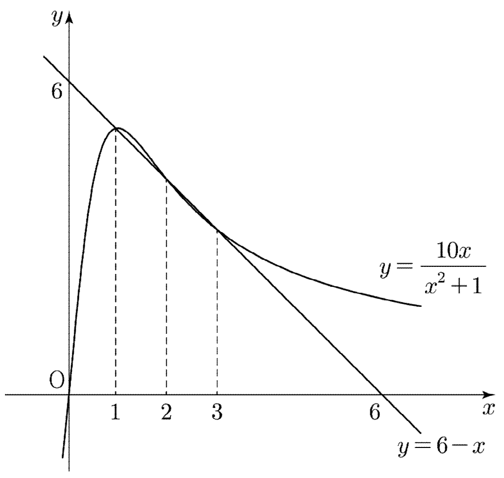
함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



곡선 $y=\dfrac{10x}{x^2+1}$와 직선 $y=6-x$의 교점의 x좌표를 구하면

$$\frac{10x}{x^2+1}=6-x$$
$$x^3-6x^2+11x-6=0$$
$$(x-1)(x-2)(x-3)=0$$
$$\therefore\ x=1 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=3$$

곡선 $y=\dfrac{10x}{x^2+1}$와 직선 $y=6-x$는 다음 그림과 같다.



함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$의 값이 최소이기 위해서는

$0\le x\le 1$ 또는 $2\le x\le 3$일 때 $f(x)=\dfrac{10x}{x^2+1}$이고,

$1\le x\le 2$일 때 $f(x)=-x+6$이어야 한다.

따라서 $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$의 최솟값은

$$\int_0^1\frac{10x}{x^2+1}dx+\int_1^2(6-x)dx+\int_2^3\frac{10x}{x^2+1}dx$$
$$=\Big[5\ln(x^2+1)\Big]_0^1+\Big[6x-\frac{x^2}{2}\Big]_1^2+\Big[5\ln(x^2+1)\Big]_2^3$$
$$=5\ln2+\frac{9}{2}+5\ln2$$
$$=\frac{9}{2}+10\ln2$$

61) 정답 ①

$(x-e)f(x)=\displaystyle\int_1^x(t-k)\ln t\,dt$에서 양변에 $x=e$를 대입하면

$$\int_1^e(t-k)\ln t\,dt=0 \qquad \cdots ㉠$$

이므로

$$\int_1^e(t-k)\ln t\,dt=\left[\left(\frac{1}{2}t^2-kt\right)\ln t\right]_1^e-\int_1^e\left(\frac{1}{2}t-k\right)dt$$
$$=\left(\frac{1}{2}e^2-ke\right)-\left[\frac{1}{4}t^2-kt\right]_1^e$$
$$=\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-k=0$$
$$\therefore\ k=\frac{e^2+1}{4} \qquad \cdots ㉡$$

또한 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=e$에서도 연속이다.

$$\lim_{x\to e}f(x)=f(e)$$
$$\lim_{x\to e}f(x)=\lim_{x\to e}\frac{\int_1^x(t-k)\ln t\,dt}{x-e}$$
$$=\lim_{x\to e}\frac{\int_1^e(t-k)\ln t\,dt+\int_e^x(t-k)\ln t\,dt}{x-e}$$
$$=\lim_{x\to e}\frac{\int_e^x(t-k)\ln t\,dt}{x-e} \quad (\because ㉠)$$

$g(t)=(t-k)\ln t$라 할 때, $g(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하자.

$$=\lim_{x\to e}\frac{\int_e^x g(t)\,dt}{x-e}$$
$$=\lim_{x\to e}\frac{G(x)-G(e)}{x-e}$$
$$=g(e)$$
$$=e-\frac{e^2+1}{4} \quad (\because ㉡)$$
$$\therefore\ f(e)=\frac{4e-1-e^2}{4}$$

62) 정답 ②

$u'=4\sin^3x\cos x$, $v=\ln(1+\cos x)$라 하면 부분적분법에 의하여

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{4\sin^3x\cos x\ln(1+\cos x)\}\,dx$$
$$=\Big[\sin^4x\ln(1+\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^4x\times\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^5x}{1+\cos x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x(1-\cos^2x)^2}{1+\cos x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(1-\cos x)(1-\cos^2x)\,dx$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(1-\cos x)(1-\cos^2x)\,dx$에서 $\cos x=t$라 하면

$\dfrac{dt}{dx}=-\sin x$이고 $x=0$일 때 $t=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x(1-\cos x)(1-\cos^2x)\,dx$$
$$=-\int_1^0(1-t)(1-t^2)\,dt$$
$$=\int_0^1(1-t-t^2+t^3)\,dt$$
$$=\left[t-\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4}\right]_0^1$$
$$=\frac{5}{12}$$

63) 정답 ①

두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=f(-x)$, $g(x)=g(-x)$

이므로 두 함수의 그래프는 모두 y축에 대하여 대칭이다.

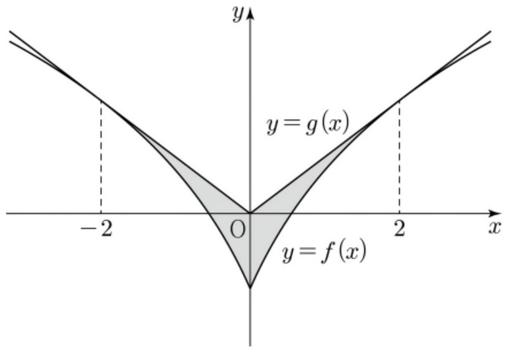
즉, 두 함수의 그래프는 $x<0$, $x>0$에서 각각 한 점에서 접해야 한다.

따라서 직선 $y=\dfrac{1}{3}x$는 곡선 $y=\ln(x+1)+a$와 접하고,

접점의 x좌표를 t라 하면

$\ln(t+1)+a=\frac{1}{3}t$, $\frac{1}{t+1}=\frac{1}{3}$

이므로 $t=2$, $a=\frac{2}{3}-\ln 3$이다.



따라서 두 함수의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$2\times\int_0^2\left\{\frac{1}{3}x-\ln(x+1)-\frac{2}{3}+\ln 3\right\}dx$$
$$=2\times\left[\frac{1}{6}x^2-(x+1)\ln(x+1)+x+1-\left(\frac{2}{3}-\ln 3\right)x\right]_0^2$$
$$=2\left\{\left(\frac{2}{3}-3\ln 3+3-\frac{4}{3}+2\ln 3\right)-1\right\}=\frac{8}{3}-2\ln 3$$

[참고]

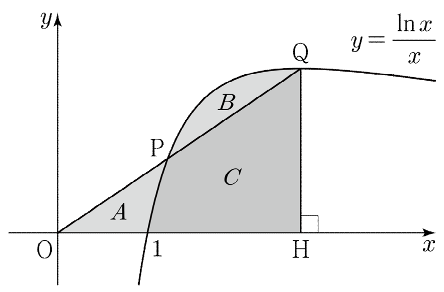
$\int \ln x\,dx=x\ln x+x+C$ (단, C는 적분상수)이므로 상수 a에 대하여

$$\int \ln(x+a)\,dx=(x+a)\ln(x+a)-(x+a)+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

64) 정답 ①

$y=\frac{\ln x}{x}$에서 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}$이므로 함수 $y=\frac{\ln x}{x}$는 $x=e$에서 극댓값을 갖고,

함수 $y=\frac{\ln x}{x}$의 그래프는 그림과 같다.



점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하고, 곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$와 x축 및 두 선분 PQ, QH로 둘러싸인 영역을 C라 하면 조건에 의하여

(A의 넓이)+(C의 넓이)=(B의 넓이)+(C의 넓이)

이다. (A의 넓이)+(C의 넓이)는 삼각형 OQH의 넓이와 같고, 점 Q의 x좌표를 α라 하면 (B의 넓이)+(C의 넓이)는 $\int_1^{\alpha}\frac{\ln x}{x}dx$와 같다. … ㉠

삼각형 OQH의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OH}}\times\overline{\mathrm{QH}}=\frac{1}{2}\times\alpha\times\frac{\ln\alpha}{\alpha}=\frac{\ln\alpha}{2}$$

이고, $\int_1^{\alpha}\frac{\ln x}{x}dx$에서 $\ln x=t$라 하면 $x=1$일 때 $t=0$, $x=\alpha$일 때 $t=\ln\alpha$이고, $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$이므로

$$\int_1^{\alpha}\frac{\ln x}{x}dx=\int_0^{\ln\alpha}t\,dt=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\ln\alpha}=\frac{(\ln\alpha)^2}{2}$$

㉠에 의하여 $\frac{\ln\alpha}{2}=\frac{(\ln\alpha)^2}{2}$, 즉 $\alpha=1$ 또는 $\alpha=e$

이때 점 Q의 y좌표는 양수이어야 하므로 $\alpha>1$이고, $\alpha=e$

따라서 점 Q의 y좌표는 $\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$이다.

65) 정답 2

$\left\{\int_{-1}^1|f(x)|\,dx\right\}^2\neq\left\{\int_{-1}^1 f(x)\,dx\right\}^2$에서

$\int_{-1}^1|f(x)|\,dx\neq\int_{-1}^1 f(x)\,dx$이고 $\int_{-1}^1|f(x)|\,dx\neq-\int_{-1}^1 f(x)\,dx$이어야 한다.

(ⅰ) $\int_{-1}^1|f(x)|\,dx=\int_{-1}^1 f(x)\,dx$일 때

$\int_{-1}^1|f(x)|\,dx=\int_{-1}^1 f(x)\,dx$이기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $f(x)\geq 0$이어야 한다.

이때 직선 $y=f(x)$의 기울기는 $(e^x)'=e^x$에서 항상 양수이므로 직선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -1 이하여야 한다.

따라서 $f(x)=e^t(x-t)+e^t$에서 직선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점은 $(t-1, 0)$이므로

$t-1\leq -1$ $\therefore\ t\leq 0$

그러므로 직선 $y=f(x)$는 $t>0$일 때 $\int_{-1}^1|f(x)|dx\neq\int_{-1}^1 f(x)dx$이다.

(ⅱ) $\int_{-1}^1|f(x)|dx=-\int_{-1}^1 f(x)dx$일 때

$\int_{-1}^1|f(x)|dx=-\int_{-1}^1 f(x)dx$이기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $f(x)\leq 0$이어야 한다.

이때 직선 $y=f(x)$의 기울기는 $(e^x)'=e^x$에서 항상 양수이므로 직선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표가 1 이상이어야 한다.

따라서 $f(x)=e^t(x-t)+e^t$에서 직선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점은 $(t-1, 0)$이므로

$t-1\geq 1$ $\therefore\ t\geq 2$

그러므로 직선 $y=f(x)$는 $t<2$일 때 $\int_{-1}^1|f(x)|dx\neq-\int_{-1}^1 f(x)dx$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $\left\{\int_{-1}^1|f(x)|\,dx\right\}^2\neq\left\{\int_{-1}^1 f(x)\,dx\right\}^2$을 만족시키는 실수 t의 범위는 $0<t<2$이고 $\beta-\alpha=2$이다.

66) 정답 ①

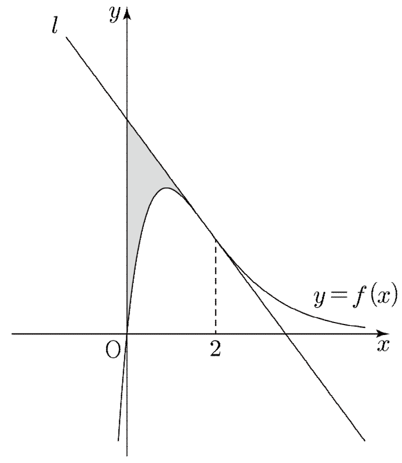
$$f'(x)=ae^{-x}-axe^{-x}=a(1-x)e^{-x}$$
$$f''(x)=-ae^{-x}-a(1-x)e^{-x}=-a(2-x)e^{-x}$$

이므로 $f''(x)=0$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 변곡점을 갖고,

곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 접선 l의 방정식은

$$y=-\frac{a}{e^2}(x-2)+\frac{2a}{e^2}$$

이다.



직선 l은 두 점 $\left(2, \frac{2a}{e^2}\right)$, $\left(0, \frac{4a}{e^2}\right)$를 지나므로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 2\times\left(\frac{2a}{e^2}+\frac{4a}{e^2}\right)-\int_0^2 f(x)\,dx$$
$$=\frac{6a}{e^2}-\int_0^2 axe^{-x}\,dx$$
$$=a\left(\frac{6}{e^2}+\left[(x+1)e^{-x}\right]_0^2\right)$$
$$=a\left(\frac{9}{e^2}-1\right)=3+e$$
$$\therefore\ a=\frac{3+e}{\frac{9}{e^2}-1}=\frac{e^2(3+e)}{9-e^2}=\frac{e^2}{3-e}$$

[참고]

$$\int xe^{-x}\,dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx=-(x+1)e^{-x}+C$$

67) 정답 ②

$f(x)=k\ln x$ 에서 $f'(x)=\dfrac{k}{x}$ 이고, 양수 t 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ k\ln t)$ 에서의 접선을 l 이라 할 때 직선 l 의 방정식은

$$l : y-k\ln t=\frac{k}{t}(x-t)$$

이다. 이때 직선 l 이 원점을 지나므로

$$-k\ln t=\frac{k}{t}\times(-t)$$

$$\therefore\ t=e\ (\because\ k>0)$$

따라서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}(e,\ k)$ 이고, 점 H의 좌표는 $\mathrm{H}(e,\ 0)$ 이다.
점 P를 지나고 직선 l 과 수직인 직선을 l' 이라 하면 직선 l' 의 방정식은

$$l' : y-k=-\frac{e}{k}(x-e)$$

이므로 점 Q의 좌표는 $\mathrm{Q}\left(e+\dfrac{k^2}{e},\ 0\right)$ 이다.
삼각형 PHQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PH}}\times\overline{\mathrm{HQ}}=\frac{1}{2}\times k\times\frac{k^2}{e}=\frac{k^3}{2e}$$

또한 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 PH, x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_1^e k\ln x\,dx=k\Big[x\ln x-x\Big]_1^e=k$$

주어진 조건에 의하여

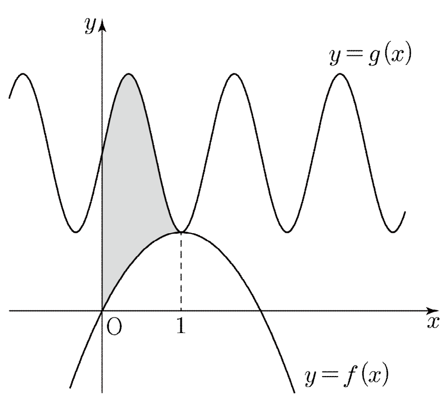
$$\frac{k^3}{2e}=k \qquad \therefore\ k=\sqrt{2e}\ \ (\because\ k>0)$$

68) 정답 ①

$a=0$ 이면 함수 $f(x)$ 는 상수함수이므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프가 오직 한 점에서 만날 수 없다.
이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1,\ -a)$ 이다.
$a>0$ 이면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 그래프가 오직 한 점에서 만날 수 없으므로 $a<0$ 이다.
두 함수의 그래프가 오직 $\mathrm{P}(1,\ f(1))$ 에서만 만나고 $f'(1)=0$ 이므로

$$g(1)=\sin b\pi+2=1,\ \ g'(1)=b\pi\cos b\pi=0$$

즉, $a=-1$, $b=\dfrac{3}{2}$ $(\because\ 0<b<2)$ 이다.



따라서 두 곡선 $y=f(x)$ 및 $y=g(x)$ 와 y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1\left\{\sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)+2-(-x^2+2x)\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3\pi}\cos\frac{3\pi}{2}x+2x+\frac{x^3}{3}-x^2\right]_0^1=\frac{4}{3}+\frac{2}{3\pi}$$

69) 정답 90

$$g(x)=\int_{-1}^{x}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt \text{ 에서}$$

$$g'(x)=\frac{xf(x)}{1+2^{f(x)}}=\frac{ax^2(x+1)(x-1)}{1+2^{a(x^3-x)}}$$

방정식 $g'(x)=0$ 에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$ 이고, a 의 값에 따라 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

(i) $a<0$ 인 경우

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	극소	↗	$g(0)$	↗	극대	↘

함수 $g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극솟값 $g(-1)$ 을 갖는다.
이때 $g(-1)=0$ 이므로 모순이다.

(ii) $a=0$ 인 경우
모든 실수 x 에 대하여 $g(x)=0$ 이므로 모순이다.

(iii) $a>0$ 인 경우

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	극대	↘	$g(0)$	↘	극소	↗

함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 $g(1)$ 을 갖는다.

$$g(1)=\int_{-1}^{1}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}=-2 \text{ 에서}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt=\int_{-1}^{0}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt+\int_{0}^{1}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt \qquad \cdots ㉠$$

$\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt$ 에서 $t=-s$ 라 하면 $t=-1$ 일 때 $s=1$, $t=0$ 일 때 $s=0$ 이고, $\dfrac{dt}{ds}=-1$ 이므로

$$\int_{-1}^{0}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt=\int_{1}^{0}\frac{sf(-s)}{1+2^{f(-s)}}ds$$

이때 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=-f(x)$ 이므로

$$\int_{1}^{0}\frac{sf(-s)}{1+2^{f(-s)}}ds=\int_{0}^{1}\frac{sf(s)}{1+2^{-f(s)}}ds=\int_{0}^{1}\frac{2^{f(s)}sf(s)}{1+2^{f(s)}}ds$$

㉠에서

$$\int_{-1}^{1}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt=\int_{0}^{1}\frac{2^{f(t)}tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt+\int_{0}^{1}\frac{tf(t)}{1+2^{f(t)}}dt$$

$$=\int_0^1\left\{\frac{tf(t)\left(1+2^{f(t)}\right)}{1+2^{f(t)}}\right\}dt$$

$$=\int_0^1 tf(t)\,dt$$

$$=\int_0^1 a\left(t^4-t^2\right)dt$$

$$=a\left[\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$

$$=-\frac{2}{15}a$$

따라서 $-\dfrac{2}{15}a=-2$ 이므로 $a=15$

(i)~(iii)에 의하여 $f(x)=15\left(x^3-x\right)$ 이고 $f(2)=90$ 이다.

70) 정답 12

방정식 $f(x)=0$ 의 실근이 존재하면 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
따라서 함수 $f(x)$는 증가함수이고 조건 (나)에서 $f(2)=e^5>0$ 이므로
모든 실수 x 에 대하여 $f(x)>0$ 이다.
즉, 모든 실수 x 에 대하여 $\ln\{f(x)f(-x)\}=\ln f(x)+\ln f(-x)=0$ 이므로

$$\ln f(x)=-\ln f(-x) \qquad \cdots ㉠$$

이다.

$\displaystyle\int_{-5}^{5}\left\{g\left(e^x\right)\right\}^2dx$ 에서 $g\left(e^x\right)=t$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 함수 $f(x)$ 의 역함수이므로

$e^x=f(t)$, 즉 $x=\ln f(t)$ 이고 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{f'(t)}{f(t)}$ 이다.

$$\int_{-5}^{5}\left\{g\left(e^x\right)\right\}^2dx=\int_{g\left(e^{-5}\right)}^{g\left(e^5\right)}\left\{t^2\times\frac{f'(t)}{f(t)}\right\}dt$$

이때 조건 (나)에서 $f(2)=e^5$ 이므로 $g\left(e^5\right)=2$ 이고,
조건 (가)에 의하여 $f(-2)=\dfrac{1}{f(2)}=e^{-5}$ 이므로 $g\left(e^{-5}\right)=-2$ 이다.
따라서

$$\int_{-5}^{5}\left\{g\left(e^x\right)\right\}^2dx=\int_{-2}^{2}\left\{t^2\times\frac{f'(t)}{f(t)}\right\}dt$$

$$=\Big[t^2\times\ln f(t)\Big]_{-2}^{2}-\int_{-2}^{2}\{2t\times\ln f(t)\}dt$$

$$=4\ln f(2)-4\ln f(-2)-2\int_{-2}^{2}\{t\ln f(t)\}dt$$

$$=8\ln f(2)-4\int_0^2\{t\ln f(t)\}dt\ \ (\because\ ㉠)$$

$$=8\times5-4\times7\ \ (\because \text{ 조건 (나)})$$

$$=12$$