약점보완 테스트 15회

학 교 : ________________ 학 년 : ________ 이 름 : ________________

1. x에 대한 방정식 $|x^2-2|+x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가질 때, 모든 실수 k의 값의 곱은?

① $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{21\sqrt{2}}{8}$ ③ $3\sqrt{2}$
④ $\frac{27\sqrt{2}}{8}$ ⑤ $\frac{15\sqrt{2}}{4}$

2. 두 다항함수 $f_1(x)$, $f_2(x)$가 다음 세 조건을 만족시킬 때, 상수 k의 값은?

(가) $f_1(0)=0$, $f_2(0)=0$
(나) $f_i{}'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_i(x)+2kx}{f_i(x)+kx}$ $(i=1,\ 2)$
(다) $y=f_1(x)$와 $y=f_2(x)$의 원점에서의 접선이 서로 직교한다.

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ 0
④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

3. 모든 항이 2이상인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 S_n, T_n을

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_k$, $\log(T_n)=\sum_{k=1}^{n}\log(\log_2 a_k)$이라 하자.

$(S_{n+1}-S_{n-1})^2=4\left(\frac{T_{n+1}}{T_{n-1}}+\frac{1}{4}\right)$ (단, $n\geq 2$),

$a_6=a_{10}=8$을 만족시키는 a_7, a_8, a_9에 대하여

$\sum_{k=1}^{5}a_{k+5}$의 최댓값은?

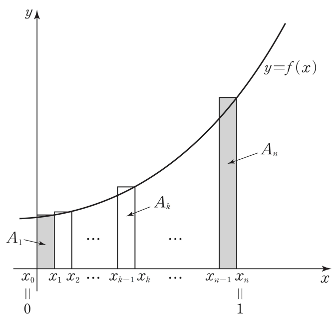
① 40 ② 56 ③ 64
④ 72 ⑤ 80

4. [2010학년도 대수능 가형 21번]

함수 $f(x)=x^2+ax+b\,(a\geq 0,\ b>0)$가 있다. 그림과 같이 2 이상인 자연수 n에 대하여 닫힌구간 $[0,\,1]$을 n등분한 각분점(양 끝점도 포함)을 차례로

$$0=x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{x-1},\ x_n=1$$

이라 하자. 닫힌구간 $[x_{k-1},\ x_k]$를 밑변으로 하고 높이가 $f(x_k)$인 직사각형의 넓이를 A_k라 하자. $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$



양 끝에 있는 두 직사각형의 넓이의 합이

$$A_1+A_n=\frac{7n^2+1}{n^3}$$

일 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8k}{n}A_k$의 값을 구하시오.

5. $x=-3$과 $x=a\,(a>-3)$에서 극값을 갖는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-3) \\ \displaystyle\int_0^x |f'(t)|\,dt & (x\geq -3) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(-3)=-16$, $g(a)=-8$
(나) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
(다) 함수 $g(x)$는 극솟값을 갖는다.

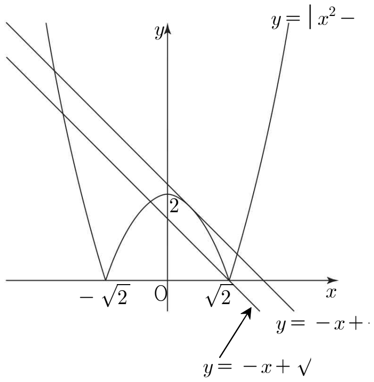
$\left|\displaystyle\int_a^4 \{f(x)+g(x)\}dx\right|$의 값을 구하시오.

정답 및 해설 [수학 Ⅱ]

1) [정답] ①

[출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기

주어진 방정식 $|x^2-2|=-x+k$가 서로 다른 세 실근을 갖는 경우를 두 함수 $y=|x^2-2|$, $y=-x+k$의 그래프를 이용하여 나타내면 그림과 같다.



(ⅰ) $y=-x+k$의 그래프가 $(\sqrt{2},0)$을 지날 때

$0=-\sqrt{2}+k$

$\therefore\ k=\sqrt{2}$

(ⅱ) 두 함수 $y=-x^2+2$, $y=-x+k$의 그래프가 접할 때

$-x^2+2=-x+k$

$x^2-x+k-2=0$에서 $D=1-4k+8=0$

$\therefore\ k=\frac{9}{4}$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 $\sqrt{2}\times\frac{9}{4}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$

2) [정답] ①

(나)에서 $f_1{}'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f_1(x)+2kx}{f_1(x)+kx}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f_1(x)}{x}+2k}{\frac{f_1(x)}{x}+k}$

$f_1{}'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}$ 이므로

$f'_1(0)=\frac{f'_1(0)+2k}{f'_1(0)+k}$

$f'_1(0)=a$(a는 실수) 라 하면

$a=\frac{a+2k}{a+k}$, $a+2k=a^2+ak$ --㉠

같은 방법으로 $f'_2(0)=b$라 하면

$b=\frac{b+2k}{b+k}$, $b+2k=b^2+bk$ --㉡

㉠ - ㉡에서

$a-b=(a-b)(a+b+k)$

(다)에서 $ab=-1$이므로 $a\neq b$

$\therefore\ a+b=1-k$ ------------ ㉢

또한

$ab=\frac{a+2k}{a+k}\cdot\frac{b+2k}{b+k}=-1$

$5k^2+3(a+b)k-2=0$

위의 식에 ㉢을 대입하여 정리하면

$2k^2+3k-2=(2k-1)(k+2)=0$

$k=\frac{1}{2},\ -2$

그런데 $k=-2$이면 a, b는 실수가 아니다. $\therefore\ k=\frac{1}{2}$

3) [정답] ⑤

$S_n=\log_2 a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n$

$T_n=\log_2 a_1\times\log_2 a_2\times\log_2 a_3\times\cdots\times\log_2 a_n$

$S_{n+1}-S_{n-1}=\log_2\frac{a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_n\times a_{n+1}}{a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{n-1}}=\log_2 a_n a_{n+1}$

$\frac{T_{n+1}}{T_{n-1}}=\frac{\log_2 a_1\times\log_2 a_2\times\log_2 a_3\times\cdots\times\log_2 a_n\times\log_2 a_{n+1}}{\log_2 a_1\times\log_2 a_2\times\log_2 a_3\times\cdots\times\log_2 a_{n-1}}$

$=\log_2 a_n\times\log_2 a_{n+1}$

$\log_2 a_{n+1}=p$, $\log_2 a_n=q$라 하면

$(S_{n+1}-S_{n-1})^2=4\left(\frac{T_{n+1}}{T_{n-1}}+\frac{1}{4}\right)$ (단, $n\geq2$)에서

$(p+q)^2=4pq+1$

$(p-q)^2=1$

따라서 $\log_2 a_{n+1}-\log_2 a_n=\pm1$이고 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$ 또는 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$을 만족하면 되므로

$\sum_{k=1}^{5}a_{k+5}$이 최댓값이 되도록 하는 a_7, a_8, a_9의 값은

$8\times2,\ 16\times2,\ 32\times\frac{1}{2}$

즉 $a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=8+16+32+16+8=80$

4) 14

5) [정답] 80

모든 실수 t에 대해서 $|f'(t)|\geq0$이고,

$g(a)=\int_0^a|f'(t)|dt=-8<0$이므로 $a<0$

$x\geq-3$에서 $|f'(x)|\geq0$이므로

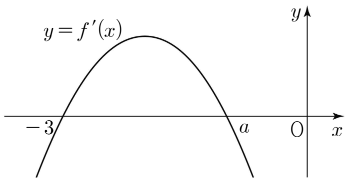
함수 $g(x)=\int_0^x|f'(t)|dt$는 증가한다.

삼차함수 $f(x)$는

$x=-3$과 $x=a$ $(a>-3)$에서 극값을 가지므로 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이면 $x<-3$에서 $f(x)$는 증가한다.

이때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하므로 극솟값을 갖지 않는다.

따라서 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 음수이다.



(ⅰ) $x<-3$일 때, $g(x)=f(x)$

(ⅱ) $-3\le x<a$일 때,

$$g(x)=\int_0^a\{-f'(t)\}dt+\int_a^x f'(t)dt$$

$=f(x)+f(0)-2f(a)$

(ⅲ) $x\ge a$일 때,

$$g(x)=\int_0^x\{-f'(t)\}dt=-f(x)+f(0)$$

함수 $g(x)$는 $x=-3$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to-3-}g(x)=\lim\limits_{x\to-3-}f(x)=f(-3)$

$\lim\limits_{x\to-3+}g(x)=\lim\limits_{x\to-3+}\{f(x)+f(0)-2f(a)\}=f(-3)+f(0)-2f(a)$

$f(-3)=f(-3)+f(0)-2f(a)$

$f(0)=2f(a)$ …… ㉠

$g(a)=-f(a)+f(0)=-8$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $f(0)=-16$, $f(a)=-8$

$f'(x)=k(x+3)(x-a)$

$=k\{x^2+(3-a)x-3a\}$ $(k<0)$이라 하면

$f(x)=k\left(\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{3-a}{2}x^2-3ax\right)-16$

$g(-3)=f(-3)=\dfrac{9}{2}k(a+1)-16=-16$

$k\ne0$이므로 $a=-1$

$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x<-1)\\ -f(x)-16 & (x\ge-1)\end{cases}$$

$\displaystyle\int_a^4\{f(x)+g(x)\}dx$

$=\displaystyle\int_{-1}^4\{f(x)+(-f(x)-16)\}dx$

$=\displaystyle\int_{-1}^4(-16)\,dx=-16\times5=-80$

따라서 $\left|\displaystyle\int_a^4\{f(x)+g(x)\}dx\right|=80$

(참고)

$f(x)=-2x^3-12x^2-18x-16$

함수 $g(x)$의 그래프의 개형