제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. $2^{-1} \times 8^{\frac{5}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 8 ⑤ 16

2. $\lim_{x \to \infty} \frac{(2x+1)^2}{x^2+4x+5}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여

$$a_4 = 10, \quad \underline{a_7 - a_5 = 6}$$

$2d=6$
$d=3$

일 때, a_1 의 값은? [2점]

$10-3d=1$

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

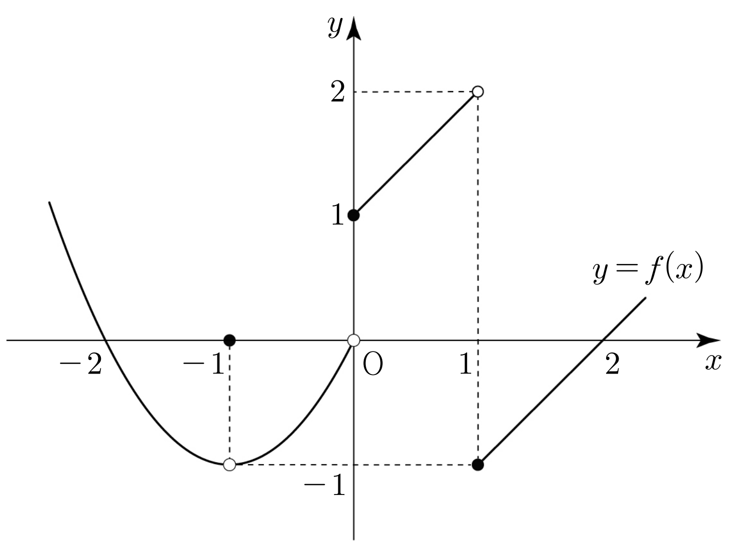
4. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 인 θ 에 대하여 $\sin\theta = -3\cos\theta$ 일 때, $\cos\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ② $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ ③ $-\frac{\sqrt{10}}{10}$
④ $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

$\tan\theta = -3$

$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{10}}$

5. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to-1} f(x)+\lim_{x\to1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$(-1)+2=1$

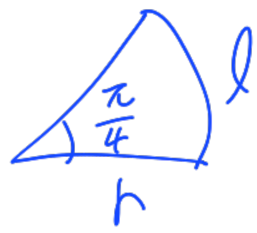
6. $\log_2 5\times\log_5 3+\log_2\frac{16}{3}$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\log_2 3+\log_2\frac{16}{3}=\log_2 16$

7. 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이고 넓이가 18π 인 부채꼴의 호의 길이는? [3점]

① 2π ② 3π ③ 4π ④ 5π ⑤ 6π



$\frac{1}{2}r^2\cdot\frac{\pi}{4}=18\pi,\ r^2=144$

$r=12$

$l=12\cdot\frac{\pi}{4}=3\pi$

8. $0 < x \leq 2\pi$일 때, 방정식

$$\cos^2 x - 1 = 2\sin x$$

의 모든 해의 합은? [3점]

① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$ ④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

$1-s^2-1=2s$

$s^2+2s=0$

$s(s+2)=0$

$s=0$ $x=\pi, 2\pi$

9. 집합 $\{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$에서 정의된 함수

$$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+m)$$

이 최댓값 -2를 가질 때, 상수 m의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$(-3,-2) \rightarrow -2=\log_{\frac{1}{3}}(-3+m)$

$-3+m=9$

$m=12$

10. 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_2 = 2, \quad S_6 = 9S_3$$

일 때, a_4의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$S_3=A$ $\frac{S_6}{S_3}=1+r^3=9$

$r=2$

$a_4=a_2\times r^2=2\times4=8$

11. x에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} 4^x - 2^x - 2 < 0 \\ \log_a x + 1 > 0 \end{cases}$$

을 만족시키는 모든 x의 값의 범위가 $\frac{1}{5} < x < b$일 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? (단, $a > 1$) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$(2^x-2)\cancel{(2^x+1)}<0$ $2^x<2$, $x<1$

$\log_a x > -1$, $x > \frac{1}{a}$

$(a>1)$

$\frac{1}{a}<x<1$

$a=5$

$b=1$

12. 함수 $f(x) = a\tan\frac{\pi}{4}x$에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $A(3, -2)$를 x축의 방향으로 6만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점을 A'이라 하자. 점 A'이 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$A(3,-2) \rightarrow -a=-2$, $a=2$

$A'(9, -2+b) \rightarrow a=-2+b$, $b=4$

13. 첫째항이 음수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_3a_5=8a_8,\quad a_1+|a_2|+|2a_3|=0$$

일 때, a_2의 값은? [3점]

① -1　② $-\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{2}$　④ 1　⑤ 2

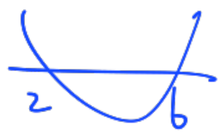
$a_4^2=8a_8$
$a_4=8r^4$
$a=8r$ $\left(\begin{matrix}a<0\\r<0\end{matrix}\right)$
$a_1+|a_2|+|2a_3| = a_1+a_2-2a_3=0$
$8r+8r^2-16r^3=0$
$1+r-2r^2=0$
$2r^2-r-1=0$
$(2r+1)(r-2)=0$　$r=-\frac{1}{2}$
$a=-4$
$a_2=ar=2$

14. $2 \le n \le 10$인 자연수 n에 대하여
n^2+1의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$,
$n^2-8n+12$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $g(n)$
이라 하자. $f(n)=2g(n)$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은? [4점]

$f(n)=2,\ g(n)=1$

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

$\square^n=n^2+1$　2 4 6 8
$☆^n=(n-2)(n-6)$　2, 6



$2+6=8$

15. 함수 $f(x)=4^{x-a}-8\times2^{x-a}$가 $x=5$에서 최솟값 b를 가질 때, $a+b$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① -13 ② -11 ③ -9 ④ -7 ⑤ -5

$2^{x-a}=t\ (t>0)$

$t^2-8t=(t-4)^2-16$

$t=4 \rightarrow -16=b$

$\Downarrow$

$2^{5-a}=4$

$a=3$

16. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는? [4점]

(가) $0<\log b-\log a<1$
(나) $2a+\log b<9$ $1\le a\le 4$

① 56 ② 58 ③ 60 ④ 62 ⑤ 64

$0<\log\frac{b}{a}<1$

$1<\frac{b}{a}<10$

$a<b<10a$

a	b	
1	2~9	8
2	3~19	17
3	4~29	26
4	5~9	5

56

17. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_{12}-a_{10}=5$
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $$\sum_{k=1}^{n}a_{2k}=\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}+n^2$$ 이다.

$a_9=16$일 때, a_{11}의 값은? [4점]

① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

$\sum_{k=1}^{n}(\underbrace{a_{2k}-a_{2k-1}}_{b_k})=n^2$

$b_n=n^2-(n-1)^2=2n-1 \quad (n\geq 2)$

$a_{2n}-a_{2n-1}=2n-1$

$a_{12}-a_{11}=11$

$-\ a_{10}-a_9=9$

$(a_{12}-a_{10})+a_9-a_{11}=2$

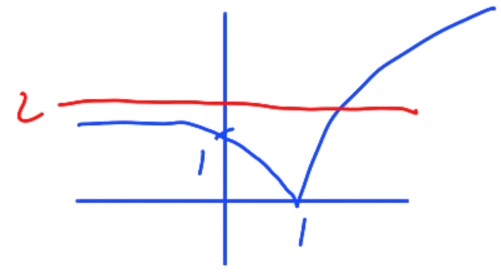
$5+16-a_{11}=2,\ a_{11}=19$

18. 함수

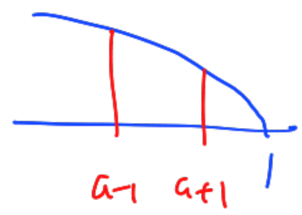
$$f(x)=\begin{cases}-2^x+2 & (x<1)\\ \log_2 x & (x\geq 1)\end{cases}$$

에 대하여 $a-1\leq x\leq a+1$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차가 1이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은? [4점]

① 3 ② $\log_2\frac{32}{3}$ ③ $\log_2\frac{40}{3}$ ④ 4 ⑤ $\log_2\frac{56}{3}$



i)

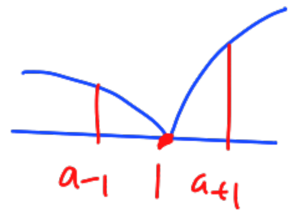


$(-2^{a-1}+2)-(-2^{a+1}+2)=1$

$2^{a-1}(3)=1,\ a-1=-\log_2 3$

$a=1-\log_2 3$

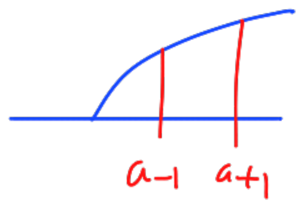
ii)



$-2^{a-1}+2=1$ or $\log_2(a+1)=1$

$a=1$ $a=1$

iii)



$\log_2(a+1)-\log_2(a-1)=1$

$\log_2\frac{a+1}{a-1}=1,\ a+1=2a-2$

$a=3$

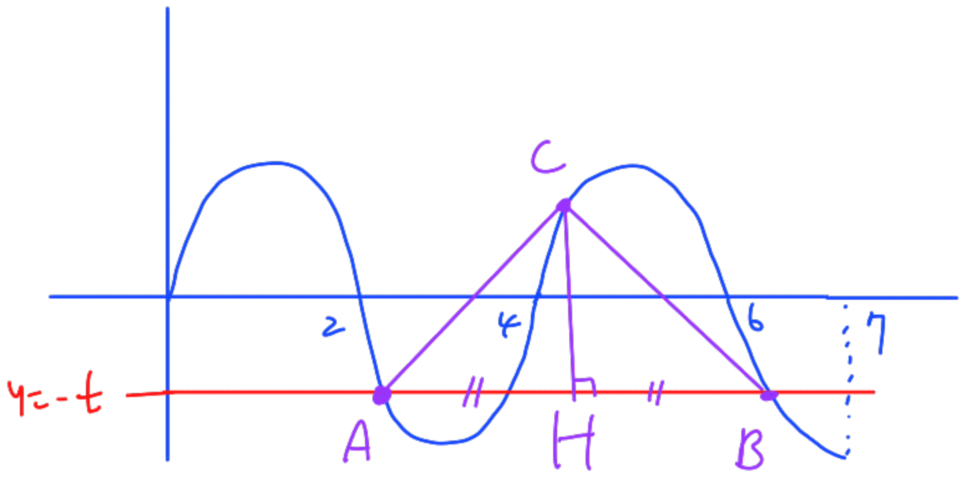
$\Rightarrow (1-\log_2 3)+1+3=5-\log_2 3=\log_2\frac{32}{3}$

19. 함수 $f(x)=3\sin\frac{\pi}{2}x\ (0 \le x \le 7)$ 과 실수 $t\ (0<t<3)$ 에 대하여 한 변의 길이가 4 인 정삼각형 ABC 의 세 꼭짓점 A, B, C 가 다음 조건을 만족시킬 때, t 의 값은? [4점]

주기 4

(가) 두 점 A, B 는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-t$ 가 만나는 점이다.
(나) 점 C 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이다.

① $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ $\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

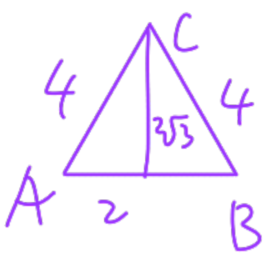


$\overline{AB}=4$, 주기 4 $A(\alpha,-t)$ $B(\alpha+4,-t)$

$\alpha \to 3\sin\frac{\pi}{2}\alpha=-t$ $C(\alpha+2, t)$

$\alpha+2 \to 3\sin\frac{\pi}{2}(\alpha+2)=-3\sin\frac{\pi}{2}\alpha=t$

$\overline{CH}=2t=2\sqrt{3}$ $t=\sqrt{3}$

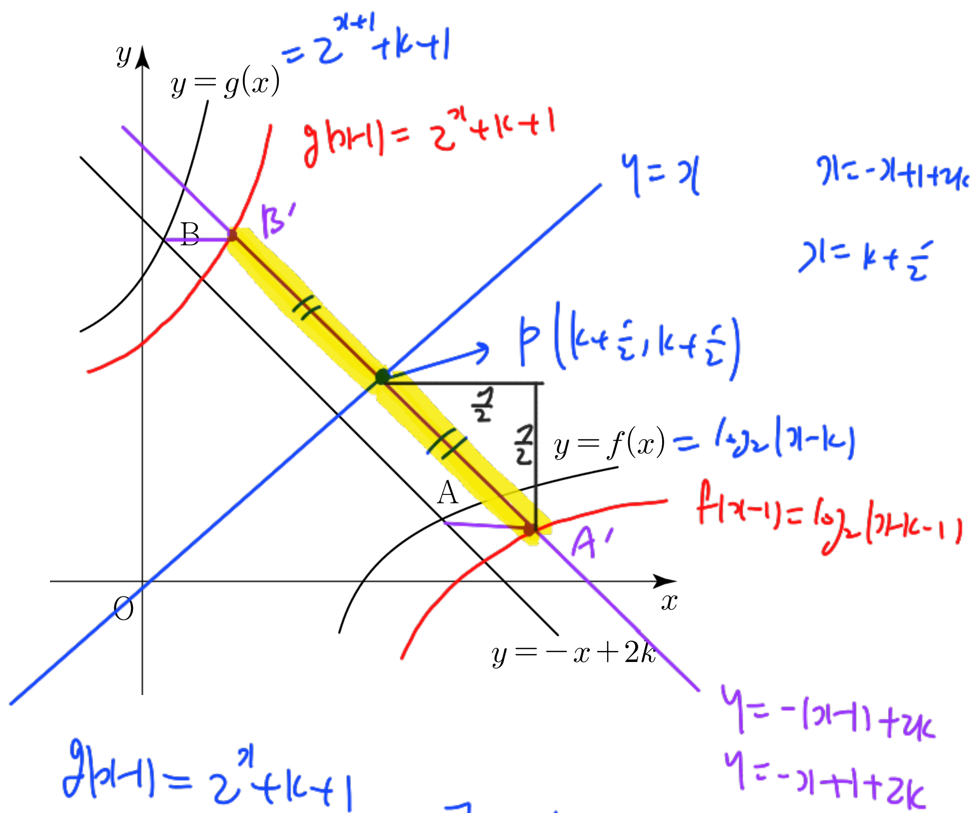


20. 상수 $k\ (k>3)$ 에 대하여 직선 $y=-x+2k$ 가 두 함수

$$f(x)=\log_2(x-k),\quad g(x)=2^{x+1}+k+1$$

의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B 라 하자. $\overline{AB}=7\sqrt{2}$ 일 때, k 의 값은? [4점]

① $\log_2 21$ ② $\log_2 22$ ③ $\log_2 23$ ④ $\log_2 24$ ⑤ $\log_2 25$



$g(x-1)=2^x+k+1$
$f(x-1)=\log_2(x-k-1)$] 역함수

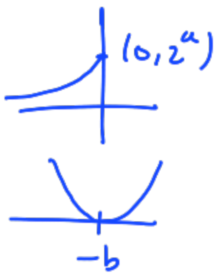
$AB=A'B'=7\sqrt{2}$ $A'(k+4, k-3)$

$y=\log_2(x-k-1)$ $k-3=\log_2 3$

$k=3+\log_2 3=\log_2 24$

21. 두 실수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+a} & (x \le 0) \\ (x+b)^2 & (x>0) \end{cases}$$

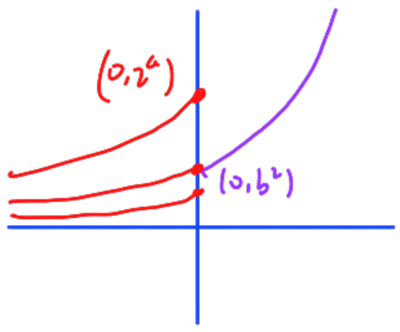


이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

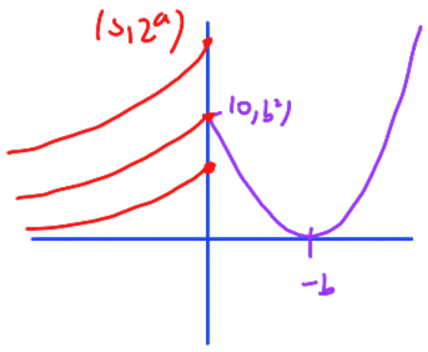
> $\lim_{t \to k-} g(t) \ne \lim_{t \to k+} g(t)$와 $\lim_{t \to 2k-} g(t) \ne \lim_{t \to 2k+} g(t)$를 모두 만족시키는 양수 k가 존재한다.

$\lim_{t \to 16-} g(t) \times \lim_{t \to 16+} g(t) = 2$가 되도록 하는 두 실수 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값과 최솟값의 곱은? [4점]

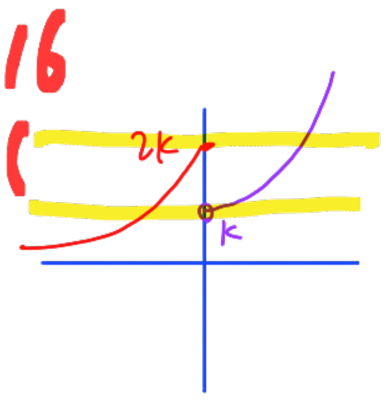
① -11 ② -10 ③ -9 ④ -8 ⑤ -7

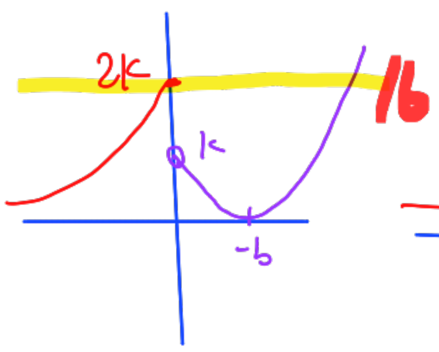


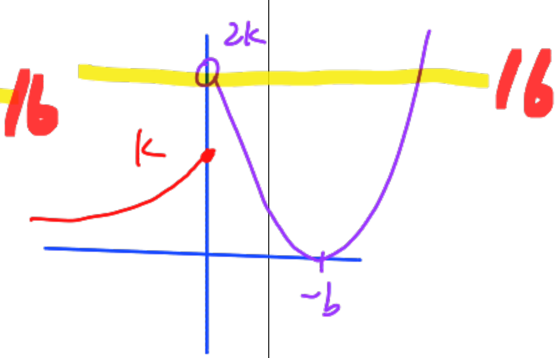
$-b \le 0$



$-b > 0$







$2k=2^a$
$k=b^2$
$16=2k$ or $16=k$

$k=8$, $a=4$, $b=2\sqrt{2}$, $a+b=4+2\sqrt{2}$

$k=16$, $a=5$, $b=4$, $a+b=9$

$2k=2^a$
$k=b^2$
$16=2k$

$k=8$, $a=4$, $b=-2\sqrt{2}$, $a+b=4-2\sqrt{2}$

$k=2^a$
$2k=b^2$
$16=2k$

$k=8$, $a=3$, $b=-4$, $a+b=-1$

$M=9$
$m=-1$
$Mm=-9$

단 답 형

22. 방정식 $3^{2x-1}=27$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$2x-1=3$
$x=2$
$\boxed{2}$

23. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3+a_5+a_7=18$일 때, a_4+a_6의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{12}$
$3a_5=18$
$a_5=6$
$a_4+a_6=2a_5=12$

24. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n = \begin{cases} n^2-1 & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ n^2+1 & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

$a_{2k-1} = (2k-1)^2-1 = 4k^2-4k$, $a_{2k} = (2k)^2+1 = 4k^2+1$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{385}$

$\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})$

$= \sum_{k=1}^{5}\left((4k^2-4k)+(4k^2+1)\right)$

$= \sum_{k=1}^{5}(8k^2-4k+1) = 8\cdot\frac{5\cdot6\cdot11}{6} - 4\cdot\frac{5\cdot6}{2} + 5$

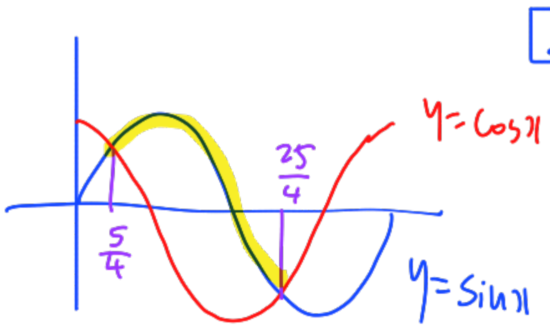
$= 440 - 60 + 5 = 385$

25. $0 < x \leq 10$일 때, 부등식

$$\cos\frac{\pi}{5}x < \sin\frac{\pi}{5}x$$

를 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

$\boxed{20}$



$\frac{5}{4} < x < \frac{25}{4}$ $2 \leq x \leq 6$

2 3 4 5 6 20

26. $10 < a < 100$인 실수 a에 대하여 수직선 위의 서로 다른 네 점 $\mathrm{P}(p)$, $\mathrm{Q}(q)$, $\mathrm{R}(r)$, $\mathrm{S}(s)$가 다음 조건을 만족시킨다.

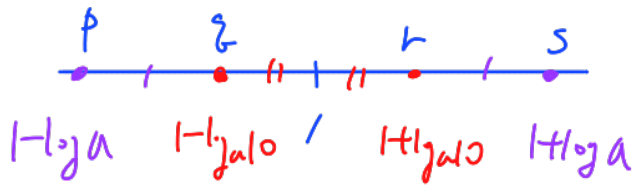
(가) $p < q < r < s$
(나) 두 집합
$A = \{p, q, r, s\}$,
$B = \left\{\log 10a, \log\frac{10}{a}, \log_a 10a, \log_a \frac{a}{10}\right\}$
에 대하여 $A = B$이다.

$\overline{\mathrm{PS}} = \frac{10}{3}$일 때, $30 \times \overline{\mathrm{QR}}$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{36}$

$\log 10a = 1+\log a$
$\log\frac{10}{a} = 1-\log a$
$\log_a 10a = 1+\log_a 10$
$\log_a\frac{a}{10} = 1-\log_a 10$

$10<a<100$
$1<\log a<2$
$\frac{1}{2}<\log_a 10<1$



$\overline{PS} = 2\log a = \frac{10}{3}$, $\log a = \frac{5}{3}$

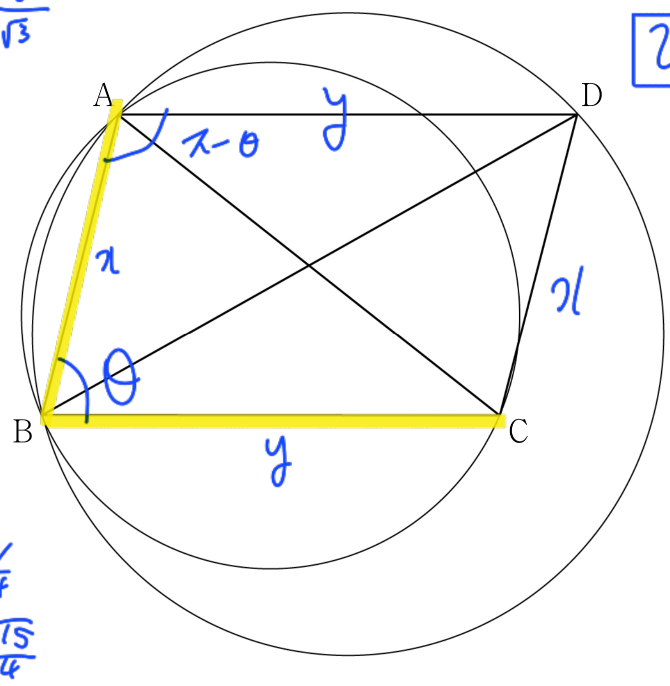
$\overline{QR} = 2\log_a 10 = 2\times\frac{3}{5} = \frac{6}{5}$

$30\times\overline{QR} = 36$

27. 그림과 같이 둘레의 길이가 20 이고 $\cos(\angle \mathrm{ABC})=\frac{1}{4}$ 인 평행사변형 ABCD 가 있다. 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 $\frac{32}{3}\pi$ 일 때, 삼각형 ABD 의 외접원의 넓이는 $\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, $\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{AD}}$ 이고, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

$R_1=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\boxed{271}$



$\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$

$x+y=10$, $AC=2R\sin\theta=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=2\sqrt{10}$

$AC^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta$

$40=x^2+y^2-\frac{1}{2}xy=(x+y)^2-\frac{5}{2}xy=100-\frac{5}{2}xy$

$\therefore xy=24$, $x+y=10$ → $x=4$, $y=6$

$\triangle ABD$, $BD^2=16+36-2\cdot4\cdot6(-\frac{1}{4})$

$=52+12=64$, $BD=8$

$\frac{BD}{\sin(\pi-\theta)}=2R_2=8\times\frac{4}{\sqrt{15}}$

$R_2=\frac{16}{\sqrt{15}}$, $\pi R_2^2=\frac{256}{15}\pi=\frac{q}{p}\pi$

$p+q=271$

28. 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$\lim_{x\to0-}\frac{|x|-f(x)}{x+f(x)}=\lim_{x\to0-}\frac{-(x+f(x))}{x+f(x)}=-1$

(가) $\boxed{\lim_{x\to0-}\frac{\sqrt{x^2}-f(x)}{x+f(x)}}\times\lim_{x\to0+}\frac{\sqrt{x^2}-f(x)}{x+f(x)}=-2$ $=2$

(나) $\lim_{x\to a}\frac{f(x-4)f(x+1)}{\sqrt{x^2}-3}$ 의 값이 존재하지 않는 실수 a 의 개수는 1 이다.

$f(24)$ 의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{40}$

$\lim_{x\to0+}\frac{x-f(x)}{x+f(x)}=2$

$f(0)\neq0$ → $\lim_{x\to0+}\frac{x-f(x)}{x+f(x)}=-1\neq2$ $\therefore f(0)=0$

$f(x)=x(px-b)$ (가) $\lim_{x\to0+}\frac{1-px+b}{1+px-b}=\frac{1+b}{1-b}=2$, $b=\frac{1}{3}$

$f(x)=x(px-\frac{1}{3})$

(나) $\lim_{x\to a}\frac{f(x-4)f(x+1)}{|x|-3}$ 존재X 후보 $a=3$, $a=-3$

$f(-1)f(4)=0$ or $f(-7)f(-2)=0$

$-p-\frac{1}{3}=0$ or $4p-\frac{1}{3}=0$ | $-7p-\frac{1}{3}=0$ or $-2p-\frac{1}{3}=0$

$p=-\frac{1}{3}$ or $p=\frac{1}{12}$ | $p=-\frac{1}{21}$ or $p=-\frac{1}{6}$

$\therefore p=\frac{1}{12}$ ($\because p>0$)

$f(x)=x(\frac{1}{12}x-\frac{1}{3})$, $f(24)=24(2-\frac{1}{3})$

$=48-8=40$

29. 자연수 p와 실수 q $(q \geq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x) = |p\sin x - q|$$

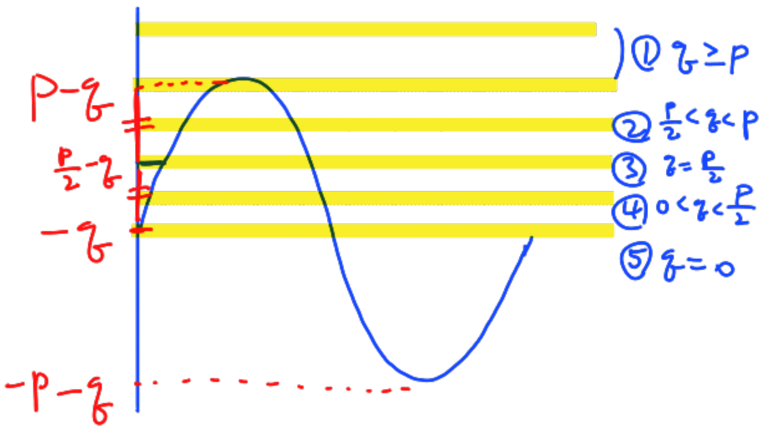
이다. $f(a)=q$인 서로 다른 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 수열 $\{a_n\}$과 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 세 항 a_1, a_4, a_7은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
> (나) 함수 $f(x)$의 최댓값은 15이다.

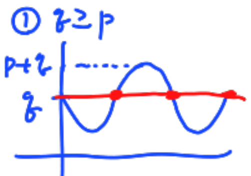
두 수 p, q의 모든 순서쌍 (p, q)의 개수를 구하시오. [4점]

$q \geq 0$

$\boxed{11}$

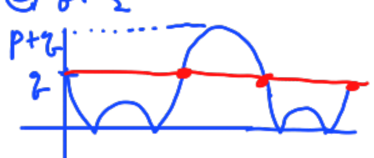


① $q \geq p$



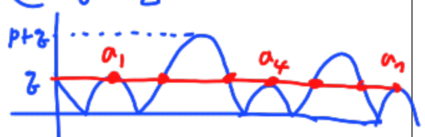
$p+q=15$
등차 ok
q p
14 1
13 2
⋮
8 7
7개

② $q > \frac{p}{2}$



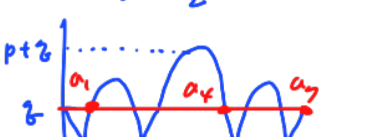
$p+q=15$
등차 ok
$\frac{p}{2}<q<p$
$\frac{p}{2}<15-p<p$
$\frac{15}{2}<p<10$
p q
8 7
9 6
2개

③ $q=\frac{p}{2}$



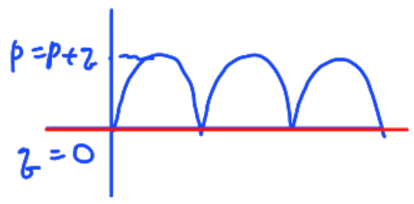
$q=10$ $p=5$
a_1, a_4, a_7 등차 ok
1개

④ $0<q<\frac{p}{2}$



a_1, a_4, a_7 등차 X

⑤ $q=0$



$p=15$
$q=0$
등차 ok
1개

$\Rightarrow 7+2+1+1=11$

30. 첫째항이 정수인 수열 $\{a_n\}$이 두 정수 d, r에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

모든 항이 정수

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + d & (a_n \geq 0) \\ r a_n & (a_n < 0) \end{cases}$$
> 이다.
> (나) $a_k = a_{k+12} = 0$인 자연수 k가 존재한다.

$a_2 + a_3 = 0$, $a_5 = 16$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합을 구하시오. [4점] $\boxed{28}$

if) $d>0 \to a_k=0 \to a_{k+12}>0$ (X)

$d=0 \to a_5=16 \to a_n=16$ $(n \geq 5)$ (나)만족(X) $\therefore d<0$

$a_2=\alpha, a_3=-\alpha$, $\alpha=0 \to a_2=0, a_3=d \neq -\alpha$ (X)

i) $\alpha<0 \to$ a_2: α, a_3: $r\alpha=-\alpha$, $r=-1$, a_4: $-\alpha+d$, a_5:
- $-\alpha+2d=16$ $(\alpha \leq d<0)$, $d=8+\frac{\alpha}{2}$; α d: -18 -1, -20 -2, -22 -3, ⋮ ; $a_4<0 \to a_5>0$ (X) $\therefore a_4 \geq 0$, $a_4+d=\alpha$ (만족 X)
- $d-\alpha=16$ $(d<\alpha<0)$; α d: -1 -17, -2 -18, -3 -19, ⋮ ; $a_5=16$, $a_6=16+d$, $a_7=-16-d$, $a_8=-16$, $a_9=16$, ⋮ (나)만족 X

ii) $\alpha>0 \to$ a_2: α, a_3: $\alpha+d=-\alpha$, $d=-2\alpha$, a_4: $-r\alpha$, a_5:
- $-r^2\alpha$ $(r>0)$: $\underset{\ominus}{-r^2\alpha}=\underset{\oplus}{16}$ (X)
- $-r\alpha+d$ $(r \leq 0)$: $-r\alpha-2\alpha=16$, $\alpha(r+2)=-16$

$\alpha>0, r \leq 0$
$\alpha(r+2)=-16$

α	r	d	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	
16	-3	-32	16	-16	48	16	(X)	
8	-4	-16	16	0	-16	64	48 32 16 0	6주기 (O)
4	-6	-8	16	8	0	-8	48 40 32 24 16 8 0	8주기 (X)
2	-10	-4	16	12	8	4	0 -4 40 … 4 0	12주기 (O)
1	-18	-2	16	14	12	…	0 -2 36 34 … 2 0	20주기 (X)

$a_k=a_{k+12}$

$a_2=8 \to a_1=24, -2$
$a_2=2 \to a_1=6, \cancel{-\frac{1}{5}}$
$24+6-2=28$

> * 확인 사항
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.