

著 : 雀

sukita1729@gmail.com

1. 다음 극한의 값을 구하여라. [★★★★☆☆]

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x + 1729\pi)}{\ln(x + 2023)}$$

2. 다음 극한의 값을 구하여라. [★★★★★★]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

3. 다음 극한의 값을 구하여라. [★★★★★]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) \sin\left(\frac{2\pi}{2n}\right) \cdots \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{2n}\right)}$$

4. 다음 극한의 수렴 여부를 논하고, 수렴하는 경우 극한의 값을 구하여라. [★★★★☆]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n} \right)$$

5. 다음 제시문을 활용하여 주어진 극한의 값을 구하여라. (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

[★★☆☆☆]

구간에서 연속인 모든 함수는 그 구간에서 적분가능하다. 하지만 구간에서 불연속점이 존재하는 경우에도 불연속점을 기준으로 적분 구간을 나누어 정적분을 수행할 수 있는 경우가 있다.

예를 들어, $\int_{3.5}^5 [x] dx$ 에서 피적분함수는 $x = 4$ 에서 불연속이므로 이를 $\int_{3.5}^4 [x] dx + \int_4^5 [x] dx$ 로 나누어 계산할 수 있다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \int_0^{n^2} [\sqrt{x}] dx$$

6. $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$, $b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1}}$ 일 때, 극한

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ 의 수렴 또는 발산 여부를 판단하고,

수렴하는 경우 극한의 값을 구하시오.

[★★★★☆]

7. 다음 급수의 수렴과 발산을 판정하고, 그 근거를 논술하시오. [★★★★★]

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln n)}$$

8. 다음 중 함수 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin x)^n$ 에 대한 설명으로 옳은 것만을 있는 대로 고르시오. [★★☆☆☆]

- ㄱ. $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여 정의된다.
- ㄴ. f 는 정의역에서 연속이다.
- ㄷ. f 는 연속인 모든 점에서 미분가능하다.

9. 다음 급수의 합이 수렴함을 보이고, 그 합이 $\frac{3}{2}$

이하임을 증명하시오. [★★★★☆]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$$

10. 양의 실수들의 수열 $\{x_n\}$ 과 자연수 n 에 대하여

$$(x_{n+1} - x_n)(x_{n+1}x_n - 1) \leq 0 \text{ 이고 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$$

일 때, 수열 $\{x_n\}$ 이 수렴함을 증명하시오.

[★★★★★]

11. 다음 급수의 합을 구하여라. [★★★★★]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} \sec^2\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

12. $\int_0^1 \frac{x^{4n}}{1+x^2} dx$ 를 이용하여 다음 급수의 합을 구하여라. [★★★★★]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

13. (보너스 문제) 다음 물음에 답하십시오. (단, 문제의 함수들은 모두 미분가능한 연속함수이다.)

- (1) 기함수의 도함수는 우함수이고, 우함수의 도함수는 기함수임을 증명하십시오.
- (2) 기함수의 부정적분은 우함수인가? 참인 경우 증명을, 거짓인 경우 반례를 제시하십시오.
- (3) 우함수의 부정적분은 기함수인가? 참인 경우 증명을, 거짓인 경우 반례를 제시하십시오.

14. (보너스 문제) 10000^{9999} 과 9999^{10000} 의 대소를 비교하십시오.