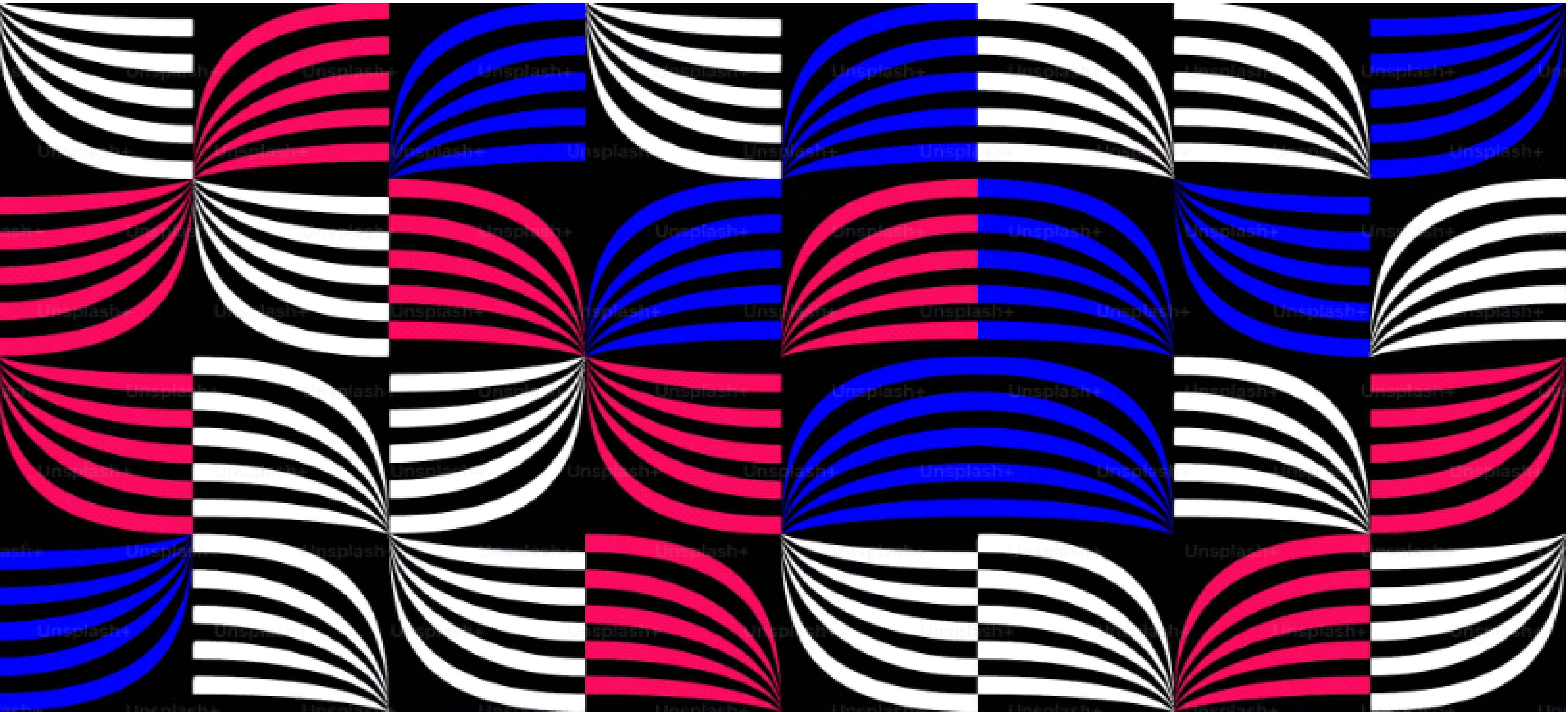
2025 규토 N제 시리즈 보충프린트 - 20일의 기적

이것만은 제발

ver. 2025 수능대비 확률과 통계 해설지



2025 수능대비 이것만은 제발 ver.확률과 통계 빠른 정답

1. 경우의 수

Theme 1 원순열
1. ③
2. ④
3. ①
4. ①
5. 36
6. 48

Theme 2 중복순열
7. ③
8. ②
9. ⑤
10. ③

Theme 3 같은 것이 있는 순열
11. ①
12. ①
13. 90
14. 33

Theme 4 최단 거리
15. ③
16. ④
17. 85

Theme 5 중복조합
18. ③
19. ①
20. 143
21. ④
22. 36
23. 120

Theme 6 순서쌍의 개수
24. ①
25. ③
26. 220
27. 48
28. 196

Theme 7 $(가)-\{(가)\cap(나)^c\}=(가)\cap(나)$
29. ⑤
30. 68
31. 32
32. 332

Theme 8 함수의 개수
33. ④
34. 115
35. 126

Theme 9 이항정리
36. ①
37. ②
38. ②
39. ③

2. 확률

Theme 10 수학적 확률-일일이 세기
40. ④
41. ②
42. ②
43. 11

Theme 11 수학적 확률-순열과 조합을 이용하여 세기

44. ③

45. ③

46. ④

Theme 12 확률의 덧셈정리-확률로 확률 계산

47. ③

48. ④

49. ②

Theme 13 확률의 덧셈정리의 활용

50. ③

51. ③

52. ④

Theme 14 여사건의 확률의 활용

53. ⑤

54. ⑤

55. ⑤

56. 89

57. ④

Theme 15 조건부확률–확률로 확률 계산

58. ④

Theme 16 조건부확률–표가 주어진 경우

59. ②

60. ①

Theme 17 조건부확률–표가 주어지지 않은 경우

61. ②

Theme 18 조건부확률의 활용

62. ③

63. ④

64. ①

65. ④

66. 28

67. ⑤

68. ①

Theme 19 확률의 곱셈정리

69. ⑤

70. ①

71. 131

Theme 20 사건의 독립과 종속-확률로 확률 계산

72. ④

73. ②

Theme 21 독립사건의 활용

74. 8

Theme 22 독립시행의 확률

75. ①

76. 137

77. ①

78. ④

79. 62

Theme 23 독립시행의 확률과 조건부확률

80. ①

81. ③

82. ④

3. 통계

Theme 24 이산확률변수의 확률분포

83. ②

84. ④

Theme 25 이산확률변수의 평균과 분산

85. 5

86. ⑤

87. ①

88. 40

89. 121

90. 78

91. 28

92. 41

Theme 26 이항분포의 뜻

93. 50
94. ①
95. ④
96. ③

Theme 27 이항분포의 활용

97. 48
98. ③

Theme 28 확률밀도함수

99. ④
100. ④
101. 31
102. 10

Theme 29 정규분포와 표준정규분포

103. ⑤
104. ③
105. 95
106. 69
107. 673

Theme 30 이항분포와 정규분포

108. ①
109. ③
110. 994

Theme 31 표본평균의 뜻과 평균, 분산, 표준편차

111. ①
112. ②
113. ④
114. ④
115. ⑤

Theme 32 표본평균의 분포

116. ⑤
117. ③
118. ⑤
119. ⑤
120. ①

Theme 33 모평균의 추정

121. ②
122. ②
123. ②
124. 45
125. 12
126. 25

2025 수능대비 이것만은 제발 ver.확률과 통계 해설지

1. 경우의 수

Theme 1 원순열

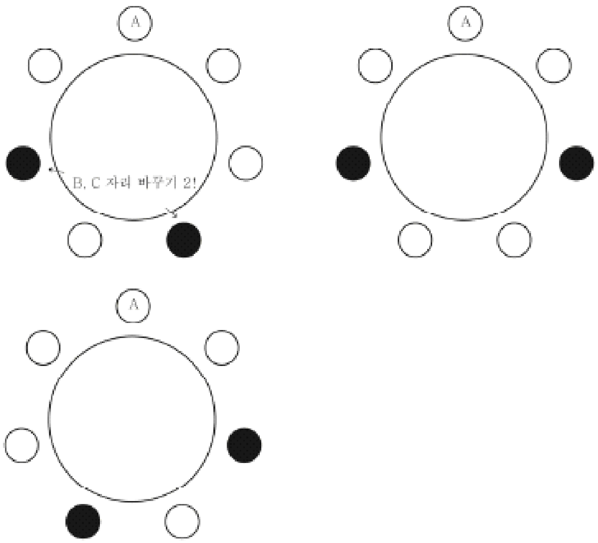
1. ③

060

A 고정시키기 1가지

B, C 앉을 자리 선택 3가지

B, C 자리 바꾸기 $2!$가지



나머지 4명 배열 $4!=24$이다.

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $3\times 2\times 24=144$이다.

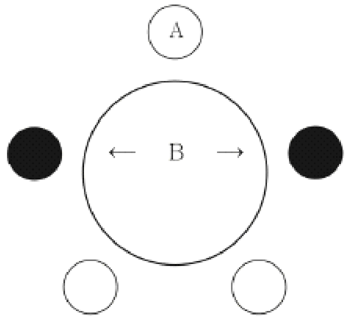
답 ③

2. ④

065

8명의 학생 중 A, B를 제외한 나머지

6명중 3명 선택 ${}_6C_3=20$가지



${}_6C_3$(6명중 3명 선택)$\times 1$(A 고정시키기)$\times 2$(B 자리선택)

$\times 3!$(나머지 3자리 배열)

$\therefore\ 20\times 12=240$

답 ④

3. ①

27. 출제의도 : 원순열을 이해하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열하는 원순열의 수는
$(6-1)!=120$
이때 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 11이 되려면 5와 6이 적힌 의자가 서로 이웃해야 한다.
따라서 5와 6이 적힌 의자를 묶어서 하나의 의자로 생각하여 모두 5개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열하는 원순열의 수는
$(5-1)!=24$
이때 5와 6이 적힌 의자의 위치를 서로 바꾸는 경우의 수는 2이므로 5와 6이 적힌 의자가 서로 이웃하도록 배열하는 경우의 수는
$24\times2=48$
따라서 구하는 경우의 수는
$120-48=72$

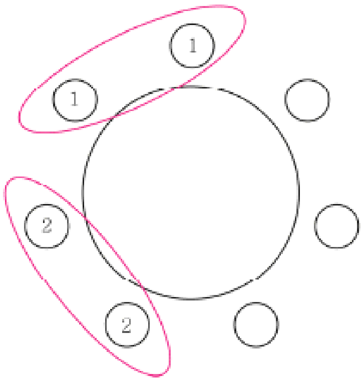
정답 ①

4. ①

070

1학년 2명 $(1_a,\ 1_b)$
2학년 2명 $(2_a,\ 2_b)$
3학년 3명 $(3_a,\ 3_b,\ 3_c)$

1학년끼리 한 묶음, 2학년끼리 한 묶음으로 보자.
$(1_a,\ 1_b),\ (2_a,\ 2_b),\ 3_a,\ 3_b,\ 3_c$



$4!$(원순열 배열) $\times$ $2!$(1학년 자리 바꾸기)

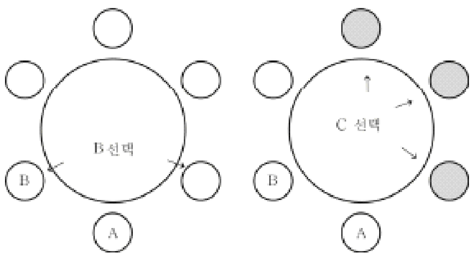
$\times$ $2!$(2학년 자리 바꾸기)
$\therefore\ 24\times2\times2=96$

답 ①

5. 36

086

(가) A와 B는 이웃한다.
(나) B와 C는 이웃하지 않는다.



1(A고정시키기) $\times$ ${}_2C_1$(B자리 선택) $\times$ ${}_3C_1$(C자리 선택)
$\times$ $3!$(나머지 배열)
$\therefore\ 1\times2\times3\times6=36$

답 36

6. 48

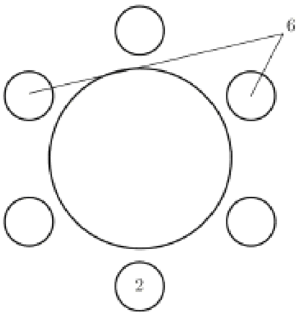
090

서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 하려면 2, 6 / 3, 4 가 이웃하지 않아야 한다.

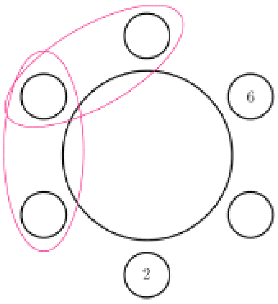
2를 고정시켜서 판단해보자.

2를 고정시키는 경우의 수 1가지

① 2와 6이 마주 보지 않을 때



6이 들어갈 자리 선택 ${}_2C_1=2$
한 곳에 들어갔다고 가정하자.



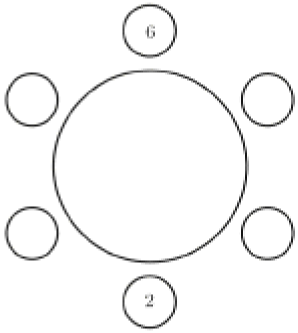
나머지 4자리 배열하는 경우의 수에서
3, 4가 이웃하는 경우의 수를 빼면 된다.

나머지 4자리 배열 $4!=24$

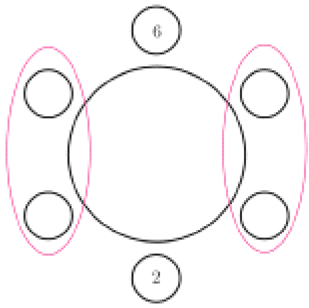
3, 4가 이웃하도록 묶을 수 있는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$
3, 4 자리 바꾸기 $2!$
나머지 1, 5 자리 바꾸기 $2!$
이므로 3, 4가 이웃하는 경우의 수는 $2\times2\times2=8$이다.

$\therefore\ 2\times(24-8)=32$

② 2와 6이 마주 볼 때



6이 들어갈 자리 선택 1가지



나머지 4자리 배열하는 경우의 수에서
3, 4가 이웃하는 경우의 수를 빼면 된다.

나머지 4자리 배열 $4!=24$

3, 4가 이웃하도록 묶을 수 있는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$
3, 4 자리 바꾸기 $2!$
나머지 1, 5 자리 바꾸기 $2!$
이므로 3, 4가 이웃하는 경우의 수는 $2\times2\times2=8$이다.

$\therefore\ 1\times(24-8)=16$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $1\times(32+16)=48$이다.

답 48

Theme 2 중복순열

7. ③

054 | 2017학년도 수능 가형

숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 네 개를 택해 일렬로 나열하여 만든 네 자리의 자연수가 5의 배수인 경우의 수는? [3점]

① 115 ② 120 ③ 125 ④ 130 ⑤ 135

8. ②

062

천의 자리수 2가지 (4, 5 선택)
백의 자리수 5가지 (1, 2, 3, 4, 5 선택)
십의 자리수 5가지 (1, 2, 3, 4, 5 선택)
일의 자리수 3가지 (1, 3, 5 선택)

$\therefore\ 2\times5\times5\times3=150$

답 ②

9. ⑤

111

서로 다른 5개의 과일 a, b, c, d, e 중 A에 담을 과일 2개 선택 ${}_5C_2=10$가지
a, b가 선택되었다고 가정하자.

남은 과일 c, d, e에게 물어본다.
그릇 B, C 중 어디갈래? 각각 2가지
$2^3=8$가지

Tip 서로 다른 과일을 서로 다른 그릇에 담기 (단, 빈 그릇이 있을 수 있음)이므로 중복순열!

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $10\times8=80$이다.

답 ⑤

10. ③

074

양 끝에 들어갈 문자를 선택하는 경우의 수 2^2
a가 들어갈 자리 1개 선택하는 경우의 수 ${}_4C_1$
나머지 3자리에 들어갈 문자를 선택하는 경우의 수 3^3

따라서 구하고자 하는 경우의 수는
$2^2\times{}_4C_1\times3^3=4\times4\times27=432$이다.

답 ③

Theme 3 같은 것이 있는 순열

11. ①

055

양 끝에 흰 색 깃발을 고정시키면
$bbbbbwww$ 을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같다.

$\therefore\ \dfrac{8!}{5!3!}=56$

답 ①

12. ①

077

현수막 A는 1개, B는 4개, C는 2개가 있다.
(나) 조건에 의해 B는 2곳 이상 설치해야 하므로
B를 설치하는 개수에 따라 case분류하면

① B 2개 설치하는 경우
ABBCC $\Rightarrow \dfrac{5!}{2!2!}=30$

② B 3개 설치하는 경우
ABBBC $\Rightarrow \dfrac{5!}{3!}=20$

③ B 4개 설치하는 경우
ABBBB $\Rightarrow \dfrac{5!}{4!}=5$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $30+20+5=55$이다.

답 ①

13. 90

082

순서가 정해져 있으므로
국어 A, B를 같은 문자 x
수학 A, B를 같은 문자 y
영어 A, B를 같은 문자 z라 두면
구하는 경우의 수는 $xxyyzz$를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같다.

$\therefore \dfrac{6!}{2!2!2!}=90$

답 90

14. 33

103

① $a\ a\ \square\ \square$

i) $a\ a\ b\ c \Rightarrow \dfrac{4!}{2!}=12$가지

ii) $a\ a\ b\ b \Rightarrow \dfrac{4!}{2!2!}=6$가지

iii) $a\ a\ c\ c \Rightarrow \dfrac{4!}{2!2!}=6$가지

$\therefore\ 12+6+6=24$

② $a\ a\ a\ \square$

$\square$에 들어갈 문자 선택 ${}_2\mathrm{C}_1=2$가지 (b, c중 하나 선택)
b가 선택되었다고 가정하면

$a\ a\ a\ b \Rightarrow \dfrac{4!}{3!}=4$가지

$\therefore\ 2\times4=8$

③ $a\ a\ a\ a$
1가지

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $24+8+1=33$이다.

답 33

Theme 4 최단 거리

15. ③

24. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열을 이용하여 도로망에서 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
A지점에서 P지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!\times1!}=4$

P지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\dfrac{2!}{1!\times1!}=2$

따라서 구하는 경우의 수는
$4\times2=8$

정답 ③

16. ④

056

가운데 경유지점을 C라 하면

A지점에서 C지점까지 최단거리 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$가지

C지점에서 B지점까지 최단거리 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$가지

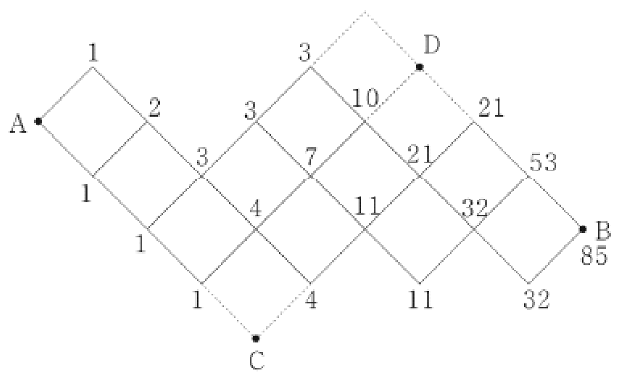
$\therefore\ 6\times6=36$

답 ④

17. 85

026

합의 법칙으로 직접 세면서 구해보자.



답 85

Theme 5 중복조합

18. ③

075

빨간색 카드 4장, 파란색 카드 2장, 노란색 카드 1장

노란색 카드를 받을 학생을 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

파란색 카드 2장 중 1장을 노란색 카드를 받은 학생에게 주고, 나머지 파란색 카드 1장 받을 학생을 선택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1$

빨간색 카드 4장 중 1장을 노란색 카드를 받을 학생에게 주고, 나머지 빨간색 카드 3장을 세 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $3\times3\times10=90$이다.

답 ③

19. ①

068

(단, 1병도 받지 못하는 사람이 있을 수 있다.)

① 같은 종류의 주스 4병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수

$\therefore\ x+y+z=4 \Rightarrow {}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

② 같은 종류의 생수 2병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수

$\therefore\ x+y+z=2 \Rightarrow {}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

③ 같은 종류의 우유 1병을 3명에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수

$\therefore\ x+y+z=1 \Rightarrow {}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $15\times6\times3=270$이다.

답 ①

20. 143

030

a의 차수가 9의 약수이므로 1, 3, 9

a의 차수에 따라 case분류하면

① a의 차수가 1일 때

$b,\ c,\ d$의 차수를 각각 $B,\ C,\ D$라 하면

$B\ge0,\ C\ge0,\ D\ge3$

$B+C+D=14$

$D=D'+3$라 하면

$B\ge0,\ C\ge0,\ D'\ge0$

$B+C+D'+3=14 \Rightarrow B+C+D'=11$

$\therefore\ {}_3\mathrm{H}_{11}={}_{3+11-1}\mathrm{C}_{11}={}_{13}\mathrm{C}_2=78$

② a의 차수가 3일 때

$b,\ c,\ d$의 차수를 각각 $B,\ C,\ D$라 하면

$B\ge0,\ C\ge0,\ D\ge3$

$B+C+D=12$

$D=D'+3$라 하면

$B\ge0,\ C\ge0,\ D'\ge0$

$B+C+D'+3=12 \Rightarrow B+C+D'=9$

$\therefore\ {}_3\mathrm{H}_9={}_{3+9-1}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=55$

③ a의 차수가 9일 때

$b,\ c,\ d$의 차수를 각각 $B,\ C,\ D$라 하면

$B\ge0,\ C\ge0,\ D\ge3$

$B+C+D=6$

$D=D'+3$라 하면

$B \geq 0,\ C \geq 0,\ D' \geq 0$

$B+C+D'+3=6 \Rightarrow B+C+D'=3$

$\therefore\ {}_3H_3 = {}_{3+3-1}C_3 = {}_5C_3 = 10$

따라서 서로 다른 항의 개수는 $78+55+10=143$이다.

답 143

21. ④

088

꺼내는 볼펜의 개수를 x
꺼내는 연필의 개수를 y
꺼내는 지우개의 개수를 z 라 하면
$0 \leq x \leq 6,\ 0 \leq y \leq 6,\ 0 \leq z \leq 6$
$x+y+z=8 \Rightarrow {}_3H_8 = {}_{10}C_2 = 45$

이때 범위에 포함되지 않는 다음과 같은 경우를 빼줘야 한다.
$(x,\ y,\ z)=(0,\ 1,\ 7) \Rightarrow 3!=6$가지
$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 8) \Rightarrow 3$가지

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $45-(6+3)=36$이다.

답 ④

22. 36

107

사과, 감, 배, 귤을 선택하는 개수를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$라 하자.

$a \leq 1,\ b \geq 1,\ c \geq 1,\ d \geq 1$
$a+b+c+d=8$

a의 값에 따라 case분류하면

① $a=1$
$b+c+d=7$

$b=b'+1,\ c=c'+1,\ d=d'+1$
$b' \geq 0,\ c' \geq 0,\ d' \geq 0$
$b'+c'+d'=4$
${}_3H_4 = {}_6C_2 = 15$

② $a=0$
$b+c+d=8$

$b=b'+1,\ c=c'+1,\ d=d'+1$
$b' \geq 0,\ c' \geq 0,\ d' \geq 0$
$b'+c'+d'=5$
${}_3H_5 = {}_7C_2 = 21$

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $15+21=36$이다.

답 36

23. 120

116

8개의 레인 번호 중 어느 두 번호도 연속되지 않도록 선택한 3개의 레인 번호를 각각 X, Y, $Z(X<Y<Z)$ 라 하자.

X보다 작은 레인 번호의 개수를 a
X보다 크고 Y보다 작은 레인 번호의 개수를 b
Y보다 크고 Z보다 작은 레인 번호의 개수를 c
Z보다 큰 레인 번호의 개수를 d라 하자.

$\boxed{a}\ X\ \boxed{b}\ Y\ \boxed{c}\ Z\ \boxed{d}$

$a \geq 0,\ b \geq 1,\ c \geq 1,\ d \geq 0$
(어느 두 번호도 연속되지 않아야 하므로 $b \geq 1,\ c \geq 1$)
$a+b+c+d=5$

$b=b'+1,\ c=c'+1$
$a \geq 0,\ b' \geq 0,\ c' \geq 0,\ d \geq 0$
$a+b'+c'+d=3 \Rightarrow {}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

세 명의 학생과 세 레인 X, Y, Z 매칭시키기 $3!=6$
따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $20\times6=120$이다.

답 120

Tip <그땐 그랬지>
116번은 2019년 고3 7월 교육청 27번 문항이었는데 그 당시 오답률 TOP4를 기록하였고 정답률이 무려 43% 였다.
대부분 답을 20이라고 써서 틀린 학생이 많았는데 이는 마지막에 3!를 곱해주지 않는 실수를 했기 때문이다.

처음에는 분명히 고려해야 한다는 생각이 들었다가 문제를 풀면서 까먹는 경우도 종종 발생하곤 한다.

따라서 처음부터 3!을 큼지막하게 적어놓고 시작하는 것도 실수를 줄이는 하나의 방법이다.

Theme 6 순서쌍의 개수

24. ①

072

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$는 자연수
$a+b+c+d+e=12$
$|a^2-b^2|=5 \Rightarrow |(a-b)(a+b)|=5$

$a+b>0$이므로 $a-b=1$ or $a-b=-1$에 따라 case분류하면

① $a-b=-1,\ a+b=5 \Rightarrow a=2,\ b=3$

$a+b+c+d+e=12$

$\Rightarrow c+d+e=7$

$c \geq 1,\ d \geq 1,\ e \geq 1$
$c=c'+1,\ d=d'+1,\ e=e'+1$

$c'+d'+e'=4 \Rightarrow {}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

② $a-b=1,\ a+b=5 \Rightarrow a=3,\ b=2$

①과 같은 구조이므로 15

따라서 구하고자 하는 경우의 수는 $15\times2=30$이다.

답 ①

25. ③

084

$|a|=A,\ |b|=B,\ |c|=C$라 하면
$1 \leq A \leq B \leq C \leq 5$
1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허락하여 3개를 뽑으면
${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$
(Training-1step에서 학습함)

예를 들어 1, 2, 3이 뽑혔다면
$|a|=1,\ |b|=2,\ |c|=3$이므로
$a=1$ or -1, $b=2$ or -2, $c=3$ or -3
각각 2가지씩 $2^3=8$가지

따라서 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $35\times8=280$이다.

답 ③

26. 220

106

(가) 조건에 의해서 a, b, c 모두 홀수

20 이하의 홀수 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 중 중복을 허용하여 3개를 뽑으면 (나) 조건에 의해서 뽑는 순간 a, b, c가 정해진다. (자동배열)

따라서 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 ${}_{10}\mathrm{H}_3 = {}_{12}\mathrm{C}_3 = 220$ 이다.

답 220

27. 48

046

$\dfrac{80}{x+y+z}$ 이 자연수가 되기 위해서는 $x+y+z$ 가 80 의 약수가 되어야하므로 $x+y+z$ 의 후보는 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40, 80 이다.

약수 개수가 4 개인 것은 8, 10 이므로 case분류하면

① $x+y+z=8$
$1 \le x,\ y,\ z \le 6 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x',\ y',\ z' \le 5$
$(x=x'+1,\ y=y'+1,\ z=z'+1)$
$x'+y'+z'=5$
$\therefore\ {}_3\mathrm{H}_5 = 21$

② $x+y+z=10$
$1 \le x,\ y,\ z \le 6 \quad \Rightarrow \quad 0 \le x',\ y',\ z' \le 5$
$(x=x'+1,\ y=y'+1,\ z=z'+1)$
$x'+y'+z'=7$

여기서 조심해야 한다.

위의 case처럼 모든 x', y', z' 가 다 가능하지 않고 아래 case는 전체에서 빼줘야 한다.
$(6,\ 1,\ 0) = 6$개 $(3!)$
$(7,\ 0,\ 0) = 3$개 $\left(\dfrac{3!}{2!}\right)$
$\therefore\ {}_3\mathrm{H}_7 - (6+3) = 27$

따라서 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z)$는 $21+27=48$이다.

답 48

Tip 주사위 눈의 수가 1 부터 6 인 것을 바탕으로 x, y, z 가 6 보다 큰 case를 제거하는 문제이다. 지난 문제들에서 다뤘듯이 숨겨진 제한조건을 물어보는 문제라고 볼 수 있다.

28. 196

126

① $a \le b \le c \le d$
1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 4개를 뽑으면 a, b, c, d는 자동으로 결정되므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 ${}_6\mathrm{H}_4 = {}_9\mathrm{C}_4 = 126$

② $b \le a \le c \le d$
①과 마찬가지로 ${}_6\mathrm{H}_4 = {}_9\mathrm{C}_4 = 126$

③ $a=b \le c \le d$
1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 3개를 뽑으면 a, b, c, d는 자동으로 결정되므로 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 ${}_6\mathrm{H}_3 = {}_8\mathrm{C}_3 = 56$

$a \le c \le d$이고 $b \le c \le d$를 만족시키는 6 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 (① + ② − ③)와 같다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 $126+126-56=196$이다.

답 196

Theme 7 (가) $-$ {(가) $\cap$ (나)^c} $=$ (가) $\cap$ (나)

29. ⑤

110

$a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$
(가) 조건에 의해서 $a+b+c=6 \Rightarrow {}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$

(가) $-$ {(가)$\cap$(나)^c} $=$ (가) $\cap$ (나)를 이용하여 구해보자.

(나)^c : 좌표평면에서 세 점 $(1,\ a)$, $(2,\ b)$, $(3,\ c)$
가 한 직선 위에 있는 경우

세 점 $(1,\ a)$, $(2,\ b)$, $(3,\ c)$가 한 직선 위에 있다면
두 점 $(1,\ a)$, $(2,\ b)$사이의 기울기와
두 점 $(2,\ b)$, $(3,\ c)$사이의 기울기가 같아야 하므로
$\frac{b-a}{2-1}=\frac{c-b}{3-2} \Rightarrow b-a=c-b \Rightarrow a+c=2b$

$a+b+c=6 \Rightarrow 3b=6 \Rightarrow b=2$ 이므로
$a+c=4 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$

$\therefore$ {(가)$\cap$(나)^c} : 5

따라서 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는
$28-5=23$이다.

답 ⑤

30. 68

112

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ u \geq 0$
(가) 조건에 의해서 $x+y+z+u=6 \Rightarrow {}_4\mathrm{H}_6={}_9\mathrm{C}_3=84$

(가) $-$ {(가)$\cap$(나)^c} $=$ (가) $\cap$ (나)를 이용하여 구해보자.

(나)^c : $x=u$
$x+y+z+u=6 \Rightarrow 2x+y+z=6$

① $x=0 \Rightarrow y+z=6 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_6={}_7\mathrm{C}_6=7$

② $x=1 \Rightarrow y+z=4 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$

③ $x=2 \Rightarrow y+z=2 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2=3$

④ $x=3 \Rightarrow y+z=0 \Rightarrow {}_2\mathrm{H}_0={}_1\mathrm{C}_0=1$

$\therefore$ {(가)$\cap$(나)^c} : $7+5+3+1=16$

따라서 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수는
$84-16=68$이다.

답 68

31. 32

117

$a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$
(가) 조건에 의해서 $a+b+c=7 \Rightarrow {}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$가지

(가) $-$ {(가)$\cap$(나)^c} $=$ (가) $\cap$ (나)를 이용하여 구해보자.
(나)^c : $2^a \times 4^b=2^{a+2b}$가 8의 배수 $\times$

2^{a+2b}가 8의 배수 $\times \Rightarrow\ a+2b<3$
$(a,\ b)$에 따라 case분류해 보자.

① $(0,\ 0) \Rightarrow c=7$

② $(0,\ 1) \Rightarrow c=6$

③ $(1,\ 0) \Rightarrow c=6$

④ $(2,\ 0) \Rightarrow c=5$

$\therefore$ $\{(가)\cap(나)^c\}$:4

따라서 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 $36-4=32$이다.

답 32

Tip <그땐 그랬지>
117번은 2017학년도 수능 가형에서 준킬러
역할을 톡톡히 했던 문제였다. (N수 유도 문항)

"(가) $-$ $\{(가)\cap(나)^c\}$ = (가) $\cap$ (나)"
을 떠올리지 못했다면 실전에서 굉장히
까다로운 문제였다.

32. 332

118

$a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0,\ d\geq 0$
(가) 조건에 의해서 $a+b+c+d=12 \Rightarrow {}_4\mathrm{H}_{12}={}_{15}\mathrm{C}_3=455$

(가) $-$ $\{(가)\cap(나)^c\}$ = (가) $\cap$ (나)를 이용하여 구해보자.
$a\neq 2$를 사건 A라 하고 $a+b+c\neq 10$을 사건 B라 하면
(나) 조건은 $A\cap B$라고 표현할 수 있으므로
(나)^c : $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$
A^c : $a=2$, B^c: $a+b+c=10$이므로
(나)^c : $a=2$ 또는 $a+b+c=10$

Tip $\cup$ = 또는, $\cap$ = 이고

$n(A^c\cup B^c)=n(A^c)+n(B^c)-n(A^c\cap B^c)$이므로

$a=2$ 또는 $a+b+c=10$은 다음과 같다.
$(a=2)+(a+b+c=10)-(a=2\ \cap\ a+b+c=10)$

① $a=2$
$b+c+d=10 \Rightarrow {}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$

② $a+b+c=10$
$a+b+c=10,\ d=2$
$\Rightarrow {}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$

③ $a=2\ \cap\ a+b+c=10$
$a=2,\ b+c=8,\ d=2$
$\Rightarrow {}_2\mathrm{H}_8={}_9\mathrm{C}_8=9$

$\therefore$ $\{(가)\cap(나)^c\}$: $66+66-9=123$

따라서 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$는 $455-123=332$이다.

답 332

Tip1 (나) 조건의 여사건을 구할 때 썼던
합집합의 원소의 개수 technique을 꼭 기억하자.

Tip2 <빈출 되는 구조>
(가) $-$ $\{(가)\cap(나)^c\}$ = (가) $\cap$ (나)

지난 문제들에서 정말 많이 접해보았다.

Theme 8 함수의 개수

33. ④

122

$f(1)<f(3),\ f(2)<f(3)$
$f(4)<f(5),\ f(4)<f(6)$
$f(3)+f(4)$는 5의 배수이므로 case분류하면 다음과 같다.

① $f(3)+f(4)=5$
$f(3)=1,\ f(4)=4 \Rightarrow$ 모순
$f(3)=4,\ f(4)=1 \Rightarrow 3^2\times 5^2=225$
$f(3)=2,\ f(4)=3 \Rightarrow 1\times 3^2=9$
$f(3)=3,\ f(4)=2 \Rightarrow 2^2\times 4^2=64$

$\therefore$ $225+9+64=298$

② $f(3)+f(4)=10$
$f(3)=4,\ f(4)=6 \Rightarrow$ 모순
$f(3)=6,\ f(4)=4 \Rightarrow 5^2\times 2^2=100$
$f(3)=5,\ f(4)=5 \Rightarrow 4^2\times 1=16$

$\therefore$ $100+16=116$

따라서 함수 f의 개수는 $298+116=414$이다.

답 ④

34. 115

123

$f(1)$의 값에 따라 case분류 하면

① $f(1)=1$인 경우
$f(f(1))=f(1)=1$이므로 (가) 조건에 모순이다.

② $f(1)=2$인 경우
$f(f(1))=4 \Rightarrow f(2)=4$
$2 \le f(3) \le f(5) \le 5$이므로 $f(3)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는 ${}_4H_2$이다.
$f(4)$를 선택하는 경우의 수는 5이다.

$\therefore\ {}_4H_2 \times 5 = 50$

③ $f(1)=3$인 경우
$f(f(1))=4 \Rightarrow f(3)=4$
$4 \le f(5) \le 5$이므로 $f(5)$를 선택하는 경우의 수는 2이다.
$f(2)$, $f(4)$를 선택하는 경우의 수는 5^2이다.

$\therefore\ 2 \times 5^2 = 50$

④ $f(1)=4$인 경우
$f(f(1))=4 \Rightarrow f(4)=4$
$4 \le f(3) \le f(5) \le 5$이므로 $f(3)$, $f(5)$를 선택하는 경우의 수는 ${}_2H_2$이다.
$f(2)$를 선택하는 경우의 수는 5이다.

$\therefore\ {}_2H_2 \times 5 = 15$

⑤ $f(1)=5$인 경우
$f(f(1))=f(5)=4$이므로 $f(1) > f(5)$가 되어
(나) 조건에 모순이다.

따라서 함수 f의 개수는 $50+50+15=115$이다.

답 115

35. 126

052

(가) 조건에 의해서 치역인 원소 4개 선택 ${}_6C_4=15$가지
치역 1, 2, 3, 4가 선택됐다고 가정하자.

(나) 조건을 만족시키는 a 고르기 ${}_4C_3=4$가지
(치역 1, 2, 3, 4 중 $f(a)=a$인 것 고르기)
$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$이라 가정하자.

이때 남은 정의역 4, 5, 6 만 치역으로 매칭시켜주면 된다.

① 정의역 4가 가야 할 곳은 치역 1, 2, 3 중 하나이므로 3가지이다. ($\because$ $f(4)=4$ 이면 (나) 조건에 모순)

Tip ①번은 4가지로 잘못 판단하기 딱 좋은 case이므로 유의하자. 실수하는 point!

② 정의역 5, 6이 가야 할 곳은 치역 1, 2, 3, 4 중 하나이므로 $4^2=16$가지이다.
이때 치역 4가 선택되지 않는 경우가 포함되어 있으므로 이 경우를 빼줘야 한다.
즉, 정의역 5, 6이 1, 2, 3 중에 한 곳을 가는 경우의 수 $3^2=9$을 빼주면
$\therefore\ 16-9=7$

Tip 이렇게 구할 수도 있지만 직접 세도 된다.

i) 정의역 5만 치역 4로 매칭
$\Rightarrow$ 정의역 6이 가야 할 곳은 치역 1, 2, 3중 하나이므로 3가지이다.
ii) 정의역 6만 치역 4로 매칭
$\Rightarrow$ 정의역 5이 가야 할 곳은 치역 1, 2, 3중 하나이므로 3가지이다.
iii) 정의역 5, 6 둘다 치역 4로 매칭
$\Rightarrow$ 1가지

$\therefore\ 3+3+1=7$

$k={}_6C_4 \times {}_4C_3 \times 3 \times (4^2-3^2)=15 \times 4 \times 3 \times 7 = 1260$이므로
$\dfrac{k}{10}=126$이다.

답 126

Theme 9 이항정리

36. ①

26. 다항식 $(x-1)^6(2x+1)^7$의 전개식에서 x^2의 계수는? [3점]

① 15 ② 20 ③ 25 ④ 30 ⑤ 35

$(x-1)^6(2x+1)^7$

상수 x^2 ⇒ $1 \times {}_7C_2(2x)^2 = 21\times4 = \cancel{84}$

x^2 상수 ⇒ ${}_6C_2(x)^2(-1)^4 = \frac{6\cdot5}{2} = 15$

x x ⇒ ${}_6C_1(-1)^5 \times {}_7C_1(2x)^1 = -6\times14 = \cancel{-84}$

15

37. ②

031

${}_5C_1\,(x^2)^1\left(\frac{a}{x}\right)^4 \Rightarrow 5a^4$

${}_5C_2\,(x^2)^2\left(\frac{a}{x}\right)^3 \Rightarrow 10a^3$

$5a^4 = 10a^3 \Rightarrow 5a^4 - 10a^3 = 0 \Rightarrow 5a^3(a-2) = 0$

$\Rightarrow a = 2 \ (\because\ a > 0)$

따라서 양수 $a = 2$이다.

답 ②

38. ②

026

$$(x^2+1)^4(x^3+1)^n = (x^4+2x^2+1)^2(x^3+1)^n$$
$$= (x^8+4x^6+6x^4+4x^2+1)(x^3+1)^n$$

$4 \times {}_nC_1 = 12 \Rightarrow n = 3$이므로

$$(x^2+1)^4(x^3+1)^3 = (x^4+2x^2+1)^2(x^3+1)^3$$
$$= (x^8+4x^6+6x^4+4x^2+1)(x^3+1)^3$$

① $x^6 \times$상수항

$4x^6 \times 1 \Rightarrow 4$

② 상수항$\times x^6$

$1 \times {}_3C_2(x^3)^2 \Rightarrow 3$

따라서 x^6의 계수는 $4+3=7$이다.

답 ②

39. ③

033

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$${}_{19}C_k\, x^k\, 2^{19-k} \Rightarrow {}_{19}C_k \times 2^{19-k} = \frac{19!}{(19-k)!\,k!} \times 2^{19-k}$$

$${}_{19}C_{k+1}\, x^{k+1}\, 2^{18-k}$$

$$\Rightarrow {}_{19}C_{k+1} \times 2^{18-k} = \frac{19!}{(18-k)!\,(k+1)!} \times 2^{18-k}$$

$$\frac{19!}{(19-k)!\,k!} \times 2^{19-k} > \frac{19!}{(18-k)!\,(k+1)!} \times 2^{18-k}$$

$$\frac{2}{(19-k)!\,k!} > \frac{1}{(18-k)!\,(k+1)!}$$

$$\frac{2}{19-k} > \frac{1}{k+1}$$

k는 자연수이므로

$1 \le k$이고 x^{k+1}의 계수가 존재해야 하므로

$k \le 18$이다. $1 \le k \le 18$이므로 $19-k > 0$이다.

양변에 $19-k$를 곱해도 부호변화가 없다.

$2 > \frac{19-k}{k+1} \quad (k+1 > 0)$

$2k+2 > 19-k$

$3k > 17$

$k > 5.6\cdots$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다.

답 ③

2. 확률

Theme 10 수학적 확률-일일이 세기

40. ④

039

표본공간을 S라 하면

$n(S)={}_7C_2=21$

꺼낸 구슬에 적힌 두 자연수가 서로소인 사건을 A

(2, 3), (2, 5), (2, 7)

(3, 4), (3, 5), (3, 7), (3, 8)

(4, 5), (4, 7)

(5, 6), (5, 7), (5, 8)

(6, 7)

(7, 8)

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\dfrac{14}{{}_7C_2}=\dfrac{14}{21}=\dfrac{2}{3}$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{2}{3}$이다.

답 ④

41. ②

048

표본공간을 S라 하면

$n(S)=6^2=36$

$|a-3|+|b-3|=2$이거나 $a=b$인 사건을 A

변수가 2개이니 표를 그려서 해결해 보자.

b ＼ a		1	2	3	4	5	6
		$\vert 1-3\vert=2$	$\vert 2-3\vert=1$	$\vert 3-3\vert=0$	$\vert 4-3\vert=1$	$\vert 5-3\vert=2$	$\vert 6-3\vert=3$
1	2	4	3	2	3	4	5
2	1	3	2	1	2	3	4
3	0	2	1	0	1	2	3
4	1	3	2	1	2	3	4
5	2	4	3	2	3	4	5
6	3	5	4	3	4	5	6

$|a-3|+|b-3|=2$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

(1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 3)

이다.

$a=b$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)이므로

$|a-3|+|b-3|=2$이거나 $a=b$를 만족시키는

순서쌍 $(a,\ b)$는

(1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (5, 3)

(1, 1), (3, 3), (5, 5), (6, 6)

이다.

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{1}{3}$이다.

답 ②

42. ②

060

표본공간을 S라 하면

$n(S)=6^3$

$a>b$이고 $a>c$인 사건을 A

a의 값에 따라 case분류하면

① $a=1$

$1>b,\ 1>c$을 만족시키는 $b,\ c$는 존재하지 않는다.

② $a=2$

$2>b,\ 2>c \quad \Rightarrow 1\times1=1$가지

③ $a=3$

$3>b,\ 3>c \quad \Rightarrow 2\times2=4$가지

④ $a=4$

$4>b,\ 4>c \quad \Rightarrow 3\times3=9$가지

⑤ $a=5$

$5>b,\ 5>c \quad \Rightarrow 4\times4=16$가지

⑥ $a=6$

$6>b,\ 6>c \quad \Rightarrow 5\times5=25$가지

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\dfrac{1+4+9+16+25}{6^3}=\dfrac{55}{216}$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{55}{216}$이다.

답 ②

43. 11

062

표본공간을 S라 하면

$n(S)={}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=36$

갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과
을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같은 사건을 X

1, 2, 3, 4가 적힌 카드 네 장 중에서 임의로 두 장의 카드를
꺼내는 case는 다음과 같다.

(뽑은 카드) $\Rightarrow$ 두 수의 합

$(1,\ 2)\Rightarrow 3$

$(1,\ 3)\Rightarrow 4$

$(1,\ 4)\Rightarrow 5$

$(2,\ 3)\Rightarrow 5$

$(2,\ 4)\Rightarrow 6$

$(3,\ 4)\Rightarrow 7$

① 합이 3으로 같은 경우 $\Rightarrow\ 1\times1=1$가지

② 합이 4로 같은 경우 $\Rightarrow\ 1\times1=1$가지

③ 합이 5로 같은 경우 $\Rightarrow\ 2\times2=4$가지

④ 합이 6으로 같은 경우 $\Rightarrow\ 1\times1=1$가지

⑤ 합이 7로 같은 경우 $\Rightarrow\ 1\times1=1$가지

$\therefore\ \mathrm{P}(X)=\dfrac{1+1+4+1+1}{36}=\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$

따라서 $p+q=11$이다.

답 11

Theme 11 수학적 확률-순열과 조합을 이용하여 세기

44. ③

053

표본공간을 S라 하면

$n(S)={}_{10}\mathrm{C}_3=120$

꺼낸 카드에 적혀 있는 세 자연수 중에서
가장 작은 수가 4 이하이거나 7 이상인 사건을 X

뽑은 세 장의 카드에 적혀 있는 수를
$a,\ b,\ c\ (a<b<c)$라 하면 $a\le4$ or $a\ge7$이어야 한다.

① $a\le4$일 때

ⅰ) $a=1$이면 $1<b<c\Rightarrow{}_9\mathrm{C}_2=36$가지

ⅱ) $a=2$이면 $2<b<c\Rightarrow{}_8\mathrm{C}_2=28$가지

ⅲ) $a=3$이면 $3<b<c\Rightarrow{}_7\mathrm{C}_2=21$가지

ⅳ) $a=4$이면 $4<b<c\Rightarrow{}_6\mathrm{C}_2=15$가지

$36+28+21+15=100$

② $a\ge7$일 때

ⅰ) $a=7$이면 $7<b<c\Rightarrow{}_3\mathrm{C}_2=3$가지

ⅱ) $a=8$이면 $8<b<c\Rightarrow{}_2\mathrm{C}_2=1$가지

$3+1=4$

$\therefore\ \mathrm{P}(X)=\dfrac{100+4}{120}=\dfrac{104}{120}=\dfrac{52}{60}=\dfrac{13}{15}$

답 ③

45. ③

050

표본공간을 S라 하면
$n(S)=5^4=625$

선택한 수가 3500보다 큰 사건을 A
천의 자리수의 따라 case분류하면 다음과 같다.

① 3 5 □□ $\Rightarrow$ $5^2=25$가지

② 4 □□□ $\Rightarrow$ $5^3=125$가지

③ 5 □□□ $\Rightarrow$ $5^3=125$가지

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\dfrac{25+125+125}{625}=\dfrac{275}{625}=\dfrac{11}{25}$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{11}{25}$이다.

답 ③

46. ④

054

표본공간을 S라 하면
$n(S)=9!$

문자 A가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 각각 숫자가 적혀 있는 카드가 놓이는 사건을 X

A의 양옆에 놓일 숫자카드 2개 선택 ${}_4C_2$
1, 2가 선택되었다고 가정하자.
1, 2 자리 바꾸기 2!
1, 2순서로 선택되었다고 가정하자.
($\boxed{1}$ $\boxed{A}$ $\boxed{2}$)를 한 묶음으로 보면
($\boxed{1}$ $\boxed{A}$ $\boxed{2}$) $\boxed{B}$, $\boxed{C}$, $\boxed{D}$, $\boxed{E}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$
나머지 7개 배열 7!

$\therefore\ \mathrm{P}(X)=\dfrac{{}_4C_2\times 2!\times 7!}{9!}=\dfrac{6\times 2}{9\times 8}=\dfrac{1}{6}$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{1}{6}$이다.

답 ④

Theme 12 확률의 덧셈정리-확률로 확률 계산

47. ③

25. 출제의도 : 두 사건의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A, B^C이 서로 배반사건이므로
$A\subset B$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{5}$

$\mathrm{P}(B)=\dfrac{7}{10}-\mathrm{P}(A)$
$=\dfrac{7}{10}-\dfrac{1}{5}$
$=\dfrac{1}{2}$

따라서 $A\subset B$이므로
$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)$
$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}$
$=\dfrac{3}{10}$

정답 ③

48. ④

041

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A\cap B^c)+\mathrm{P}(A^c\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B)$

$\Rightarrow\ \dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}+\mathrm{P}(A\cap B)\ \Rightarrow\ \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

답 ④

49. ②

034

A^c과 B는 서로 배반사건이므로 $B \subset A$

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$

따라서

$\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}-\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$

이다.

답 ②

Theme 13 확률의 덧셈정리의 활용

50. ③

056

표본공간을 S라 하면

$n(S)={}_6\mathrm{C}_3=20$

꺼낸 3개의 공 중에서 흰 공이 1개이고 검은 공이 2개인 사건을 A

꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수를 모두 곱한 값이 8인 사건을 B

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$를 이용하여 구해보자.

① $\mathrm{P}(A)$

흰 공 1개, 검은 공 2개를 뽑는 경우의 수는

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2=12$이다.

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

② $\mathrm{P}(B)$

꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수를 모두 곱한 값이 8이 되려면 다음과 같은 case가 가능하다.

i) 흰2 검2 검2 $\Rightarrow$ $1\times{}_3\mathrm{C}_2=3$

ii) 검2 검2 검2 $\Rightarrow$ ${}_3\mathrm{C}_3=1$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{4}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$

③ $\mathrm{P}(A\cap B)$

흰 공 1개, 검은 공 2개를 뽑고 꺼낸 3개의 공에 적혀 있는 수를 모두 곱한 값이 8이 되려면

흰2 검2 검2 $\Rightarrow$ $1\times{}_3\mathrm{C}_2=3$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{3}{20}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}-\frac{3}{20}=\frac{13}{20}$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{13}{20}$이다.

답 ③

51. ③

26. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 문자열의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4$

문자 a가 한 개만 포함되는 사건을 A, 문자 b가 한 개만 포함되는 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)$

이다.

문자 a가 한 개만 포함되는 경우의 수는 문자 a가 나열될 한 곳을 택한 후 나머지 세 곳에는 b, c, d 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_4C_1 \times {}_3\Pi_3 = 4 \times 3^3$

그러므로 $P(A) = \dfrac{4 \times 3^3}{4^4} = \dfrac{27}{64}$

문자 b가 한 개만 포함되는 경우의 수는 문자 a가 한 개만 포함되는 경우의 수와 같으므로

$P(B) = \dfrac{4 \times 3^3}{4^4} = \dfrac{27}{64}$

한편 사건 $A \cap B$는 문자 a와 문자 b가 각각 한 개만 포함되는 사건이다.

문자 a와 문자 b는 각각 한 개만 포함되는 경우의 수는 문자 a와 문자 b가 나열될 두 곳을 택하여 두 문자 a, b를 나열하고, 나머지 두 곳에는 c, d 중에서 중복을 허락하여 2개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_4P_2 \times {}_2\Pi_2 = (4 \times 3) \times 2^2 = 3 \times 4^2$

그러므로 $P(A \cap B) = \dfrac{3 \times 4^2}{4^4} = \dfrac{3}{16}$

따라서

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{27}{64} + \frac{27}{64} - \frac{3}{16} \\ &= \frac{21}{32} \end{aligned}$$

정답 ③

52. ④

080

표본공간을 S라 하면

$n(S) = {}_5C_4 \times 4!$

택한 수가 5의 배수인 사건을 A

택한 수가 3500 이상인 사건을 B라 하면

택한 수가 5의 배수 또는 3500 이상인 사건은

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

① $P(A)$

일의 자리는 5로 고정

나머지 자리 선택 후 배열 ${}_4C_3 \times 3!$

$\therefore\ P(A) = \dfrac{{}_4C_3 \times 3!}{{}_5C_4 \times 4!} = \dfrac{1}{5}$

② $P(B)$

ⅰ) 천의 자리가 3이고 백의 자리가 5인 경우

나머지 선택 후 배열 ${}_3C_2 \times 2!$

ⅱ) 천의 자리가 4인 경우

나머지 선택 후 배열 ${}_4C_3 \times 3!$

ⅲ) 천의 자리가 5인 경우

나머지 선택 후 배열 ${}_4C_3 \times 3!$

$\therefore\ P(B) = \dfrac{{}_3C_2 \times 2! + {}_4C_3 \times 3! \times 2}{{}_5C_4 \times 4!} = \dfrac{9}{20}$

③ $P(A\cap B)$

일의 자리는 5로 고정해야 하므로 3500 이상이 되려면

천의 자리는 4가 되어야 한다.

4 □ □ 5

나머지 선택 후 배열 ${}_3C_2\times 2!$

$$\therefore\ P(A\cap B)=\frac{{}_3C_2\times 2!}{{}_5C_4\times 4!}=\frac{1}{20}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{1}{5}+\frac{9}{20}-\frac{1}{20}$$

$$=\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{3}{5}$이다.

답 ④

Theme 14 여사건의 확률의 활용

53. ⑤

구하는 사건의 여사건은 7, 9, 11을 제외한 8개의 수 중에서 2개를 선택하는 사건이므로 구하는 사건의 확률은

$$1-\frac{{}_8C_2}{{}_{11}C_2}=1-\frac{\frac{8\times 7}{2}}{\frac{11\times 10}{2}}=1-\frac{28}{55}=\frac{27}{55}$$

54. ⑤

055

표본공간을 S라 하면

$n(S)={}_{14}C_3$

3개의 마스크 중에서 적어도 한 개가 흰색 마스크인 사건을 A라 하면 3개의 마스크 모두 검은색 마스크인 사건은 A^c이다.

3개의 마스크 모두 검은색 마스크가 나오는 경우의 수는 ${}_9C_3$이다.

$P(A^c)=\frac{{}_9C_3}{{}_{14}C_{13}}=\frac{3}{13}$이므로 $P(A)=1-P(A^c)=1-\frac{3}{13}=\frac{10}{13}$이다.

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{10}{13}$이다.

답 ⑤

55. ⑤

058

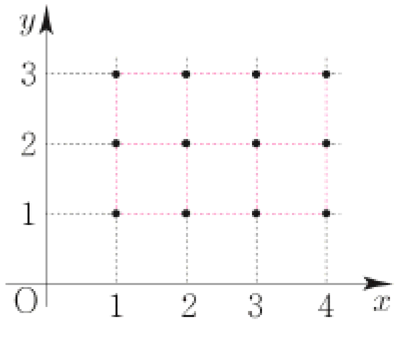
표본공간을 S라 하면

$n(S)={}_{12}C_2$

선택된 두 점 사이의 거리가 1보다 큰 사건을 A라 하면

선택된 두 점 사이의 거리가 1인 사건은 A^c이다.

(문제 조건상 두 점 사이의 거리가 1보다 작을 수는 없다.)



두 점 사이의 거리가 1인 경우의 수는 17가지

$P(A^c)=\frac{17}{{}_{12}C_2}=\frac{17}{66}$이므로 $P(A)=1-P(A^c)=1-\frac{17}{66}=\frac{49}{66}$이다.

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{49}{66}$이다.

답 ⑤

56. 89

079

표본공간을 S라 하면
$n(S)={}_3H_9={}_{11}C_2=55$

풀이1) 덧셈정리

① $P(A)$
$a=1,\ b+c=8 \Rightarrow {}_2H_8={}_9C_8=9$

$a=0,\ b+c=9 \Rightarrow {}_2H_9={}_{10}C_9=10$

$\therefore\ P(A)=\dfrac{19}{55}$

② $P(B)$
A와 B는 서로 구조가 동일하므로

$\therefore\ P(B)=\dfrac{19}{55}$

③ $P(A\cap B)$
$a=0,\ b=0,\ c=9$

$a=0,\ b=1,\ c=8$

$a=1,\ b=0,\ c=8$

$a=1,\ b=1,\ c=7$

$\therefore\ P(A\cap B)=\dfrac{4}{55}$

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=\frac{19}{55}+\frac{19}{55}-\frac{4}{55}\\&=\frac{34}{55}\end{aligned}$$

풀이2) 여사건의 확률

$a<2$ 또는 $b<2$인 사건을 A라 하면
$a\geq 2$ 이고 $b\geq 2$인 사건은 A^c이다.

$a\geq 2,\ b\geq 2,\ c\geq 0$
$a+b+c=9$

$a=a'+2,\ b=b'+2$
$a'\geq 0,\ b'\geq 0,\ c\geq 0$
$a'+b'+c=5 \Rightarrow {}_3H_5={}_7C_2=21$

$P(A^c)=\dfrac{21}{55}$이므로 $P(A)=1-P(A^c)=1-\dfrac{21}{55}=\dfrac{34}{55}$이다.

따라서 $p+q=89$이다.

답 89

57. ④

072

표본공간을 S라 하면
$n(S)=3^4=81$

$f(1)\geq 2$이거나 함수 f의 치역이 B인 사건을 X라 하면
$f(1)<2$ 이고 f의 치역이 B가 아닌 사건은 X^c이다.

$f(1)<2 \Rightarrow f(1)=1$

치역의 개수에 따라 case분류하면

① 치역 1개 ($f(1)=1$이므로 치역은 1)

$f(2)=f(3)=f(4)=1 \Rightarrow 1$가지

② 치역 2개

공역 2, 3 중에 치역 1개 선택 ${}_2C_1$ (2가 선택되었다고 가정)
정의역 2, 3, 4에게 물어본다.
치역 1, 2 중에 어디갈래? 각각 2가지 2^3
이때 $f(2)=f(3)=f(4)=1$인 경우 1가지를 빼줘야 하므로
${}_2C_1\times(2^3-1)=2\times 7=14$ 이다.

Tip $f(1)=1$로 고정되어 있으므로
$f(2)=f(3)=f(4)=2$인 경우는 치역이 2개다.

$P(X^c)=\frac{1+14}{81}=\frac{5}{27}$ 이므로

$P(X)=1-P(X^c)=1-\frac{5}{27}=\frac{22}{27}$

이다.

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{22}{27}$ 이다.

답 ④

Theme 15 조건부확률-확률로 확률 계산

58. ④

049

$P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B^c)=\frac{3}{10}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

$P(B)=1-P(B^c)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{5}+\frac{7}{10}-\frac{1}{5}=\frac{9}{10}$

따라서

$$P(A^c\mid B^c)=\frac{P(A^c\cap B^c)}{P(B^c)}=\frac{P((A\cup B)^c)}{P(B^c)}=\frac{1-P(A\cup B)}{P(B^c)}$$

$$=\frac{1-\frac{9}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$

이다.

답 ④

Theme 16 조건부확률-표가 주어진 경우

59. ②

051

진로활동 B를 희망하는 사건을 A

1학년 학생인 사건을 B

따라서 구하고자 하는 확률은

$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{5}{5+4}=\frac{5}{9}$ 이다.

답 ②

60. ①

054

생태연구를 선택하는 사건을 A

여학생인 사건을 B

따라서 구하고자 하는 확률은

$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{50}{60+50}=\frac{5}{11}$ 이다.

답 ①

Theme 17 조건부확률-표가 주어지지 않은 경우

61. ②

058

	여학생	남학생	합계
축구	30	$x=40$	70
야구	10	20	30
합계	40	60	

$\frac{x}{100}=\frac{2}{5} \Rightarrow x=40$

야구를 선택하는 사건을 A

여학생인 사건을 B

따라서 구하고자 하는 확률은

$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{10}{10+20}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

이다.

답 ②

Theme 18 조건부확률의 활용

62. ③

059

ab가 6의 배수인 사건을 A

$a+b$가 7인 사건을 B

변수 2개이니 표를 그려서 해결해 보자.

ab가 6의 배수는 색칠한 글씨
ab가 6의 배수이고 $a+b$가 7인 경우 칸에 색칠하면
다음과 같다.

b \ a	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

$n(A)=15$, $n(A\cap B)=4$

따라서 구하고자 하는 확률은
$\mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{4}{15}$이다.

답 ③

63. ④

056

① 주머니 A를 선택한 뒤 동시에 꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은색인 경우

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_3\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

② 주머니 B를 선택한 뒤 동시에 꺼낸 2개의 구슬이 모두 검은색인 경우

$$\frac{1}{2}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{12}}=\dfrac{1}{7}$이다.

답 ④

64. ①

067

① 나온 눈의 수가 5 이상 (주머니 A에서 흰 공 2개)

$$\frac{1}{3}\times\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{15}=\frac{1}{45}$$

② 나온 눈의 수가 4 이하 (주머니 B에서 흰 공 2개)

$$\frac{2}{3}\times\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{\frac{1}{45}}{\frac{1}{45}+\frac{2}{15}}=\dfrac{1}{7}$이다.

답 ①

65. ④

072

상자 A ○ ○ ● ● ●
상자 B ○ ○ ○ ● ● ● ●

① 앞면 $\frac{1}{2}$ (상자 A를 택하고 공의 색깔이 같음)

i) ● ● $\Rightarrow$ $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{3}{10}$

ii) ○ ○ $\Rightarrow$ $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{10}$

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{10}+\frac{1}{10}\right)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

② 뒷면 $\frac{1}{2}$ (상자 B를 택하고 공의 색깔이 같음)

i) ● ● $\Rightarrow$ $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{2}{7}$

ii) ○ ○ $\Rightarrow$ $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{1}{7}$

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{7}\right)=\frac{3}{14}$$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}+\frac{3}{14}}=\dfrac{14}{14+15}=\dfrac{14}{29}$이다.

답 ④

66. 28

095

①②③④⑤⑥

꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하고 $n(A)$을 구해보자.

전체 ${}_6\mathrm{C}_3\times 3!$에서 곱이 홀수인 경우를 빼면 된다.

곱이 홀수인 경우는 ①③⑤뿐이다. 배열 3!

$\Rightarrow n(A)={}_6\mathrm{C}_3\times 3!-1\times 3!=120-6=114$

첫 번째로 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수인 사건을 B라 하고 $n(A\cap B)$를 구해보자.

홀 : ①③⑤
짝 : ②④⑥

1) 홀홀짝
${}_3\mathrm{C}_2$ (홀수 2개 선택)$\times 2!$(배열)$\times$ ${}_3\mathrm{C}_1$(짝수 1개 선택)
$3\times 2\times 3=18$가지

2) 홀짝홀
1)과 구조가 같으므로 18가지

3) 홀짝짝
${}_3\mathrm{C}_1$ (홀수 1개 선택)$\times$ ${}_3\mathrm{C}_2$(짝수 2개 선택)$\times 2!$(배열)
$3\times 2\times 3=18$가지

$\Rightarrow n(A\cap B)=18\times 3=54$

$\therefore\ \mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{54}{114}=\dfrac{9}{19}$

따라서 $p+q=28$이다.

답 28

67. ⑤

083

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
홀 : 1, 3, 5, 7
짝 : 2, 4, 6, 8
$a+b+c$가 짝수인 사건을 A
a가 홀수인 사건을 B

$a+b+c$가 짝수이려면 다음과 같은 2가지 경우가 가능하다.

① 홀 홀 짝 $\Rightarrow$ ${}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1=24$

② 짝 짝 짝 $\Rightarrow$ ${}_4\mathrm{C}_3=4$

$n(A)=24+4=28$

a가 홀수이려면 ① case에서 짝<홀<홀 인 경우를 빼면된다.
짝수가 2일 때, 3, 5, 7 중 홀수 2개 선택 ${}_3\mathrm{C}_2=3$
짝수가 4일 때, 5, 7 중 홀수 2개 선택 ${}_2\mathrm{C}_2=1$
$n(A\cap B)=24-4=20$

따라서 구하고자 하는 확률은
$\mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{20}{28}=\dfrac{5}{7}$이다.

답 ⑤

68. ①

28. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있는 사건을 A, 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.
동전을 왼쪽부터 ① ② ③ ④로 나타내자.
(ⅰ) 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 경우
㉠ ④만 5번 뒤집는 경우의 수는 1
㉡ ④를 3번, ①, ②, ③ 중에서 1개를 2번 뒤집는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{C}_1 \times \frac{5!}{3!2!} = 30$$

㉢ ④를 1번, ①, ②, ③ 중에서 1개를 4번 뒤집는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{C}_1 \times \frac{5!}{4!} = 15$$

㉣ ④를 1번, ①, ②, ③ 중에서 서로 다른 2개를 각각 2번씩 뒤집는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{C}_2 \times \frac{5!}{2!\,2!} = 90$$

㉠ ~ ㉣에서
이 경우의 수는
$1+30+15+90=136$
(ⅱ) 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있는 경우
㉠ ①, ②, ③ 중에서 1개를 3번, 나머지 2개를 각각 1번씩 뒤집는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{C}_1 \times \frac{5!}{3!} = 60$$

㉡ ①, ②, ③을 각각 1번씩 뒤집고, ④를 2번 뒤집는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

㉠, ㉡에서
이 경우의 수는
$60+60=120$
(ⅰ) ~ (ⅱ)에서

$$\mathrm{P}(A) = \frac{136+120}{4^5} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{136}{4^5} = \frac{17}{128}$$

따라서

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B|A)} = \frac{\frac{17}{128}}{\frac{1}{4}} = \frac{17}{32}$$

정답 ①

Theme 19 확률의 곱셈정리

69. ⑤

078

주머니 A ○○ ●●●

주머니 B ○ ●●●

① A 흰 공 $\Rightarrow \frac{2}{5}$

주머니 B ○○○ ●●●

흰 공 뽑을 확률 $\frac{3}{6}$

$\frac{2}{5}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{5}$

② A 검은 공 $\Rightarrow \frac{3}{5}$

주머니 B ○ ●●●●●

흰 공 뽑을 확률 $\frac{1}{6}$

$\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=\frac{2+1}{10}=\frac{3}{10}$이다.

답 ⑤

70. ①

086

첫 번째 꺼낸 두 구슬에 적혀 있는 숫자가 서로 다른 확률

1, 2, 3, 4, 5 중 2개선택 ${}_5C_2$ 후 배열 2!

$\Rightarrow \frac{{}_5C_2\times 2!}{25}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$

첫 번째 A에서 1, B에서 2를 꺼냈다고 가정하자.

주머니 A : 2, 3, 4, 5

주머니 B : 1, 3, 4, 5

두 번째 꺼낸 두 구슬에 적혀 있는 숫자가 같을 확률

(3, 3), (4, 4), (5, 5)

$\Rightarrow \frac{3}{16}$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{4}{5}\times\frac{3}{16}=\frac{3}{20}$이다.

답 ①

71. 131

098

★의 개수에 따라 case분류해보자.

① $\boxed{}\ \boxed{} \Rightarrow \frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

첫 번째 시행 후 주머니에 있는 카드는 다음과 같다.

$\boxed{\bigstar}\ \boxed{\bigstar}\ \boxed{\bigstar}\ \boxed{\bigstar}\ \boxed{}$

두 번째 시행한다고 해서 ★ 모양의 스티커가 3개 붙을 수 없다.

② $\boxed{\bigstar}\ \boxed{} \Rightarrow \frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{6}{10}$

첫 번째 시행 후 주머니에 있는 카드는 다음과 같다.

$\boxed{\bigstar\bigstar}\ \boxed{\bigstar}\ \boxed{\bigstar}\ \boxed{}\ \boxed{}$

두 번째 시행 후 ★ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 들어 있으려면 $\boxed{\bigstar\bigstar}$ 를 선택하고 다른 하나를 선택하면 된다.

이때 확률은 $\frac{{}_1C_1\times{}_4C_1}{{}_5C_2}=\frac{4}{10}$이므로

$\frac{6}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{24}{100}$

③ $\boxed{★}\ \boxed{★} \Rightarrow \dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{10}$

첫 번째 시행 후 주머니에 있는 카드는 다음과 같다.

$\boxed{★★}\ \boxed{★★}\ \boxed{\ }\ \boxed{\ }\ \boxed{\ }$

두 번째 시행 후 ★ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 들어 있을 확률은 전체에서 스티커가 붙어 있지 않은 2개의 카드를 꺼낼 확률을 빼서 구하면 된다.

이때 확률은 $1-\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{7}{10}$이므로 $\dfrac{1}{10}\times\dfrac{7}{10}=\dfrac{7}{100}$

$\therefore\ \dfrac{24+7}{100}=\dfrac{31}{100}$

따라서 $p+q=131$이다.

답 131

Theme 20 사건의 독립과 종속-확률로 확률 계산

72. ④

048

$P(B^c)=\dfrac{1}{3},\ P(A\mid B)=\dfrac{1}{2}$

$P(B)=1-P(B^c)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

$P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)=\dfrac{1}{2}$

따라서 $P(A)P(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$이다.

답 ④

73. ②

053

$P(A)=\dfrac{1}{6},\ P(A\cap B^c)+P(A^c\cap B)=\dfrac{1}{3}$

$$\begin{aligned}P(A\cap B^c)+P(A^c\cap B)&=P(A)P(B^c)+P(A^c)P(B)\\&=P(A)(1-P(B))+(1-P(A))P(B)\\&=\frac{1}{6}(1-P(B))+\frac{5}{6}P(B)\\&=\frac{1}{6}+\frac{4}{6}P(B)\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

따라서 $P(B)=\dfrac{1}{4}$이다.

답 ②

Theme 22 독립시행의 확률

75. ①

057

앞 ○ 뒤 X

① ○ ○ X X X $\Rightarrow {}_5C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{10}{32}=\dfrac{5}{16}$

② ○ ○ ○ X X $\Rightarrow {}_5C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{10}{32}=\dfrac{5}{16}$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{5+5}{16}=\dfrac{10}{16}=\dfrac{5}{8}$이다.

답 ①

76. 137

062

홀수의 눈이 나올 확률 $\frac{1}{2}$

앞면이 나올 확률 $\frac{1}{2}$

$a-b=3$

① $a=5,\ b=2 \Rightarrow {}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{6}{2^9}$

② $a=4,\ b=1 \Rightarrow {}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times {}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{20}{2^9}$

③ $a=3,\ b=0 \Rightarrow {}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^5 \times {}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{10}{2^9}$

$\therefore\ \frac{6+20+10}{2^9} = \frac{36}{2^9} = \frac{9}{128}$

따라서 $p+q=137$이다.

답 137

Tip 실수하는 포인트는 $b=0$이다.
모두 뒷면이 나오는 경우도 고려해줘야 한다.

77. ①

068

주사위 2개를 던질 때, 나오는 눈을 각각 $a,\ b$라 하고,
이들의 곱을 $a\times b$라 하자.
앞면이 나오는 동전의 개수에 따라 case분류하면 다음과 같다.

① 앞면의 개수가 1 (가능한 주사위 눈 1×1)

${}_4C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{1}{36} = \frac{4}{16\times36}$

② 앞면의 개수가 2 (가능한 주사위 눈 $1\times2,\ 2\times1$)

${}_4C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{2}{36} = \frac{12}{16\times36}$

③ 앞면의 개수가 3 (가능한 주사위 눈 $1\times3,\ 3\times1$)

${}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{2}{36} = \frac{8}{16\times36}$

④ 앞면의 개수가 4 (가능한 주사위 눈 $1\times4,\ 4\times1,\ 2\times2$)

${}_4C_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times \frac{3}{36} = \frac{3}{16\times36}$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{4+12+8+3}{16\times36} = \frac{27}{16\times36} = \frac{3}{64}$
이다.

답 ①

78. ④

071

6의 약수이면 $+1 \Rightarrow \frac{2}{3}$

6의 약수가 아니면 $0 \Rightarrow \frac{1}{3}$

4번 반복할 때, 4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상인 사건을 A라 하면 점 P의 좌표가 2 미만인 사건은 A^c이다.

① 점 P의 좌표가 원점인 경우 $\Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^4$

② 점 P의 좌표가 1인 경우 $\Rightarrow {}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$P(A^c)=\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{9}$이므로

$P(A)=1-P(A^c)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$이다.

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{8}{9}$이다.

답 ④

79. 62

29. 출제의도 : 독립시행의 확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

동전을 두 번 던져 앞면이 나온 횟수가

2일 확률은 $\frac{1}{4}$

앞면이 나온 횟수가 0 또는 1일 확률은

$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

문자 B가 보이도록 카드가 놓이려면

뒤집는 횟수가 홀수이어야 한다.

따라서

구하는 확률은 5번의 시행 중 앞면이 나온 횟수가 2인 횟수가 1 또는 3 또는 5인 확률이므로

$$p={}_5C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4+{}_5C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2+{}_5C_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$=\frac{405+90+1}{4^5}$$

$$=\frac{31}{64}$$

즉, $128\times p=128\times\frac{31}{64}$

$=62$

정답 62

Theme 23 독립시행의 확률과 조건부확률

80. ①

087

① 나온 눈의 수가 같을 확률 ⇒ $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

한 개의 동전을 4번 던져서 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 확률 ⇒ ${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}$

$\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{16}$

② 나온 눈의 수가 다를 확률 ⇒ $\frac{5}{6}$

한 개의 동전을 2번 던져서 앞면이 나온 횟수와 뒷면이 나온 횟수가 같을 확률 ⇒ ${}_2C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$

$\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$

따라서 구하고자 하는 확률은

$$\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}+\frac{5}{12}}=\frac{3}{3+20}=\frac{3}{23}\text{이다.}$$

답 ①

81. ③

093

앞면 ○ $(+1,\ 0)$, 뒷면 X $(0,\ +1)$

점 A의 x좌표 또는 y좌표가 처음으로 3이 되면 시행을 멈춘다.

점 A의 y좌표가 처음으로 3이 되는 case를 구해보자.

① 3번 시행하여 조건을 만족하는 경우

X X X $(0,\ 3)$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

② 4번 시행하여 조건을 만족하는 경우

4번 시행하여 조건을 만족하려면 반드시 마지막에서 뒷면이 나와야 한다. (실수하는 포인트!)

만약 마지막에서 앞면이 나온다면 조건에 의해서 4번째 시행에서 $(1,\ 3)$을 만들기 전에 이미 시행이 멈춘다.

○ X X | X

마지막은 고정이므로 ○ X X 만 배열 $\frac{3!}{2!1!}={}_3C_1$가지

${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{16}$

③ 5번 시행하여 조건을 만족하는 경우

②과 마찬가지로 조건을 만족하려면 반드시 마지막에서 뒷면이 나와야 한다.

○ ○ X X | X

마지막은 고정이므로 ○ ○ X X 만 배열 $\frac{4!}{2!2!}={}_4C_2$가지

${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{16}$

따라서 구하고자 하는 확률은

$$\frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}}=\frac{3}{2+3+3}=\frac{3}{8}\text{이다.}$$

답 ③

Tip Guide step에서 독립시행의 확률
${}_nC_r\,p^r(1-p)^{n-r}$ 에서 ${}_nC_r$는
총 개수를 의미한다고 학습하였다.
이때 문제에 특별한 전제조건이 가해지면
조심해야 하고 관성적으로 접근하지 않도록
유의해야 한다고도 학습하였다.
마지막에는 뒷면밖에 올 수 없다는 것이
이 문제의 포인트이다. (특별한 전제조건)

82. ④

097

상자 B에 들어있는 공의 개수가 8인 사건을 X,
상자 B에 들어있는 검은 공의 개수가 2인 사건을 Y라 하자.

한 번의 시행에서 상자 B에 넣는 공의 개수는
1 or 2 or 3이므로 4번을 시행한 후 상자 B에
들어 있는 공의 개수가 8인 경우는 다음과 같다.
3, 3, 1, 1 / 3, 2, 2, 1 / 2, 2, 2, 2

① 3, 3, 1, 1인 경우
상자 B에 들어있는 검은 공의 개수는 2
주머니에서 숫자 1이 적힌 카드 2장, 숫자 4가 적힌 카드 2장을 꺼내야 하므로 확률은

$$\frac{4!}{2!2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=6\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

② 3, 2, 2, 1인 경우
상자 B에 들어있는 검은 공의 개수는 3
주머니에서 숫자 1인 적힌 카드 1장,
숫자 2 또는 3이 적힌 카드 2장, 숫자 4가 적힌 카드 1장을 꺼내야 하므로 확률은

$$\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)=48\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

③ 2, 2, 2, 2인 경우
상자 B에 들어있는 검은 공의 개수는 4
주머니에서 숫자 2 또는 3이 적힌 카드 4장을 꺼내야 하므로 확률은

$$\left(\frac{2}{4}\right)^4=16\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$\mathrm{P}(X)=6\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+48\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+16\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=70\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$\mathrm{P}(X\cap Y)=6\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(Y\mid X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{6\times\left(\frac{1}{4}\right)^4}{70\times\left(\frac{1}{4}\right)^4}=\frac{3}{35}$$

따라서 구하고자 하는 확률은 $\frac{3}{35}$이다.

답 ④

3. 통계

Theme 24 이산확률변수의 확률분포

83. ②

005

$\mathrm{P}(X=k)=2\mathrm{P}(X=k+1)\ \ (k=0,\ 1,\ 2)$
$\mathrm{P}(X=0)=a$라 하자.
확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3
$\mathrm{P}(X=k)$	a	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{4}a$	$\frac{1}{8}a$

확률의 합은 1이므로

$$\left(\frac{8+4+2+1}{8}\right)a=1\ \Rightarrow\ a=\frac{8}{15}$$

따라서 $\mathrm{P}(X\geq 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$$=\frac{1}{4}a+\frac{1}{8}a=\frac{3}{8}a=\frac{3}{8}\times\frac{8}{15}=\frac{1}{5}$$

이다.

답 ②

84. ④

27. 출제의도 : 이산확률변수의 분포를 이용하여 평균에 대한 조건을 만족시키는 확률의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$k=0$, $k=2$일 때,

$\mathrm{P}(X=0)=\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(X=4)$

$k=1$일 때, $\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X=3)$

$\mathrm{P}(X=0)=a$, $\mathrm{P}(X=1)=b$라 할 때, 이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	a	b	a	1

확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$3a+2b=1$ ⋯ ㉠

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times a+1^2\times b+2^2\times a+3^2\times b+4^2\times a$

이고 $\mathrm{E}(X^2)=\dfrac{35}{6}$ 이므로

$20a+10b=\dfrac{35}{6}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$a=\dfrac{1}{6}$, $b=\dfrac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{1}{6}$

정답 ④

Theme 25 이산확률변수의 평균

85. 5

011

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	b	1

확률의 합은 1이므로

$a+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+b=1 \Rightarrow a+b=\dfrac{5}{12}$

$\mathrm{E}(3X+2)=6 \Rightarrow 3\mathrm{E}(X)+2=6 \Rightarrow \mathrm{E}(X)=\dfrac{4}{3}$

$\mathrm{E}(X)=0\times a+1\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{1}{4}+3\times b=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+3b$

$=\dfrac{5}{6}+3b=\dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow b=\dfrac{1}{6}$

$a+b=\dfrac{5}{12}$ 이므로 $a=\dfrac{1}{4}$이다.

따라서 $120ab=120\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{4}=5$이다.

답 5

86. ⑤

083

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}a$, $\mathrm{E}(X^2)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}a^2$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}a^2-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}a\right)^2$

$=\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{5}a+\dfrac{6}{25}a^2$

$\sigma(X)=\mathrm{E}(X) \Rightarrow \sqrt{\dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{5}a+\dfrac{6}{25}a^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}a$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4}-\dfrac{2}{5}a+\dfrac{6}{25}a^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{5}a+\dfrac{4}{25}a^2$

$\Rightarrow \dfrac{2}{25}a^2-\dfrac{4}{5}a=0 \Rightarrow 2a(a-10)=0$

$\Rightarrow a=10$ ($\because a>1$)

따라서 $\mathrm{E}(X^2)+\mathrm{E}(X)=1+\dfrac{2}{5}a+\dfrac{2}{5}a^2=1+4+40=45$이다.

답 ⑤

87. ①

081

(꺼낸 공에 적혀 있는 수) ⇒ 두 수의 차

$(1,\ 1) \Rightarrow 0$ 확률은 $\dfrac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\dfrac{3}{15}$

$(1,\ 2) \Rightarrow 1$ 확률은 $\dfrac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_2}=\dfrac{6}{15}$

$(1,\ 3) \Rightarrow 2$ 확률은 $\dfrac{{}_3C_1\times{}_1C_1}{{}_6C_2}=\dfrac{3}{15}$

$(2,\ 2) \Rightarrow 0$ 확률은 $\dfrac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\dfrac{1}{15}$

$(2,\ 3) \Rightarrow 1$ 확률은 $\dfrac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_6C_2}=\dfrac{2}{15}$

확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{4}{15}$	$\dfrac{8}{15}$	$\dfrac{3}{15}$	1

따라서 $\mathrm{E}(X)=\dfrac{8+6}{15}=\dfrac{14}{15}$ 이다.

답 ①

88. 40

019

앞면 ○ 뒤면 X

① 1점

○ ○ ○ X $\Rightarrow {}_4C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{4}{16}$

○ ○ ○ ○ $\Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$

$\dfrac{4}{16}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{5}{16}$

② 2점

○ ○ X X $\Rightarrow {}_4C_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{6}{16}$

③ 3점

○ X X X $\Rightarrow {}_4C_3\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{4}{16}$

X X X X $\Rightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{1}{16}$

$\dfrac{4}{16}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{5}{16}$

확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\dfrac{5}{16}$	$\dfrac{6}{16}$	$\dfrac{5}{16}$	1

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{1\times5+2\times6+3\times5}{16}=\dfrac{32}{16}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=\dfrac{1^2\times5+2^2\times6+3^2\times5}{16}=\dfrac{74}{16}=\dfrac{37}{8}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\dfrac{37}{8}-4=\dfrac{5}{8}$

따라서 $\mathrm{V}(8X)=64\mathrm{V}(X)=64\times\dfrac{5}{8}=40$이다.

답 40

89. 121

097

$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(Y=10k+1)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$
대응되는 확률이 동일하기 때문에
Y와 X의 관계식을 파악하여 구해보자.

$\mathrm{E}(X)=2,\ \mathrm{E}(X^2)=5$
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=5-4=1$

$Y=10X+1$이므로
$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(10X+1)=10\mathrm{E}(X)+1=21$
$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(10X+1)=100\mathrm{V}(X)=100$

따라서 $\mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)=121$이다.

답 121

위와 같이 풀어도 되지만 $\mathrm{P}(X)$, $\mathrm{P}(Y)$를 변형하면
좀 더 까다로운 문제를 제작할 수 있기 때문에
이번에는 정의를 이용하여 풀어보자.

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{4}k\mathrm{P}(X=k)=2,\ \mathrm{E}(X^2)=\sum_{k=1}^{4}k^2\mathrm{P}(X=k)=5$$

$$\mathrm{E}(Y)=\sum_{k=1}^{4}(10k+1)\mathrm{P}(Y=10k+1)=\sum_{k=1}^{4}(10k+1)\mathrm{P}(X=k)$$

$$=10\sum_{k=1}^{4}k\mathrm{P}(X=k)+\sum_{k=1}^{4}\mathrm{P}(X=k)=20+1=21$$

$$\mathrm{E}(Y^2)=\sum_{k=1}^{4}(10k+1)^2\mathrm{P}(Y=10k+1)=\sum_{k=1}^{4}(10k+1)^2\mathrm{P}(X=k)$$

$$=100\sum_{k=1}^{4}k^2\mathrm{P}(X=k)+20\sum_{k=1}^{4}k\mathrm{P}(X=k)+\sum_{k=1}^{4}\mathrm{P}(X=k)$$

$$=500+40+1=541$$

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=541-(21)^2=100$

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)+\mathrm{V}(Y)=21+100=121$

90. 78

102

$\mathrm{E}(X)=a+3b+5c+7b+9a=10a+10b+5c$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(X)+\frac{1}{20}-\frac{5}{10}+\frac{9}{20}=\mathrm{E}(X)$$

$$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2$$

$$=\mathrm{E}(X^2)+\frac{1}{20}-\frac{25}{10}+\frac{81}{20}-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2+\frac{8}{5}=\mathrm{V}(X)+\frac{8}{5}$$

$$=\frac{31}{5}+\frac{8}{5}=\frac{39}{5}$$

따라서 $10\times V(Y)=10\times\frac{39}{5}=78$이다.

답 78

91. 28

104

$$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{5}k\mathrm{P}(X=k)=4$$

$\mathrm{P}(Y=k)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$이므로

$$\mathrm{E}(Y)=\sum_{k=1}^{5}k\mathrm{P}(Y=k)=\sum_{k=1}^{5}k\left(\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{5}k\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{10}\sum_{k=1}^{5}k$$

$$=\frac{1}{2}\times4+\frac{1}{10}\times15=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}=a$$

따라서 $8a=8\times\frac{7}{2}=28$이다.

답 28

92. 41

126

$\mathrm{P}(Y=3k-1)=\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+a \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$

확률의 합은 1이므로

$\sum_{k=1}^{4}\mathrm{P}(Y=3k-1)=1$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{4}\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\sum_{k=1}^{4}a=\frac{1}{2}+4a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{8}$

$\mathrm{E}(X)=\sum_{k=1}^{4}k\mathrm{P}(X=k)=\frac{7}{6}$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(Y)&=\sum_{k=1}^{4}(3k-1)\mathrm{P}(Y=3k-1)\\&=\sum_{k=1}^{4}(3k-1)\left(\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{8}\right)\\&=\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{4}k\mathrm{P}(X=k)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\mathrm{P}(X=k)+\frac{1}{8}\sum_{k=1}^{4}(3k-1)\\&=\frac{3}{2}\times\frac{7}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\times\frac{4(2+11)}{2}\\&=\frac{7}{4}-\frac{1}{2}+\frac{13}{4}\\&=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}\end{aligned}$$

따라서 $\mathrm{E}\left(\frac{1}{a}Y+5\right)=\mathrm{E}(8Y+5)=8\mathrm{E}(Y)+5=8\times\frac{9}{2}+5=41$ 이다.

답 41

Tip 097번 해설에도 언급했듯이 126번에서는 대응되는 확률 ($\mathrm{P}(X)$, $\mathrm{P}(Y)$)이 서로 다르기 때문에 정의를 이용하여 풀어야 한다.

Guide step "개념파악하기 - (4) 이산확률변수 $aX+b$의 평균과 표준편차는 어떻게 구할까" 에서도 학습했듯이 $Y=aX+b$라 할 때, $\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(aX+b)=a\mathrm{E}(X)+b$이 성립하는 이유는 $\mathrm{P}(Y=y_i)=\mathrm{P}(X=x_i)$이기 때문이다.

Theme 26 이항분포의 뜻

93. 50

078

$\mathrm{B}(10,\ p)$

$\mathrm{P}(X=4)={}_{10}\mathrm{C}_4p^4(1-p)^6$

$\mathrm{P}(X=5)={}_{10}\mathrm{C}_5p^5(1-p)^5$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(X=5)$

$\Rightarrow {}_{10}\mathrm{C}_4p^4(1-p)^6=\frac{1}{3}\times{}_{10}\mathrm{C}_5p^5(1-p)^5$

$\Rightarrow 210(1-p)=12\times7p$

$\Rightarrow 5(1-p)=2p$

$\Rightarrow p=\frac{5}{7}$

따라서 $\mathrm{E}(7X)=7\mathrm{E}(X)=7\times10\times\frac{5}{7}=50$이다.

답 50

94. ①

063

$\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+25$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2 \Rightarrow \mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(X)+25-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$\Rightarrow \mathrm{E}(X)=5 \left(\because\ \mathrm{E}(X)=\frac{n}{2}>0\right)$

$\mathrm{E}(X)=\frac{n}{2}=5 \Rightarrow n=10$

따라서 $n=10$이다.

답 ①

95. ④

056

$B\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$

$V(2X)=40 \Rightarrow 4V(X)=40 \Rightarrow V(X)=10$

$\Rightarrow n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=10 \Rightarrow n=45$

따라서 $n=45$이다.

답 ④

96. ③

023

$P(X=x)={}_nC_x\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 을 변형해보자.

$P(X=x)={}_nC_x\left(\frac{1}{2}\right)^n={}_nC_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$ 이므로

확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$를 따른다.

$E(X)=n\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$

$V(X)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{55}{2}-\frac{n^2}{4}=\frac{n}{4}$

$\Rightarrow n^2+n-110=0 \Rightarrow (n+11)(n-10)=0$

$\Rightarrow n=10\ (\because n>0)$

$V(X)=\frac{5}{2}$

$V(2X)=4V(X)=4\times\frac{5}{2}=10$이다.

답 ③

Theme 27 이항분포의 활용

97. 48

028

주사위를 두 번 던져서 나온 눈의 합이 4의 배수인
확률을 구해보자.

변수가 2개이므로 표를 그려서 해결해 보자.

	1	2	3	4	5	6
1			4			
2		4				8
3	4				8	
4				8		
5			8			
6		8				12

4의 배수가 나올 확률 = 4점을 받을 확률 $=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

4점을 받는 횟수를 Y라 두면 Y는 이항분포 $B\left(64,\ \frac{1}{4}\right)$를 따른다.

전체 시행 횟수가 64회이므로 2점을 받은 횟수는 $64-Y$이므로 $X=4Y+2(64-Y)=2Y+128$ 이다.

따라서 $V(X)=4V(Y)=4\times64\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=48$이다.

답 48

98. ③

116

2 이하 (3, 0) $\Rightarrow \frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

3 이상 (0, 1) $\Rightarrow \frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

2 이하가 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하자.

15번 독립시행이고, 2 이하가 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이므로

확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$\mathrm{E}(Y)=15\times\frac{1}{3}=5$

15번 반복하였을 때, 3 이상이 나오는 횟수는 $15-Y$이므로
이동된 점 P의 좌표는 $(3Y,\ 15-Y)$이다.

점 $\mathrm{P}(3Y,\ 15-Y)$와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리를 구하면

$$\frac{|9Y+60-4Y|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|5Y+60|}{5}=Y+12=X$$

따라서 $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(Y+12)=\mathrm{E}(Y)+12=5+12=17$이다.

답 ③

Theme 28 확률밀도함수

99. ④

065

확률의 합은 1이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 2)=\frac{1}{2}\times\left(a-\frac{1}{3}+2\right)\times\frac{3}{4}=1$

$\Rightarrow a+\frac{5}{3}=\frac{8}{3} \Rightarrow a=1$

따라서 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\le X\le a\right)=\mathrm{P}\left(\frac{1}{3}\le X\le 1\right)=\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$
이다.

답 ④

100. ④

085

$\mathrm{P}(0\le X\le a)=1 \Rightarrow \frac{ac}{2}=1 \Rightarrow ac=2$

$\mathrm{P}(X\le b)-\mathrm{P}(X\ge b)=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{bc}{2}-\frac{(a-b)c}{2}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2bc-ac}{2}=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow 2bc-2=\frac{1}{2} \Rightarrow bc=\frac{5}{4}$

$\mathrm{P}(X\le b)=\frac{bc}{2}=\frac{5}{8}>\frac{1}{2}$이므로 $\sqrt{5}<b$이다.

$\mathrm{P}(X\le\sqrt{5})=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int_0^{\sqrt{5}}\frac{c}{b}x\,dx=\left[\frac{c}{2b}x^2\right]_0^{\sqrt{5}}=\frac{5c}{2b}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 5c=b$

$bc=\frac{5}{4} \Rightarrow 5c^2=\frac{5}{4} \Rightarrow c=\frac{1}{2}$ $(\because\ c>0)$

$a=4,\ b=\frac{5}{2}$

따라서 $a+b+c=4+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=7$이다.

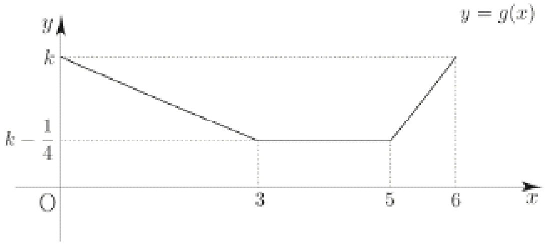
답 ④

101. 31

103

$f(x)+g(x)=k \Rightarrow g(x)=k-f(x)$이므로
$y=g(x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여
대칭이동한 후 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하여 구할 수 있다.

$y=g(x)$의 그래프를 그리면 다음과 같다.



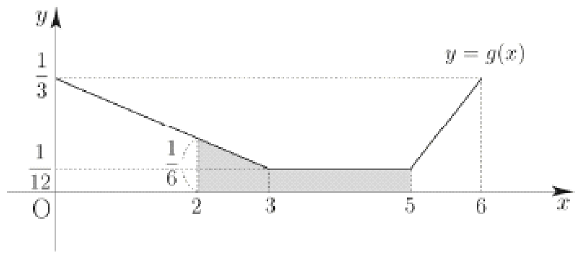
확률의 합은 1이므로

$$P(0\le Y\le 6)=\frac{3}{2}\left(k-\frac{1}{4}+k\right)+2\left(k-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{4}+k\right)$$
$$=2\left(2k-\frac{1}{4}\right)+2\left(k-\frac{1}{4}\right)$$
$$=4k-\frac{1}{2}+2k-\frac{1}{2}$$
$$=6k-1=1$$

$\Rightarrow 6k=2 \Rightarrow k=\frac{1}{3}$

$P(6k\le Y\le 15k)=P(2\le Y\le 5)$

$g(x)=-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3}\ (0\le x\le 3)$이므로 $g(2)=\frac{1}{6}$



$$P(2\le Y\le 5)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)+2\times\frac{1}{12}$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{7}{24}$$

따라서 $p+q=31$이다.

답 31

102. 10

117

$P(x\le X\le 3)=a(3-x)\ \ (0\le x\le 3)$

이 문제는 연속확률변수라는 것에 유의해야 한다.
연속확률변수에서는 넓이가 곧 확률이 되므로
확률밀도함수를 $f(x)$라 하면

$P(x\le X\le 3)=\int_x^3 f(t)dt=a(3-x)$

이지 $f(x)=a(3-x)$라고 판단하면 안 된다.

확률의 합은 1이므로

$P(0\le X\le 3)=3a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$

$$\therefore\ P(0\le X<a)=P\left(0\le X<\frac{1}{3}\right)=1-P\left(\frac{1}{3}\le X\le 3\right)$$
$$=1-\frac{1}{3}\left(3-\frac{1}{3}\right)=1-\frac{8}{9}=\frac{1}{9}$$

따라서 $p+q=10$이다.

답 10

이번에는 $f(x)$를 직접 구해서 문제를 풀어보자.

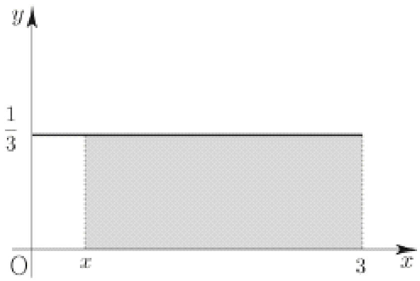
$$\int_x^3 f(t)dt=\frac{1}{3}(3-x)$$

$\Rightarrow F(3)-F(x)=\frac{1}{3}(3-x)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$-f(x)=-\frac{1}{3} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{3}$

$$\therefore\ P\left(0\le X<\frac{1}{3}\right)=\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}dx=\left[\frac{1}{3}x\right]_0^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{9}$$



$\int_x^3 \frac{1}{3}dx$는 직사각형의 넓이 $\frac{1}{3}(3-x)$인 것이 자명하다.

Theme 29 정규분포와 표준정규분포

103. ⑤

077

어느 실험실의 연구원이 어떤 식물로부터 하루 동안 추출하는 호르몬의 양을 확률변수 X라 하자.

$X \sim \mathrm{N}(30.2,\ (0.6)^2)$

$\therefore\ \mathrm{P}(29.6 \le X \le 31.4) = \mathrm{P}\left(\dfrac{29.6-30.2}{0.6} \le Z \le \dfrac{31.4-30.2}{0.6}\right)$

$= \mathrm{P}(-1 \le Z \le 2)$

$= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185$

답 ⑤

104. ③

079

$\mathrm{P}(m \le X \le m+12) = \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{12}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}(X \le m-12) = \mathrm{P}\left(Z \le -\dfrac{12}{\sigma}\right)$

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{12}{\sigma}\right) - \mathrm{P}\left(Z \le -\dfrac{12}{\sigma}\right) = 0.3664$

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{12}{\sigma}\right) = a$라 하면

$\mathrm{P}\left(Z \le -\dfrac{12}{\sigma}\right) = 0.5 - a$이므로

$a - (0.5 - a) = 0.3664 \Rightarrow a = 0.4332$

$\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5) = 0.4332$이므로

$\dfrac{12}{\sigma} = 1.5 \Rightarrow 120 = 15\sigma \Rightarrow \sigma = 8$

따라서 $\sigma = 8$이다.

답 ③

105. 95

039

(가) 조건에 의해서 $m = \dfrac{60+100}{2} = 80$

(나) $\mathrm{P}(m \le X \le m+10) + \mathrm{P}(Z \le -1) = \dfrac{1}{2}$

$\mathrm{P}(m \le X \le m+10) = \mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{10}{\sigma}\right)$이고

$\mathrm{P}(Z \le -1) = \mathrm{P}(Z \ge 1)$이므로

$\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \dfrac{10}{\sigma}\right) + \mathrm{P}(Z \ge 1) = \dfrac{1}{2}$이려면

$\dfrac{10}{\sigma} = 1 \Rightarrow \sigma = 10$

$\mathrm{N}(80,\ 10^2)$

$\mathrm{P}(X \ge k) = \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{k-80}{10}\right) = 0.0668$

$0.0668 = 0.5 - 0.4332 = 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)$이므로

$\dfrac{k-80}{10} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow k = 95$

따라서 $k = 95$이다.

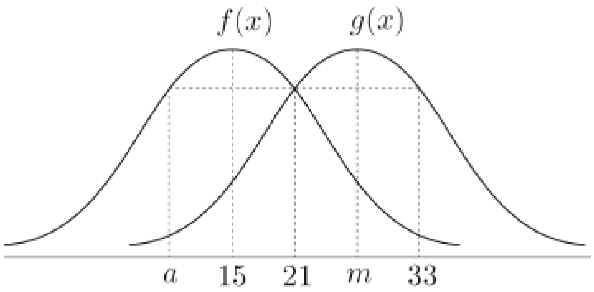
답 95

106. 69

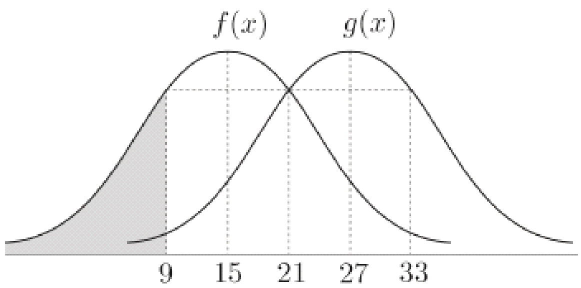
041

표준편차가 같으므로 $f(x)$와 $g(x)$의 곡선의 모양은 같다.

$f(a)=f(21)=g(21)$, $X \sim \mathrm{N}(15,\ \sigma^2)$, $Y \sim \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$
를 바탕으로 그림을 그리면 다음과 같다.



$\dfrac{a+21}{2}=15 \Rightarrow a=9,\ m=\dfrac{21+33}{2}=27$



$\mathrm{P}(X \le a)=\mathrm{P}(X \le 9)=0.18$이므로
$\mathrm{P}(9 \le X \le 15)=0.32$이다.

대칭성에 의하여 $\mathrm{P}(21 \le Y \le 33)=2 \times 0.32=0.64$이므로
$b=33$이다.

따라서 $a+b+m=9+33+27=69$이다.

답 69

107. 673

121

$X \sim \mathrm{N}(1,\ t^2)$

$\mathrm{P}(X \le 5t)=\mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{5t-1}{t}\right) \ge \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{5t-1}{t} \ge 0 \Rightarrow 5t-1 \ge 0\ (\because\ t>0)$

$\Rightarrow t \ge \dfrac{1}{5}$

$\mathrm{P}(t^2-t+1 \le X \le t^2+t+1)$
$=\mathrm{P}(t-1 \le Z \le t+1)$

구간의 길이가 t에 상관없이 $t+1-(t-1)=2$로 일정하므로
t의 값이 확률변수 Z의 평균인 0에 가까울수록
$\mathrm{P}(t-1 \le Z \le t+1)$의 값은 증가한다.
$t \ge \dfrac{1}{5}$이므로 $t=\dfrac{1}{5}$일 때, $\mathrm{P}(t-1 \le Z \le t+1)$는 최댓값을
가진다.

$k=\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{5}-1 \le Z \le \dfrac{1}{5}+1\right)$
$=\mathrm{P}(-0.8 \le Z \le 1.2)$
$=0.288+0.385=0.673$

따라서 $1000 \times k=673$이다.

답 673

Theme 30 이항분포와 정규분포

108. ①

049

${}_{400}C_k\left(\frac{4}{5}\right)^k\left(\frac{1}{5}\right)^{400-k}$ 는 독립시행의 확률이므로 400회의 독립시행에서 특정 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 K라 하면 확률변수 K는 이항분포 $\mathrm{B}\left(400,\ \frac{4}{5}\right)$를 따른다.

$\sum_{k=336}^{400} {}_{400}C_k\left(\frac{4}{5}\right)^k\left(\frac{1}{5}\right)^{400-k}$ 를 일일이 풀어서 더하기에는 숫자가 너무 복잡해 보인다. 어떻게 문제를 해결해야 할까?

$np \geq 5$이므로 정규분포화가 가능하니 이항분포를 정규분포로 변환하여 문제를 해결해 보자.
$\mathrm{B}(n,\ p) \Rightarrow \mathrm{N}(np,\ npq)$
$K \sim \mathrm{N}(320,\ 8^2)$

$$\mathrm{P}(K \geq 336) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{336-320}{8}\right)$$
$$= \mathrm{P}(Z \geq 2) = 0.5 - 0.4772 = 0.0228$$

따라서 $\sum_{k=336}^{400} {}_{400}C_k\left(\frac{4}{5}\right)^k\left(\frac{1}{5}\right)^{400-k} = 0.0228$이다.

답 ①

109. ③

051

소수의 눈 2, 3, 5이 나올 확률 $\frac{1}{2} \Rightarrow$ 1점

그 외의 눈 1, 4, 6이 나올 확률 $\frac{1}{2} \Rightarrow$ 3점

소수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하자.

64회 독립시행이고, 소수의 눈이 나오는 확률은 $\frac{1}{2}$이므로 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(64,\ \frac{1}{2}\right)$를 따른다.

그 외의 눈이 나오는 횟수는 $64-X$이므로
점수를 Y라 하면 $Y = X + 3(64-X) = 192 - 2X$이다.
$\mathrm{P}(Y \geq 136) = \mathrm{P}(192 - 2X \geq 136) = \mathrm{P}(X \leq 28)$이므로
$\mathrm{P}(X \leq 28)$를 구하면 된다.

이때, 이항분포를 이용하여 확률계산을 한다면
$\mathrm{P}(X=0) + \mathrm{P}(X=1) + \cdots + \mathrm{P}(X=28)$이다.
이는 독립시행확률로 구해야 하는 만큼 매우 복잡해진다.

어떻게 문제를 해결할 수 있을까?

$np \geq 5$이므로 정규분포화가 가능하니 이항분포를 정규분포로 변환하여 문제를 해결해보자.
$\mathrm{B}(n,\ p) \Rightarrow \mathrm{N}(np,\ npq)$
$X \sim \mathrm{N}(32,\ 4^2)$

$\therefore\ \mathrm{P}(X \leq 28) = \mathrm{P}(Z \leq -1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$

답 ③

110. 994

29. 출제의도 : 이항분포와 정규분포의 관계를 이해하고 구하는 확률을 정규분포로 근사하여 구할 수 있는가?

풀이 :

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 4 이하일 확률은 $\frac{2}{3}$, 5 이상일 확률은 $\frac{1}{3}$ 이므로 주사위를 16200번 던졌을 때 5 이상의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하면 확률변수 X는 이항분포

$\mathrm{B}\left(16200,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르고,

$\mathrm{E}(X) = 16200 \times \frac{1}{3} = 5400$

$\mathrm{V}(X) = 16200 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 3600 = 60^2$

이다. 이때 16200은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(5400,\ 60^2)$을 따른다.

점 A의 위치가 5700 이하이려면 주사위를 던져 나온 눈의 수가 4 이하인 횟수에서 5 이상인 횟수를 뺀 값이 5700 이하이어야 하므로

$(16200 - X) - X \leq 5700$

$X \geq 5250$

따라서 구하는 확률을 표준정규분포표를 이용해 구한 값 k는

$k = \mathrm{P}(X \geq 5250)$

$= \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{5250 - 5400}{60}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \geq -2.5)$

$= \mathrm{P}(-2.5 \leq Z \leq 0) + \mathrm{P}(Z \geq 0)$

$= \mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.5) + \mathrm{P}(Z \geq 0)$

$= 0.494 + 0.5$

$= 0.994$

따라서

$1000 \times k = 1000 \times 0.994 = 994$

정답 994

Theme 31 표본평균의 뜻과 평균, 분산, 표준편차

111. ①

005

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

이 모집단에서 크기가 2인 표본을 복원추출하여
추출한 표본을 각각 X_1, X_2라고 하자.

$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2}{2}$ 의 값을 구하기 위해서

변수가 2개이니 표를 그려서 해결해 보자.

X_1 \ X_2	1	2	3
1	1	1.5	2
2	1.5	2	2.5
3	2	2.5	3

따라서 $\mathrm{P}(\overline{X}=2)=2\mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=2)\mathrm{P}(X=2)$

$$=2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

이다.

답 ①

112. ②

007

X	0	1	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	a	b	1

이 모집단에서 크기가 3인 표본을 복원추출하여
추출한 표본을 각각 X_1, X_2, X_3라고 하자.

$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}=3$이 되려면

$(X_1,\ X_2,\ X_3)=(3,\ 3,\ 3)$일 때이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}=3)=\dfrac{27}{125}\Rightarrow b^3=\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\Rightarrow b=\dfrac{3}{5}$

확률의 합은 1이므로

$\dfrac{1}{5}+a+\dfrac{3}{5}\Rightarrow a=\dfrac{1}{5}$

$\overline{X}=\dfrac{X_1+X_2+X_3}{3}=1$이 되려면

$(X_1,\ X_2,\ X_3)=(0,\ 0,\ 3),\ (1,\ 1,\ 1)$

따라서

$\mathrm{P}(\overline{X}=1)={}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\left(\dfrac{3}{5}\right)+\left(\dfrac{1}{5}\right)^3$

$$=\frac{9}{125}+\frac{1}{125}=\frac{10}{125}=\frac{2}{25}$$

이다.

답 ②

113. ④

049

확률의 합은 1이므로

$\dfrac{1}{6}+a+b=1\Rightarrow a+b=\dfrac{5}{6}$

$\mathrm{E}(X^2)=4a+16b=\dfrac{16}{3}\Rightarrow a+4b=\dfrac{4}{3}$

$a+b=\dfrac{5}{6}$, $a+4b=\dfrac{4}{3}$를 연립하면 $a=\dfrac{4}{6}$, $b=\dfrac{1}{6}$이다.

X	0	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{8+4}{6}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=\dfrac{16}{3}$

모분산 $\sigma^2=\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\dfrac{16}{3}-4=\dfrac{4}{3}$

$n=20$

따라서 $\mathrm{V}(\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}=\dfrac{\frac{4}{3}}{20}=\dfrac{4}{60}=\dfrac{1}{15}$이다.

답 ④

114. ④

074

X	10	20	30	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	a	$\frac{1}{2}-a$	1

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=5+20a+15-30a=20-10a=18$

$\Rightarrow 2=10a \Rightarrow a=\frac{1}{5}$

X	10	20	30	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

이 모집단에서 크기가 2인 표본을 복원추출하여 추출한 표본을 각각 X_1, X_2라고 하자.

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$의 값을 구하기 위해서 변수가 2개이니 표를 그려서 해결해 보자.

X_1 \ X_2	10	20	30
10	10	15	20
20	15	20	25
30	20	25	30

따라서

$\mathrm{P}(\overline{X}=20)=2\mathrm{P}(X=10)\mathrm{P}(X=30)+\mathrm{P}(X=20)\mathrm{P}(X=20)$

$$=2\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{10}+\frac{1}{25}=\frac{17}{50}$$

이다.

답 ④

115. ⑤

075

① 주사위에서 나온 눈의 수가 3의 배수인 경우

주사위에서 3의 배수가 나올 확률은 $\frac{1}{3}$

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공을 순서쌍으로 표현하면 (1, 2), (1, 3), (2, 3)이므로

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의
차가 1일 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$
차가 2일 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

② 주사위에서 나온 눈의 수가 3의 배수가 아닌 경우

주사위에서 3의 배수가 나오지 않을 확률은 $\frac{2}{3}$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공을 순서쌍으로 표현하면 (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)이므로

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의
차가 1일 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{9}$
차가 2일 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{9}$
차가 3일 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$

이 시행에서 기록한 두 개의 수의 차를 확률변수 X라 하자.
확률변수 X의 분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

이 모집단에서 크기가 2인 표본을 복원추출하여
추출한 표본을 각각 X_1, X_2라고 하자.

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$의 값을 구하기 위해서

변수가 2개이니 표를 그려서 해결해 보자.

X_1 \ X_2	1	2	3
1	1	1.5	2
2	1.5	2	2.5
3	2	2.5	3

따라서

$\mathrm{P}(\overline{X}=2)=2\mathrm{P}(X=1)\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=2)\mathrm{P}(X=2)$

$$=2\times\frac{5}{9}\times\frac{1}{9}+\frac{3}{9}\times\frac{3}{9}=\frac{10}{81}+\frac{9}{81}=\frac{19}{81}$$

이다.

답 ⑤

Theme 32 표본평균의 분포

116. ⑤

036

이 공장에서 생산하는 화장품 1개의 내용량을 확률변수 X라 하자.

$X \sim \mathrm{N}(201.5,\ (1.8)^2)$

$n=9$이므로

$\overline{X} \sim \mathrm{N}(201.5,\ (0.6)^2)$

따라서 $\mathrm{P}(\overline{X}\geq 200)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{200-201.5}{0.6}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq -2.5)$

$=0.4938+0.5=0.9938$

이다.

답 ⑤

117. ③

059

$X \sim \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$

$\mathrm{P}(X\geq 3.4)=\frac{1}{2} \Rightarrow m=3.4$

$\mathrm{P}(X\leq 3.9)+\mathrm{P}(Z\leq -1)$

$=\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{3.9-3.4}{\sigma}\right)+\mathrm{P}(Z\leq -1)$

$=\mathrm{P}\left(Z\leq \frac{0.5}{\sigma}\right)+\mathrm{P}(Z\leq -1)=1$

$\mathrm{P}(Z\leq 1)+\mathrm{P}(Z\leq -1)=1$이므로

$\frac{0.5}{\sigma}=1 \Rightarrow \sigma=0.5$

$X \sim \mathrm{N}(3.4,\ (0.5)^2)$

$n=25$이므로

$\overline{X} \sim \mathrm{N}(3.4,\ (0.1)^2)$

따라서 $\mathrm{P}(\overline{X}\geq 3.55)=\mathrm{P}\left(Z\geq \frac{3.55-3.4}{0.1}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 1.5)=0.5-0.4332=0.0668$

이다.

답 ③

118. ⑤

061

$X \sim \mathrm{N}(220,\ \sigma^2)$

$\overline{X} \sim \mathrm{N}\left(220,\ \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$

$Y \sim \mathrm{N}\left(240,\ \left(\frac{3}{2}\sigma\right)^2\right)$

$\sigma(\overline{Y}) = \dfrac{\frac{3}{2}\sigma}{\sqrt{9n}} = \dfrac{\sigma}{2\sqrt{n}}$

$\overline{Y} \sim \mathrm{N}\left(240,\ \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\right)^2\right)$

$\mathrm{P}(\overline{X} \le 215) = \mathrm{P}(Z \le -1) = 0.1587$

$\Rightarrow \mathrm{P}(\overline{X} \le 215) = \mathrm{P}\left(\overline{X} \le \dfrac{215-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$

$= \mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{-5}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5$

따라서 $\mathrm{P}(\overline{Y} \ge 235) = \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{235-240}{\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \ge -2)$

$= 0.4772 + 0.5 = 0.9772$

이다.

답 ⑤

119. ⑤

015

정육점에서 판매하는 삼겹살 1인분의 무게를 확률변수 X라 하자.

$X \sim \mathrm{N}(200,\ 12^2)$

$n = 9$이므로

$\overline{X} \sim \mathrm{N}(200,\ 4^2)$

9명이 구매한 삼겹살 무게의 총합이 1872 이하일 확률은 $\mathrm{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_9 \le 1872)$이다.

여기서 어떻게 해결해야 할까?

우리는 표본의 합에 대한 분포를 배운 적이 없다.
따라서 우리가 분포를 알고 있는 표본평균으로 변환하기 위해 부등호 양변을 9로 나누어 해결해 보자.

$\therefore\ \mathrm{P}\left(\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_9}{9} \le \dfrac{1872}{9}\right)$

$= \mathrm{P}(\overline{X} \le 208)$

$= \mathrm{P}\left(Z \le \dfrac{208-200}{4}\right)$

$= \mathrm{P}(Z \le 2) = 0.5 + 0.4772$

$= 0.9772$

따라서 구하고자 하는 확률은 0.9772이다.

답 ⑤

120. ①

013

$X \sim \mathrm{N}(45,\ 4^2)$

$n = 64$이므로

$\overline{X} \sim \mathrm{N}\left(45,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$

$\mathrm{P}(X \geq 49) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{49-45}{4}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 1)$

$\mathrm{P}(\overline{X} \geq k) = \mathrm{P}\left(Z \geq \frac{k-45}{\frac{1}{2}}\right) = \mathrm{P}(Z \geq 2k-90)$

$\mathrm{P}(X \geq 49) + \mathrm{P}(\overline{X} \geq k) = 1$

$\Rightarrow \mathrm{P}(Z \geq 1) + \mathrm{P}(Z \geq 2k-90) = 1$

$\Rightarrow 1 = -(2k-90) \Rightarrow k = 44.5$

따라서

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(|\overline{X}-k| \geq \frac{1}{2}\right) &= \mathrm{P}\left(\overline{X}-k \geq \frac{1}{2}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{X}-k \leq -\frac{1}{2}\right) \\ &= \mathrm{P}\left(\overline{X} \geq k+\frac{1}{2}\right) + \mathrm{P}\left(\overline{X} \leq k-\frac{1}{2}\right) \\ &= \mathrm{P}(\overline{X} \geq 45) + \mathrm{P}(\overline{X} \leq 44) \\ &= 1 - \mathrm{P}(44 \leq \overline{X} \leq 45) \\ &= 1 - \mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 0) \\ &= 1 - 0.4772 = 0.5228 \end{aligned}$$

이다.

답 ①

Theme 33 모평균의 추정

121. ②

052

$X \sim \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $n = 16$, 신뢰도 95% $(k = 1.96)$

신뢰구간의 일반형은 $\overline{x} - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x} + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

신뢰구간이 $a \leq m \leq b$일 때,

$b - a = 2 \times k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (=신뢰구간의 길이)

이 성립하므로 이를 이용하여 구해보자.

$746.1 \leq m \leq 755.9$이므로

$9.8 = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \Rightarrow \sigma = 10$

n개를 임의추출하여 얻은 표본평균을 이용하여
구하는 m에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$
이므로

$b - a \leq 6 \Rightarrow 2 \times 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq 6$

$\Rightarrow 8.6 \leq \sqrt{n} \Rightarrow 73.96 \leq n$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 74이다.

답 ②

122. ②

062

어느 자동차 회사에서 생산하는 전기 자동차의 1회 충전 주행거리를 확률변수 X라 하자.

$X \sim \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $n=100$, 신뢰도 : 95% $(k=1.96)$

$n=400$, 신뢰도 : 99% $(k=2.58)$

신뢰구간의 일반형은 $\overline{x}-k\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+k\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$a=\overline{x_1}-1.96\times\dfrac{\sigma}{10}$

$b=\overline{x_1}+1.96\times\dfrac{\sigma}{10}$

$c=\overline{x_2}-2.58\times\dfrac{\sigma}{20}=\overline{x_2}-1.29\times\dfrac{\sigma}{10}$

$d=\overline{x_2}+2.58\times\dfrac{\sigma}{20}=\overline{x_2}+1.29\times\dfrac{\sigma}{10}$

$a=c \Rightarrow \overline{x_1}-1.96\times\dfrac{\sigma}{10}=\overline{x_2}-1.29\times\dfrac{\sigma}{10}$

$\Rightarrow \overline{x_1}-\overline{x_2}=0.67\times\dfrac{\sigma}{10}$

$\overline{x_1}-\overline{x_2}=1.34 \Rightarrow 0.67\times\dfrac{\sigma}{10}=1.34$

$\Rightarrow \sigma=20$

따라서 $b-a=2\times1.96\times\dfrac{20}{10}=7.84$이다.

답 ②

123. ②

065

$X \sim \mathrm{N}(m,\ 5^2)$

신뢰구간의 일반형은 $\overline{x}-k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+k\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

① 표본평균 $\overline{x_1}$, 표본의 크기 25, 신뢰도 95% $(k=1.96)$

$\overline{x_1}-1.96\dfrac{5}{\sqrt{25}} \le m \le \overline{x_1}+1.96\dfrac{5}{\sqrt{25}}$

$\Rightarrow \overline{x_1}-1.96 \le m \le \overline{x_1}+1.96$

$80-a \le m \le 80+a$이므로 $\overline{x_1}=80,\ a=1.96$

② 표본평균 $\overline{x_2}$, 표본의 크기 n 신뢰도 95% $(k=1.96)$

$\overline{x_2}-1.96\dfrac{5}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x_2}+1.96\dfrac{5}{\sqrt{n}}$

$\dfrac{15}{16}\overline{x_1}-\dfrac{5}{7}a \le m \le \dfrac{15}{16}\overline{x_1}+\dfrac{5}{7}a$이므로

$\dfrac{15}{16}\overline{x_1}=\overline{x_2} \Rightarrow \overline{x_2}=\dfrac{15}{16}\times80=75$

$\dfrac{5}{7}a=1.96\dfrac{5}{\sqrt{n}} \Rightarrow \dfrac{1.96}{7}=\dfrac{1.96}{\sqrt{n}} \Rightarrow n=49$

따라서 $n+\overline{x_2}=49+75=124$이다.

답 ②

124. 45

028

$X \sim \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $n=49$

신뢰구간의 일반형은 $\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때,

ⅰ) $b-a=2\times k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ⅱ) $a+b=2\overline{x}$

이 성립하므로 이를 이용하여 구해보자.

$2\overline{x}-1.87 \le m \le 2\overline{x}-1.73$

ⅰ) $b-a=2\times k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$(2\overline{x}-1.73)-(2\overline{x}-1.87)=2\times 1.96\times\frac{\sigma}{7}$

$\Rightarrow 0.14=2\times 0.28\times\sigma$

$\Rightarrow \sigma=\frac{1}{4}$

ⅱ) $a+b=2\overline{x}$

$2\overline{x}-1.87+2\overline{x}-1.73=2\overline{x} \Rightarrow 2\overline{x}=3.6 \Rightarrow \overline{x}=1.8$

따라서 $100\times\overline{x}\times\sigma=100\times 1.8\times\frac{1}{4}=180\times\frac{1}{4}=45$이다.

답 45

125. 12

057

$X \sim \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$

① $\overline{x}=75$, $n=16$, 신뢰도 95% $(k=1.96)$

신뢰구간의 일반형은 $\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$75-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{16}} \le m \le 75+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$

$\Rightarrow 75-0.49\sigma \le m \le 75+0.49\sigma$

신뢰구간이 $a \le m \le b$ 이므로 $b=75+0.49\sigma$이다.

② $\overline{x}=77$, $n=16$, 신뢰도 99% $(k=2.58)$

신뢰구간의 일반형은 $\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$77-2.58\frac{\sigma}{\sqrt{16}} \le m \le 77+2.58\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$

$\Rightarrow 77-0.645\sigma \le m \le 77+0.645\sigma$

신뢰구간이 $c \le m \le d$ 이므로 $d=77+0.645\sigma$이다.

$d-b=3.86$

$\Rightarrow 77+0.645\sigma-(75+0.49\sigma)=3.86$

$\Rightarrow 2+0.155\sigma=3.86$

$\Rightarrow 0.155\sigma=1.86$

$\Rightarrow \sigma=12$

따라서 $\sigma=12$이다.

답 12

126. 25

060

$X \sim \mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$, $n=49$, 신뢰도 95% $(k=1.96)$

신뢰구간의 일반형은 $\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

신뢰구간이 $a \le m \le b$일 때,

i) $b-a=2\times k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ii) $a+b=2\overline{x}$

이 성립하므로 이를 이용하여 구해보자.

$1.73 \le m \le 1.87$

i) $b-a=2\times k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$1.87-1.73=2\times 1.96\times \frac{\sigma}{\sqrt{49}} \Rightarrow 0.14=0.56\sigma \Rightarrow \sigma=\frac{1}{4}$

ii) $a+b=2\overline{x}$

$1.73+1.87=2\overline{x} \Rightarrow \overline{x}=1.8$

$$\frac{\sigma}{\overline{x}}=\frac{\frac{1}{4}}{1.8}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{18}{10}}=\frac{10}{72}=\frac{5}{36}=k$$

따라서 $180k=180\times\frac{5}{36}=25$이다.

답 25