1.3 II단원 : 미분계수를 구할 때의 원칙 확장

수학2에서는 미분계수 $f'(a)$를 구할 때,
(1) 미분계수의 정의를 이용하여 $f'(a)$를 구하거나
(2) 양함수로 표현된 식 $y=f(x)$을 x에 대하여 미분하여 도함수 $f'(x)$를 구하고
도함수 $f'(x)$에 $x=a$를 대입하는 방법을 배운다.
미적분에서는 양함수 표현 뿐만이 아니라 함수의 다른 표현 방식인 매개변수 표현, 음함수 표현으로 되어 있는 경우에도 알맞은 미분법을 적용하여 미분계수의 값을 구할 수 있다.

미적분 단원에서 학습한 미분법들의 핵심은 합성함수의 미분법이다. 합성함수의 미분법은 다음과 같이 유도하는데, 이 과정을 정확히 알고 있어야 한다.

두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수를 구해보자.

(1) 함수 $u=g(x)$에서 x의 증분 Δx에 대한 u의 증분을 Δu라 하고,
함수 $y=f(u)$에서 u의 증분 Δu에 대한 y의 증분을 Δy라고 하면

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}\ (\Delta u\neq 0)$$

이다.

(2) 두 함수 $y=f(u)$, $u=g(x)$가 미분가능하므로

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{dy}{du},\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{du}{dx}$$

이다. 이때, 미분가능한 함수 $u=g(x)$는 연속이므로 $\Delta x\to 0$일 때 $\Delta u\to 0$이다.

(3) 따라서

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}$$

이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$가 성립한다.

여기서 $\dfrac{dy}{dx}=\{f(g(x))\}'$, $\dfrac{dy}{du}=f'(u)=f'(g(x))$, $\dfrac{du}{dx}=g'(x)$이므로 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$를
$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$로 표현할 수 있다.

함수를 표현하는 새로운 표현 방식 두 가지를 학습하는데, 하나는 매개변수로 나타낸 함수, 다른 하나는 음함수 표현법이다. 각각을 다음과 같이 알아두면 된다.

일반적으로 두 변수 x, y 사이의 관계가 변수 t를 매개로 하여

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

와 같이 나타내어질 때, 변수 t를 x, y의 매개변수라 하고 두 함수 $x = f(t)$, $y = g(t)$를 매개변수로 나타낸 함수라고 한다.

예를 들어, 매개변수 t로 나타낸 함수

$$x = 2t, \quad y = 3t - 1$$

에서 t를 소거하여 x, y 사이의 관계로 나타내면 $y = \frac{3}{2}x - 1$인데, 위와 같이 x, y를 각각 t에 대한 함수로 나타낸 것을 '함수 $y = \frac{3}{2}x - 1$을 매개변수 t로 나타낸 함수'라고 한다.

원의 방정식 $x^2 + y^2 = 1$은 열린구간 $(-1, 1)$에 속하는 임의의 x값에 대응되는 y값이 두 개이므로 닫힌구간 $[-1, 1]$을 정의역으로 생각했을 때 함수의 정의를 만족시키지 않는다.

그러나 $x^2 + y^2 = 1$에서 y의 값의 범위를 $y \geq 0$ 또는 $y \leq 0$으로 정하고 y를 x에 대한 식으로 나타내면

$$y \geq 0 \text{일 때 } y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y \leq 0 \text{일 때 } y = -\sqrt{1 - x^2}$$

이고, 이들은 모두 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 y는 x의 함수가 된다.

일반적으로 방정식 $f(x, y) = 0$에서 x, y의 값의 범위를 적당히 정하면 y는 x의 함수가 되게 할 수 있다.
이와 같이 x의 함수 y가 방정식

$$f(x, y) = 0$$

의 꼴로 주어졌을 때, y를 x의 음함수 표현이라 한다.

예를 들어, $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $xy - x + y = 0$은 모두 음함수 표현이다.

위와 같이 매개변수, 음함수 꼴로 표현된 상태에서의 미분법은 다음과 같은 과정을 거쳐서 얻는다.

두 함수 $f(t)$, $g(t)$가 미분가능하고 $f'(t) \neq 0$인 t에서, 매개변수 t로 나타낸 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$의 도함수 $\frac{dy}{dx}$를 구해 보자.

매개변수 t의 증분 Δt에 대한 x의 증분을 Δx, y의 증분을 Δy라 하면 함수 $x=f(t)$, $y=g(t)$가 미분가능하므로

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt}$$

이다. 함수 $x=f(t)$가 미분가능하고 $f'(t) \neq 0$일 때, 역함수가 존재하며 역함수는 연속임이 알려져 있다. 따라서 $\Delta x \to 0$일 때 $\Delta t \to 0$이다.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

이다.

방정식 $x^2+y^2-1=0$에서 $\frac{dy}{dx}$를 구해 보자.

y를 x의 함수로 보고, 양변의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) - \frac{d}{dx}(1) = \frac{d}{dx}(0)$$

이다. 이때, 합성함수의 미분법에 의하여

$$2x + \frac{d}{dy}(y^2) \times \frac{dy}{dx} = 0$$

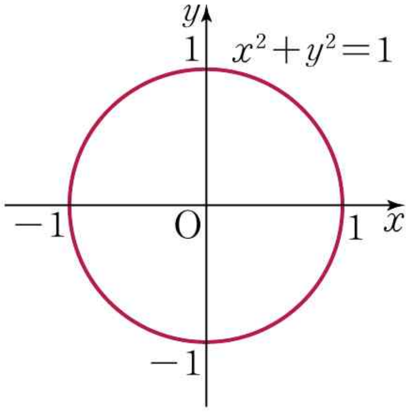
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad (y \neq 0)$$

이다. 이와 같이 x의 함수 y가 음함수 표현 $f(x, y)=0$의 꼴로 주어졌을 때, y를 x의 함수로 보고 양변의 각 항을 x에 대하여 미분하여 $\frac{dy}{dx}$를 구하는 것을 음함수의 미분법이라고 한다.

음함수 미분법에 대한 이해

음함수의 미분법을 수학적으로 엄밀하게 다루는 것은 고등학교 수학의 수준을 넘는다.
따라서 간단한 경우에 대한 구체적인 예를 들어 직관적으로 다룬다.



음함수 표현 $x^2+y^2-1=0$ 에서

y 를 x 에 대한 함수로 보고

합성함수의 미분법을 적용하면 $2x+2y\times\dfrac{dy}{dx}=0$ 에서 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ 와 같은 식을 얻는다. 이 식의 의미를 우리가 알고 있는 곡선 $x^2+y^2=1$ 에서 생각해보자.

$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ 이므로 $-1<x<1$ 인 x 와 $0<y\le 1$ 또는 $-1\le y<0$ 인 y 의 범위에서, 즉 $y\ne 0$ 만을 제외하면

점 $(x,\ y)$ 에서 원에 접하는 접선의 기울기가 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ 라는 것

을 납득할 수 있다. 특히, 식 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ 에서 분모가 0이 되는 $x=1,\ y=0$ 에서는 접선의 기울기가 존재하지 않음을 관찰할 수 있다. 이러한 상황은 곡선의 모양을 알지 못하더라도, 분모가 0이 되는 상황에 $\dfrac{dy}{dx}$ 가 정의되지 않는 것으로 이해할 수 있다.

y 를 x 에 대한 함수로 보고 나서 얻은 $\dfrac{dy}{dx}$ 는 마치 y 와 x 가 함수 관계를 갖는 특정한 $x,\ y$ 의 값의 범위에서만 작동하는 $\dfrac{dy}{dx}$ 로 생각될 수 있으나 그렇지 않다. 원래의 방정식이 만족될 수 있는 $x,\ y$ 의 범위에 속하는 모든 점 $(x,\ y)$ 에서의 접선의 기울기를 의미한다. 예를 들어, $x=\dfrac{1}{2}$ 일 때 y 의 값 $\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 가 방정식 $x^2+y^2-1=0$ 을 만족시키지만 점 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 에서의 기울기는 각각 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ 에서

$$\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{에서의 기울기 : }-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\text{에서의 기울기 : }\frac{1}{\sqrt{3}}$$

임을 알 수 있다.

일반적으로 y 를 x 의 함수로 보고 얻은 $\dfrac{dy}{dx}$ 에서 분모가 0이 되는 $(x,\ y)$ 는 정의되지 않는 점이거나, $\dfrac{dy}{dx}$ 가 존재하지 않는 점이다.

문제 1.18 교과서 예제

함수 $y=e^{2x+1}$ 을 미분하시오.

SOLUTION.

$u=2x+1$ $\cdots$ ①로 놓으면 $y=e^{u}$ $\cdots$ ②이므로

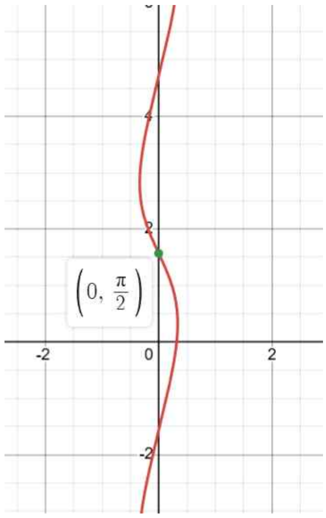
②에서 $\dfrac{dy}{du}=e^{u}$ 이고 ①에서 $\dfrac{du}{dx}=2$ 이다.

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\times\dfrac{du}{dx}$ 이므로 $\dfrac{dy}{dx}=e^{u}\times 2=2e^{2x+1}$ 이다.

문제 1.19 2021학년도 9월 모의고사 가형 6번

곡선 $\pi x=\cos y+x\sin y$ 위의 점 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 에서의 접선의 기울기는?

SOLUTION.



y 를 x 의 함수로 보고 양변을 x 에 대하여 미분하면

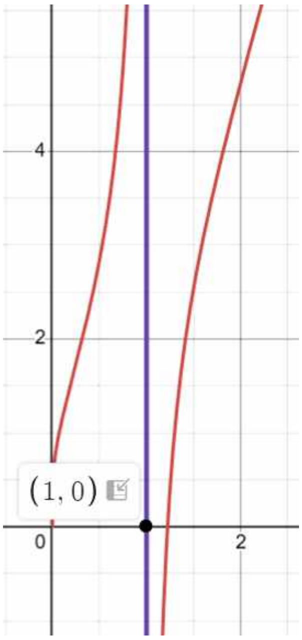
$$\pi=-\sin y\times\frac{dy}{dx}+\sin y+x\cos y\times\frac{dy}{dx}\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=\frac{\pi-\sin y}{x\cos y-\sin y}$$

이다. 따라서 점 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{dy}{dx}=1-\pi$ 이다.

문제 1.20 2023학년도 6월 모의고사 미적분 24번

곡선 $x^2 - y\ln x + x = e$ 위의 점 $(e,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는?

SOLUTION.



y를 x의 함수로 보고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x - \frac{dy}{dx}\ln x - y \times \frac{1}{x} + 1 = 0 \ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 - y + x}{\ln x \times x}$$

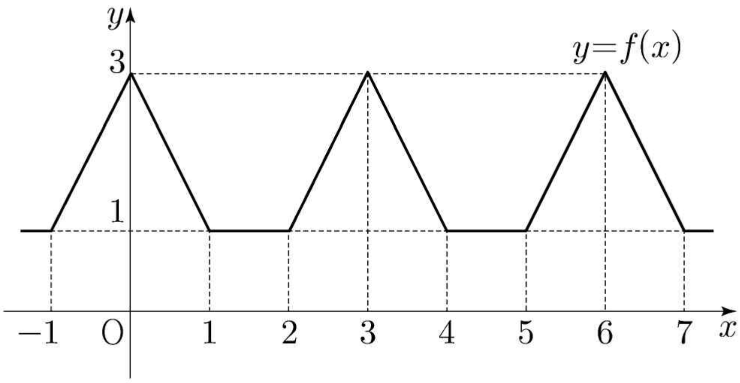
이다. 따라서 점 $(e,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{dy}{dx} = e + 1$이다.

문제 1.21 2021학년도 6월 모의고사 가형 30번

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$는 $0 \le x < 3$일 때 $f(x) = |x-1| + |x-2|$이고,
모든 실수 x에 대하여 $f(x+3) = f(x)$를 만족시킨다. 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \lim_{h \to 0+} \left| \frac{f(2^{x+h}) - f(2^x)}{h} \right|$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 $x = a$에서 불연속인 a의 값 중에서 열린구간 $(-5, 5)$에 속하는 모든 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ (n은 자연수)라 할 때, $n + \sum_{k=1}^{n} \frac{g(a_k)}{\ln 2}$의 값을 구하시오.



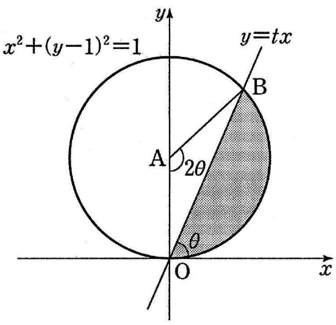
문제 1.22 2015학년도 6월 모의고사 B형 21번

양의 실수 t 에 대하여 좌표평면에서 x, y 에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2 \le 1 \\ y \le tx \end{cases}$$

가 나타내는 영역의 넓이를 $f(t)$ 라 하자. 다음은 $f'(2)$ 의 값을 구하는 과정이다.

원 $C: x^2+(y-1)^2=1$ 의 중심을 A, 원 C 와 직선 $l: y=tx$ 가 만나는 두 점을 각각 O, B 라 하자.



직선 l 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 라 하면 $\angle \mathrm{OAB}=2\theta$ 이다. 주어진 연립부등식이 나타내는 영역의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하면

$$g(\theta)=\theta-\boxed{\text{(가)}}$$

이다. $t=\tan\theta$ 이므로 $g(\theta)=f(t)=f(\tan\theta)$ 이고,
합성함수의 미분법에 의하여

$$g'(\theta)=f'(t)\times\boxed{\text{(나)}}$$

이다. $t=2$ 일 때, $\tan\theta=2$ 이므로 $f'(2)=\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $h_1(\theta)$, $h_2(\theta)$ 라 하고 (다)에 알맞은 수를 a 라 할 때, $a\times h_1\left(\frac{\pi}{4}\right)\times h_2\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 의 값은?

문제 1.50에 대한 비교 문제

양의 실수 t 에 대하여 좌표평면에서 x, y 에 대한 연립부등식

$$\begin{cases} x^2+(y-1)^2 \le 1 \\ y \le tx \end{cases}$$

가 나타내는 영역의 넓이를 $f(t)$ 라 할 때, $f'(2)$ 의 값을 구하시오.

문제 1.23 2014학년도 6월 모의고사 B형 30번

좌표평면에서 곡선 $y=x^2+x$ 위의 두 점 A, B의 x좌표를 각각 s, t $(0<s<t)$라 하자. 양수 k에 대하여 두 직선 OA, OB와 곡선 $y=x^2+x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 k가 되도록 하는 점 $(s,\ t)$가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C 위의 점 중에서 점 $(1,\ 0)$과의 거리가 최소인 점의 x좌표가 $\frac{2}{3}$일 때, $k=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

문제 1.24 2017학년도 6월 모의고사 가형 29번

양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$ 에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t\ (t \geq 1)$ 에서의 위치 $(x,\ y)$ 가

$$\begin{cases} x = 2\ln t \\ y = f(t) \end{cases}$$

이다. 점 P 가 점 $(0,\ f(1))$ 로부터 움직인 거리가 s 가 될 때 시각 t 는 $t = \dfrac{s + \sqrt{s^2+4}}{2}$ 이고,

$t = 2$ 일 때 점 P 의 속도는 $\left(1,\ \dfrac{3}{4}\right)$ 이다. 시각 $t = 2$ 일 때, 점 P 의 가속도를 $\left(-\dfrac{1}{2},\ a\right)$ 라 할 때,

$60a$ 의 값을 구하시오.

문제 1.25 2020학년도 6월 모의고사 가형 21번

함수 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y=f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a\times g'(a)$의 값은?

문제 1.26 2020학년도 수능 가형 30번

양의 실수 t에 대하여 곡선 $y=t^3\ln(x-t)$가 곡선 $y=2e^{x-a}$과 오직 한 점에서 만나도록 하는 실수 a의 값을 $f(t)$라 하자. $\left\{f'\left(\dfrac{1}{3}\right)\right\}^2$의 값을 구하시오.

정답표									
21	331	22	$\dfrac{8}{25}$	23	109	24	15	25	$-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$
26	64								