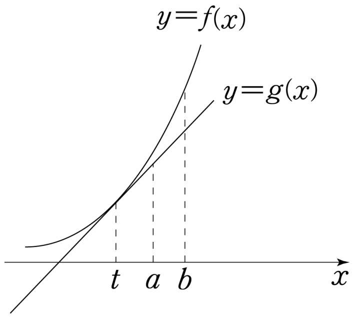
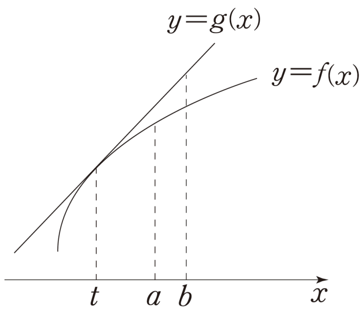
그림과 같이 일반적으로 아래로 볼록한 함수 $f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선을 $y=g(x)$라 할 때, 접점을 $(t,\ g(t))$라 하자. 이 때, $t \le a < b$인 임의의 두 실수 $a,\ b$에 대하여 $g(a) < f(b)$를 만족시킨다.



이와는 반대로, 위로 볼록한 함수 $f(x)$의 그래프 위의 점에서의 접선을 $y=g(x)$라 할 때, 접점을 $(t,\ g(t))$라 하자. 이 때, $t \le a < b$인 임의의 두 실수 $a,\ b$에 대하여 $f(a) < g(b)$를 만족시킨다. 즉, 문제에서 항상 $f(a) < g(b)$를 만족시키려면 구간 $(t,\ \infty)$에서 다음과 같이 함수 $f(x)$의 그래프는 위로볼록 이어야 한다.



따라서 $f(x)$의 이계도함수를 구하자.

$f'(x) = 2\ln x \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{k}{x}$

$f''(x) = \dfrac{2}{x^2} + 2\ln x \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{k}{x^2}$

$= \dfrac{2-2\ln x - k}{x^2}$

따라서 $\ln x = \dfrac{2-k}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{2-k}{2}}$의 좌우에서 이계도함수 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.

$e^{\frac{2-k}{2}} = e^{-3}$이므로 $k=8$이다.