D&T와 마약팀의 2017학년도 6월평가원 수학영역(가) 문항해설

1. 지수법칙
$2^0 \times 9^{\frac{1}{2}} = 1 \times 3 = 3$

2. 집합
$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\} \quad \therefore n(A \cup B) = 7$

3. 수열의 극한
$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2-n}{2n^2+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{7-\dfrac{n}{n^2}}{2+\dfrac{3}{n^2}} = \frac{7}{2}$$

4. 역함수
$f(a) = 2a-3 = 5 \quad a = 4$

$\therefore f(4) = 5 \Rightarrow f^{-1}(5) = 4$

5. 합성함수
$f(2) = 4$ 이고 $(f \circ f)(3) = f(f(3)) = f(1) = 3$

이므로 $f(2) + (f \circ f)(3) = 7$ 이다.

6. 이항정리
$$\left(x+\frac{1}{3x}\right)^6 = \sum_{r=0}^{6} {}_6\mathrm{C}_r x^r \left(\frac{1}{3x}\right)^{6-r} = \sum_{r=0}^{6} {}_6\mathrm{C}_r x^{2r-6} 3^{r-6}$$

$\therefore\ r = 4 \ \Rightarrow {}_6\mathrm{C}_4 3^{-2} = \dfrac{5}{3}$

7. 집합의 연산
$B^C - A^C = B^C \cap (A^C)^C = B^C \cap A = A - B = \{2,\ 6\}$

$\therefore 2+6 = 8$

8. 수열의 극한
$$\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{3^n}\right)\left(a+\frac{1}{2^n}\right) = 2a = 10$$

$\therefore a = 5$

9. 함수의 연속
$f(x)$ 는 연속이므로 $x=1$ 에서 좌극한, 우극한, 함수값이 같아야 한다.

$$\lim_{x\to 1-}(4x^2-a) = \lim_{x\to 1+}(x^3+a) = f(1)$$

$4-a = 1+a \qquad \therefore a = \dfrac{3}{2}$

10. 함수의 극한
$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 1+} f(x) = -1+2 = 1$

11. 자연수의 분할
case1 - $P(6,\ 2) = 3$: $(1,\ 5)$, $(2,\ 4)$, $(3,\ 3)$

case2 - $P(6,\ 4) = 2$: $(1,\ 1,\ 1,\ 3)$, $(1,\ 1,\ 2,\ 2)$

case3 - $P(6,\ 6) = 1$ $(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$

따라서 총 6가지이다.

12. 등차수열의 일반항
등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$a_8 - a_2 = 6d = 12$, $d = 2$

$a_1 + a_2 + a_3 = a + (a+d) + (a+2d) = 3a+3d = 3a+6 = 15$

$a = 3$, $a_n = 2n+1 \qquad \therefore\ a_{10} = 21$

13. 명제
모든 양의 실수 x에 대하여 $x > a-4$ 이므로 $a-4 \le 0$ 이어야 한다.

따라서 자연수 a는 $1, 2, 3, 4$ 이다.

14. 중복조합의 수
$x+y+z+5w = 14$ 에서

x, y, z, w가 모두 양의 정수이다.

1) $w = 1$

$x+y+z = 9$ 이므로 $x = x'+1$, $y = y'+1$, $z = z'+1$ 이라 두면

$x'+y'+z' = 6$ 이다.

따라서 만족하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_6 = {}_8\mathrm{C}_6 = 28$

2) $w = 2$

$x+y+z = 4$ 이므로 $x = x'+1$, $y = y'+1$, $z = z'+1$ 이라 두면

$x'+y'+z' = 1$ 이다.

따라서 만족하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_1 = {}_3\mathrm{C}_1 = 3$

1), 2)에 의하여 $28+3 = 31$ 가지이다.

15. 무리함수
$y = a\sqrt{x}+4$ 을 x축으로 m, y축으로 n만큼 평행이동하면

$y = a\sqrt{x-m}+4+n$ 이다.

$y = \sqrt{9x-18} = \sqrt{9(x-2)} = 3\sqrt{x-2}$ 이다.

따라서 $a = 3$, $m = 2$, $n = -4$ 이다.

$\therefore\ a+m+n = 1$

16. 집합과 명제
p명제의 진리집합 P은 $x > 4$ or $x < -4$ 이다.

q명제의 진리집합 Q은 $-3 \le x \le 3$

r명제의 진리집합 R은 $x \le 3$

ㄱ. $q \rightarrow r$ 는 $Q \subset R$ 을 뜻하므로 (참)

ㄴ. $p \rightarrow \sim q$ 는 $P \subset Q^C$ 을 뜻한다.

Q^C은 $x > 3$ or $x < -3$ 이므로 $P \subset Q^C$ 이다. (참)

ㄷ. $r \rightarrow \sim p$ 는 $R \subset P^C$ 을 뜻한다.

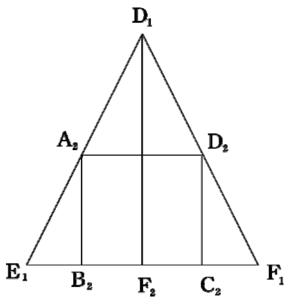
P^C은 $-4 \le x \le 4$ 이다. 이므로 $R \not\subset P^C$ 이다. (거짓)

17. 등비급수의 계산

S_1 의 넓이는 $\triangle A_1E_1D_1 + \triangle D_1C_1F_1 + \triangle E_1B_1F_1$ 인데

모두 직각삼각형이므로

$S_1 = 1+1+\frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ 이다. 이제 공비를 구해보자



$\overline{A_2B_2} = x$ 라 하면,

$\overline{E_1F_1} = \sqrt{2}$, $\overline{E_1D_1} = \overline{F_1D_1} = \sqrt{5}$ 이고, $\overline{E_1B_2} = \frac{\sqrt{2}-x}{2}$

($\because$ 삼각형 $D_1E_1M_2$ 과 삼각형 $A_2B_2E_1$ 은 닮음)

이므로 $\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-x}{2} : x \Rightarrow 1:3 = \frac{\sqrt{2}-x}{2} : x$

이를 정리하면 $3\sqrt{2} - 3x = 2x \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{5}$ 이다.

그러므로 $S_1 : S_2$ 의 비는 $2^2 : x^2 \Rightarrow 4 : \frac{18}{25}$ 이므로 공비 $r = \frac{9}{50}$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{9}{50}} = \frac{125}{41}$

18. 극값의 판정

$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 이므로

$f'(a)g(a) + f(a)g'(a) < 0 \quad (\because\ f(a) = 0)$

$f'(b)g(b) + f(b)g'(b) > 0 \quad (\because\ f'(b) = 0)$

사잇값 정리에 의하여 $a < p < b$ 이다.

$f'(d)g(d) + f(d)g'(d) < 0 \quad (\because\ f'(d) = 0)$

$f'(e)g(e) + f(e)g'(e) > 0 \quad (\because\ f'(b) = 0)$

사잇값 정리에 의하여 $d < q < e$ 이다.

19. 확률의 계산 – 독립

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이다.

두 사건 $P(A)$, $P(B)$ 가 독립이므로

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{1}{9}$ 이고

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$

따라서 $m \times n \times k = \frac{5}{243}$ 이다.

EBS연계문항, 수능특강 확률

[6009-0085]

4 한 개의 주사위를 두 번 던질 때 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 하자. 이차함수 $f(x) = x^2 - 5x + 6$에 대하여 $f(a)f(b) = 0$이 성립할 확률은?

① $\frac{7}{18}$ ② $\frac{4}{9}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{9}$ ⑤ $\frac{11}{18}$

20. 수열의 규칙파악

$a_2 = a_1 - 2 = a - 2$

$a_3 = a_2 + (-1)^2 \times 2 = a$

$a_4 = a_3 + 1 = a + 1$

$a_5 = a_4 + (-1)^4 \times 2 = a + 3$

$a_6 = a_5 + (-1)^5 \times 2 = a + 1$

$a_7 = a_6 + 1 = a + 2$

계속하여 반복하면

$a_{10} = a + 3$, $a_{13} = a + 4$ 이다.

$a_{14} = a_{13} + (-1)^{13} \times 2 = a + 4 - 2 = a + 2$

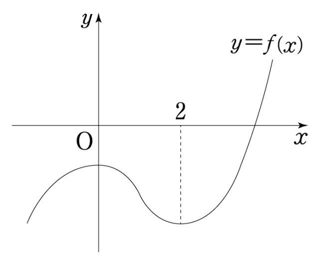
$a_{15} = a_{14} \times (-1)^{14} \times 2 = a + 2 + 2 = a + 4$ 이다.

따라서 $a + 4 = 43$ 이므로 $a = 39$

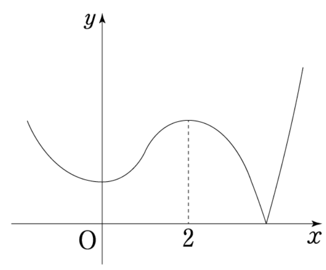
21. 함수의 그래프 개형 추론

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극댓값, $x = 2$ 에서 극솟값을 갖는다.

ㄱ. $f(0) < 0$ 인 경우는 함수의 그래프가 다음과 같다.

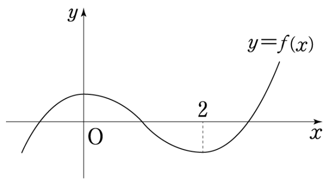


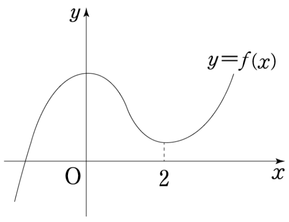
그러므로 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 다음과 같다.



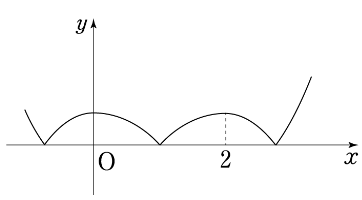
따라서 $|f(0)| < |f(2)|$ 이다.

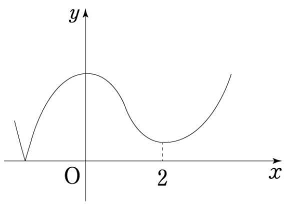
ㄴ. $f(0)(2) \geq 0$ 인 경우는 함수의 그래프는 다음의 세 가지이다.





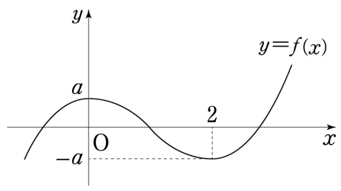
각각의 경우에 $y=|f(x)|$ 의 그래프를 그려 보면, 다음과 같다.



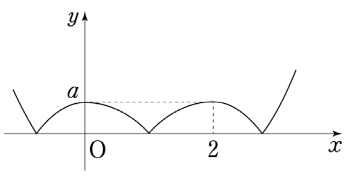


두 가지 경우 모두 극솟값을 갖는 a 의 개수가 두 개이므로 참이다. (참)

ㄷ. $f(0)+f(2)=0$ 인 경우는 $f(0)=a$ 라 할 때, 함수의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 다음과 같다.



따라서 $|f(x)|=f(0)$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4개이다. (참)

22. 순열의 계산

${}_4\mathrm{P}_3=4\times3\times2=24$

23. 다항함수의 미분법

$f'(x)=3x^2-2 \quad \therefore f'(3)=25$

24. 경우의 수

${}_6\mathrm{C}_4\times{}_4\mathrm{C}_3=15\times4=60$

25. 등비수열의 계산

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 두자.

$$\frac{a_4a_5}{a_2a_3}=\frac{a_1r^3\times a_1r^4}{a_1r\times a_1r^2}=r^4=16$$

$r=2$

$\therefore a_6=a_1\times r^5=96$

26. 유리함수의 점근선

$f(x)=\dfrac{2x-3}{x-5}=\dfrac{7}{x-5}+2$ 이므로 점근선의 방정식은 $x=5$, $y=2$ 이다. 따라서 $p=5$, $q=2$ 이다.

$\therefore\ pq=10$

27. 조건부 확률

두 상자에서 꺼낸 공이 모두 흰 공일 사건을 C라고 하면,

$$\mathrm{P}(C)=\frac{a}{100}\times\frac{100-2a}{100}$$

두 상자에서 꺼낸 공이 모두 검은 공일 사건을 D라고 하면,

$$\mathrm{P}(D)=\frac{100-a}{100}\times\frac{2a}{100}$$

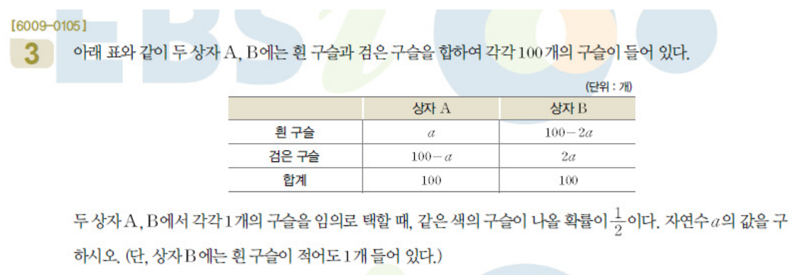
구하고자 하는 확률은 $\dfrac{\mathrm{P}(C)}{\mathrm{P}(C)+\mathrm{P}(D)}$ 이므로

$$\frac{\mathrm{P}(C)}{\mathrm{P}(C)+\mathrm{P}(D)}=\frac{\frac{a}{100}\times\frac{100-2a}{100}}{\frac{a}{100}\times\frac{100-2a}{100}+\frac{100-a}{100}\times\frac{2a}{100}}$$

$$=\frac{-a+50}{-2a+150}=\frac{2}{9}$$

따라서 $a=30$ 이다.

EBS연계문항, 확률



[6009-0105]

3 아래 표와 같이 두 상자 A, B에는 흰 구슬과 검은 구슬을 합하여 각각 100개의 구슬이 들어 있다.

(단위 : 개)

	상자 A	상자 B
흰 구슬	a	$100-2a$
검은 구슬	$100-a$	$2a$
합계	100	100

두 상자 A, B에서 각각 1개의 구슬을 임의로 택할 때, 같은 색의 구슬이 나올 확률이 $\frac{1}{2}$이다. 자연수 a의 값을 구하시오. (단, 상자 B에는 흰 구슬이 적어도 1개 들어 있다.)

28. 다항함수의 최대최소

주어진 함수 $f(x)$를 x에 관하여 미분을 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(3x-a)(x+a)$$

함수 $f(x)$는 $x=-a$에서 극댓값, $x=\frac{a}{3}$에서 극솟값을 가진다.

따라서 닫힌 구간 $[-a,\ a]$에서 $x=-a$일 때 최댓값 M을 가지고

$x=\frac{a}{3}$일 때 최솟값 $\frac{14}{27}$을 갖는다.

$$f\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}+\frac{a^3}{9}-\frac{a^3}{3}+2=\frac{14}{27}$$

$\therefore a=2\ \ (\because a>0)$

$M=f(-2)=10$

따라서 $a+M=12$

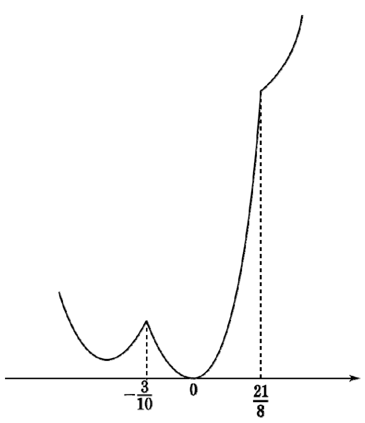
29. 미분가능성

함수 $g(x)$를 구해보면 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases} 2x^2+6x+5 & (x<-\frac{3}{10}) \\ 2x^2-4x+2 & (-\frac{3}{10}<x<1) \\ 5x^2-10x+5 & (1<x<\frac{21}{8}) \\ 5x^2-18x+26 & (x>\frac{21}{8}) \end{cases}$$

$g(x)$의 그래프를 그려보면 다음과 같다.

즉 함수들의 교점을 파악하면 $x=-\frac{3}{10}$, $x=\frac{21}{8}$임을 알 수 있다.



따라서 미분 가능하지 않은 점이 다음과 같음을 알 수 있다.

미분하여서 해당하는 값을 넣어도 쉽게 찾을 수 있다.

$$g'(x)=\begin{cases} 4x+6 & (x<-\frac{3}{10}) \\ 4x-4 & (-\frac{3}{10}<x<1) \\ 10x-10 & (1<x<\frac{21}{8}) \\ 10x-18 & (x>\frac{21}{8}) \end{cases}$$

$x=-\frac{3}{10}$, $\frac{21}{8}$에서 미분가능하지 않으므로 $80p=186$

30. 로그와 지수의 의미파악

$\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)=k$ (단, k는 자연수)

$na-a^2=nb-b^2=2^k$

$-x^2+nx=2^k$

$x^2-nx+2^k=0$

근과 계수의 관계에 의해 $a+b=n$, $ab=2^k$

$(b-a)^2=(a+b)^2-4ab=n^2-2^{k+2}$

$b-a=\sqrt{n^2-2^{k+2}}\quad(\because b-a>0)$

$0<b-a\le\frac{n}{2}$

$0<n^2-2^{k+2}\le\frac{n^2}{4}$

$2^{k+2}<n^2\le\frac{2^{k+4}}{3}$

$k=1$일 때, $8<n^2\le\frac{32}{3}\quad n=3$

$k=2$일 때, $16<n^2\le\frac{64}{3}\quad n$은 존재하지 않음

$k=3$일 때, $32<n^2\le\frac{128}{3}\quad n=6$

$k=4$일 때, $64<n^2\le\frac{256}{3}\quad n=9$

$k=5$일 때, $128<n^2\le\frac{512}{3}\quad n=12,\ n=13$

$k=6$일 때, $256<n^2\le\frac{1024}{3}\quad n=17,\ 18$

해설을 작성해 주신 분들

D&TEduContents 컨텐츠개발팀
안정혁
조기강
전의영
성민아

팀 마약
김정문
정성현
정흥기

제작
조민성