2017학년도 5월 귤모의고사

# 수학 영역(나형)

# 정답 및 해설지

# 2017학년도 5월 귤모의고사

# 수학 영역(나형)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | ① | **2** | ③ | **3** | ③ | **4** | ② | **5** | ⑤ |
| **6** | ④ | **7** | ③ | **8** | ④ | **9** | ② | **10** | ⑤ |
| **11** | ⑤ | **12** | ② | **13** | ③ | **14** | ③ | **15** | ⑤ |
| **16** | ⑤ | **17** | ④ | **18** | ④ | **19** | ④ | **20** | ④ |
| **21** | ③ | **22** | 4 | **23** | 4 | **24** | 12 | **25** | 25 |
| **26** | 13 | **27** | 16 | **28** | 9 | **29** | 1 | **30** | 2 |

1. $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$

$=8^{\frac{1}{3}}=2^{3\times\frac{1}{3}}$
$=2$

1번 답 : ① 2

2. 집합 $C$는 $A$의 원소와 $B$의 원소를 각각 더할 수 있는 모든 조합을 원소로 갖습니다.

$C=\{4,5,6,7,9,10\}$

2번 답 : ③ 6

3. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\sqrt{\frac{n}{n}}}{\sqrt{\frac{n}{n}}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}{1}$
$=2$

3번 답 : ③ 2

4. $a=\log_{2^{\frac{1}{2}}}4=\frac{1}{\frac{1}{2}}log_2 4=2\times2=4$

$\log_2 a+\log_a 2$
$=\log_2 4+\log_4 2$
$=2+\frac{1}{2}$
$=\frac{5}{2}$

4번 답 : ② $\frac{5}{2}$

5. $f'(x)=3x^2$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-10}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$
$=f'(2)=12$

5번 답 : ⑤ 12

6. 등차중항의 성질에 의하여

$a_3+a_7=2a_5=12$
$\therefore a_5=6$

$a_5+a_7=2a_6=14$
$\therefore a_6=7$

이 등차수열의 일반항을 구해도 되지만 눈치껏 $a_{10}$를 생각해도 됩니다. 그러면 $a_{10}=11$

일반항을 구하면 $a_n=n+1$이므로 같은 결과를 얻습니다.

6번 답 : ④ 11

7. $f$가 연속이므로 $x=3$에서의 좌극한, 우극한, 그리고 함숫값이 모두 같습니다.

$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}x+1=4$
$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3+}2x+b=6+b$
$f(3)=a$

$\therefore a=4, b=-2$

7번 답 : ③ 2

8. ${}_7C_3=\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35, {}_8C_3=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$에서

${}_nC_2=\frac{n\times(n-1)}{2\times1}=56-35=21=\frac{7\times6}{2\times1}$
$\therefore n=7$

이렇게 풀어도 되고

파스칼의 삼각형에서 ${}_nC_k+{}_nC_{k+1}={}_{n+1}C_{k+1}$의 성질을 이용하여 $n=7$임을 생각해내도 됩니다.

8번 답 : ④ 7

9. $y=-3\sqrt{2(x+m)}+9$의 그래프는 점$(-m,9)$에서 출발하여 오른쪽 아래로 뻗어나가는 그래프입니다. 이 그래프가 제 3사분면을 지난다는 것은 곧 $y$절편이 음수라는 뜻입니다.

즉

$-3\sqrt{2m}+9<0$
$\Rightarrow\sqrt{2m}>3$
$\Rightarrow m>\frac{9}{2}$

$m$이 정수이므로 이를 만족하는 $m$의 최솟값은 5

9번 답 : ② 5

10. $\sum_{k=1}^{10} a_{3k-2} + \sum_{k=1}^{10} a_{3k-1} + \sum_{k=1}^{9} a_{3k}$
$= (a_1 + a_4 + \cdots + a_{25} + a_{28})$
$+ (a_2 + a_5 + \cdots + a_{26} + a_{29})$
$+ (a_3 + a_6 + \cdots + a_{27})$
$= \sum_{k=1}^{29} a_k = \sqrt{29+7} = 6$

10번 답 : ⑤ 6

11. 함수 $g$가 미분 가능하므로 모든 점에서 극한
$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$이 존재합니다. 그런데 $c$가
상수함수라서 $\lim_{h\to 0+}\frac{g(a+h)-g(x)}{h}=0$이므로
$\lim_{h\to 0-}\frac{g(a+h)-g(x)}{h}=0$. 따라서
$\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(x)}{h}=f'(a)$또한 0이어야 합니다.
그런데 $f'(a)=0$이 되도록 하는 $a$값은 두 개 존재합니다.
$f'(x)=6x^2-6x$에서 $f'(a)=0 \Leftrightarrow a=0$ 또는 1
따라서 다음 두 가지 경우가 발생합니다.
1) $a=0$
미분가능함수는 연속이므로, $f(0)=c$ 입니다.
$c=f(0)=7$

2) $a=1$
$f(1)=c$
$c=f(1)=3$
따라서 구하는 답은 7

11번 답 : ⑤ 7

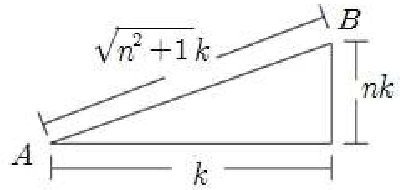
12. ㄱ. $(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(1)=1$ (참)
ㄴ. $(g\circ f)(x)=x$에서 $g=f^{-1}$이므로 역함수의 성질에 의해
$g\circ f=f^{-1}\circ f=f\circ f^{-1}=f\circ g$ (참)
ㄷ. (반례) $f(2)=4, f(3)=2$
$g(4)=2, g(2)=3$
위는 주어진 조건을 만족하지만 항상 $f(x)=g(x)$인 것은 아님을 보여줍니다. (거짓)

12번 답 : ② ㄱ, ㄴ

13. 근의 공식을 이용하여 $A,B$의 $x$좌표를 구해봅시다.
$A,B$의 $x$좌표는 방정식 $x(x-3)^2=nx$의 해이고 0이 아니므로 이를 정리하면
$(x-3)^2=n$
$x^2-6x+9-n=0$
$x=3\pm\sqrt{n}$
즉 $A,B$의 $x$좌표는 각각 $3-\sqrt{n}, 3+\sqrt{n}$입니다.
$0, 3-\sqrt{n}, 3+\sqrt{n}$이 등차수열을 이루므로
등차중항의 성질에 의해
$6-2\sqrt{n}=3+\sqrt{n}$
$3\sqrt{n}=3$
$\therefore n=1$

13번 답 : ③ 1

14. $h(t)$를 구하기 위해 두 점 사이의 거리를 구하는 가장 기본적인 방법은, 두 점의 $x$좌표의 차와 $y$좌표의 차를 각각 제곱한 뒤 그것의 양의 제곱근을 구하면 되지만, $A,B$의 좌표가 $m\pm\sqrt{n}$꼴로 복잡하게 나타나 있는 만큼 이 방법을 쓰면 계산 실수를 할 확률이 높을 것이라고 생각합니다. 고로 본질적으로는 같은 원리이지만 다른 방법을 생각해 보도록 합시다.




두 점을 이은 선분을 빗변으로 하고 나머지 변이 $x,y$축과 수직 또는 평행한 직각삼각형을 생각합니다. 이때 선분 $\overline{AB}$의 기울기가 $n$입니다.
기울기라는 것은 기본적으로 $\frac{(y\text{좌표 증가량})}{(x\text{좌표 증가량})}$을 계산하여 구합니다. 따라서 그림의 삼각형에서 높이가 밑변의 $n$배가 됩니다. 따라서 밑변을 간단히 1, 높이를 간단히 $n$으로 치환하여 피타고라스 정리를 사용하면 빗변의 길이는 $\sqrt{n^2+1}$가 되고, 이를 비율로 생각하면 빗변의 길이가 밑변의 $\sqrt{n^2+1}$배가 됨을 뜻합니다.
그런데 밑변의 길이는
$(m+\sqrt{n})-(m-\sqrt{n})=2\sqrt{n}$이므로 이미 13번 문제에서 구한 것이나 다름없습니다. 따라서 $h(t)$는 $2\sqrt{t}\times\sqrt{t^2+1}$이 됩니다.
$\lim_{t\to 0}\frac{h(t)}{\sqrt{t}}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sqrt{t}\sqrt{t^2+1}}{\sqrt{t}}=2$

14번 답 : ③ 2

15. 필요조건과 충분조건의 정의를 잘 파악하세요.
$q$는 $p$이기 위한 필요조건
$\Leftrightarrow P\subset Q$

$p$는 $\sim r$이기 위한 충분조건

$\Leftrightarrow P \subset R^C$

$P$가 $Q$의 부분집합이므로 $m$은 5보다 크기만 하면 됩니다. 또한 $P$가 $R$의 여집합 $R^C = \{x | x \geq n\}$의 부분집합이므로 $n$은 3보다 작거나 같기만 하면 됩니다. 따라서 자연수 $m$의 최솟값은 6이고 자연수 $n$의 최댓값은 3입니다.

15번 답 : ⑤ 9

16. 주어진 설명을 그대로 주어진 식에 대입해 봅시다.

$65\log 5 = C + m\log 5 \cdots (1)$
$60 + 5\log 5 = C + m \cdots (2)$

$(1)-(2)$에서 $60(\log 5 - 1) = m(\log 5 - 1)$

$\therefore m = 60$

이를 $(2)$에 대입하면 $C = 5\log 5$를 얻습니다.

따라서

$$E_1 = C + m\log\frac{10}{5}$$

$$E_1 = 5\log 5 + 60\log 2$$
$$= 5\log 5 + 5\log 2 + 55\log 2$$
$$= 5\log 10 + 55\log 2$$
$$= 5 + 55\log 2$$

16번 답 : □ $5 + 55\log 2$

17. 이 시행이 한 번에 끝나는 것은 불가능합니다. 따라서 두 번의 시행으로 끝나는 경우와 세 번의 시행으로 끝나는 경우로 나누어 생각할 수 있습니다.

(1) 두 번의 시행으로 끝나는 경우

이 경우는 검정 구슬을 뽑으면 안 됩니다. 즉 빨강을 뽑고 파랑을 뽑거나, 파랑을 뽑고 빨강을 뽑는 두 가지 경우만이 존재합니다.

$$\frac{5}{10}\times\frac{2}{10}+\frac{2}{10}\times\frac{5}{10}=\frac{1}{5}$$

(2) 세 번의 시행으로 끝나는 경우

이 경우는 검정 구슬을 뽑는 경우와 그렇지 않은 경우로 나눌 수 있습니다.

검정구슬이 포함된다면 그것은 반드시 단 한 번이며, 첫 번째나 두 번째 시행에서 검정 구슬이 뽑혀야 합니다. 즉 빨강-검정-파랑의 순으로 뽑거나 파랑-검정-빨강의 순으로 뽑거나 검정-파랑-빨강, 검정-빨강-파랑의 순으로 뽑는 네 가지 경우만이 존재합니다.

빨강-검정-파랑 : $\frac{5}{10}\times\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{30}$

파랑-검정-빨강 : $\frac{2}{10}\times\frac{3}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{30}$

검정-빨강-파랑 : $\frac{3}{10}\times\frac{5}{9}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{27}$

검정-파랑-빨강 : $\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{27}$

검정구슬이 뽑히지 않는 경우는 파랑-파랑-빨강, 빨강-빨강-파랑의 두 가지 경우만이 존재합니다.

빨강-파랑-빨강과 같은 경우는 두 번째 시행에서 이미 끝나는 경우이므로 세지 않도록 주의합니다.

빨강-빨강-파랑 : $\frac{5}{10}\times\frac{5}{10}\times\frac{2}{10}=\frac{1}{20}$

파랑-파랑-빨강 : $\frac{2}{10}\times\frac{2}{10}\times\frac{5}{10}=\frac{1}{50}$

(1), (2)에서

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{30}+\frac{2}{27}+\frac{1}{20}+\frac{1}{50}=\frac{540+180+200+135+54}{2700}$$
$$=\frac{1109}{2700}$$

17번 답 : □ $\frac{1109}{2700}$

18. $\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{k^2}{2^k}=6-\frac{k^2+4k+6}{2^k}$의 양변에 $\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}$를 더하여 정리 해봅시다.

$$\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{k^2}{2^k}+\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}$$
$$=6-\frac{k^2+4k+6}{2^k}+\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}$$
$$=6-\frac{k^2+4k+6}{2^k}+\frac{(k+1)^2}{2^k\times 2}$$
$$=6-\frac{1}{2^k}\left\{(k^2+4k+6)-\frac{(k+1)^2}{2}\right\}$$
$$\therefore \boxed{\text{(가)}} = \frac{(k+1)^2}{2}$$

$$6-\frac{1}{2^k}\left\{(k^2+4k+6)-\frac{(k+1)^2}{2}\right\}$$
$$=6-\frac{1}{2^k}\left\{\frac{2k^2+8k+12}{2}-\frac{k^2+2k+1}{2}\right\}$$
$$=6-\frac{1}{2^k}\left\{\frac{k^2+6k+11}{2}\right\}=6-\frac{k^2+6k+11}{2^k}$$
$$\therefore \boxed{\text{(나)}} = k^2+6k+11$$
$$=k^2+2k+1+4k+4+6=(k+1)^2+4(k+1)+6$$

따라서 $f(k)=\frac{(k+1)^2}{2}, g(k)=k^2+6k+11$이고

$$f(3)=\frac{4^2}{2}=8, g(4)=4^2+6\times 4+11=51$$

$$f(3)+g(4)=59$$

18번 답 : □ 59

19. ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$임을 이용합니다. 즉

$$\begin{aligned}&{}_{19}C_0={}_{19}C_{19}\\&{}_{19}C_1={}_{19}C_{18}\\&\vdots\\&{}_{19}C_9={}_{19}C_{10}\end{aligned}$$

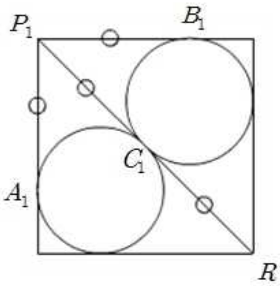
따라서 다음이 성립합니다.

$$\begin{aligned}&1\times{}_{19}C_0+39\times{}_{19}C_{19}=20\times{}_{19}C_0+20\times{}_{19}C_{19}\\&3\times{}_{19}C_1+37\times{}_{19}C_{18}=20\times{}_{19}C_1+20\times{}_{19}C_{18}\\&\vdots\\&19\times{}_{19}C_9+21\times{}_{19}C_{10}=20\times{}_{19}C_9+20\times{}_{19}C_{10}\end{aligned}$$

위 등식들의 좌변을 모두 합한 것이 주어진 식이므로, 주어진 식은 위 등식들의 우변의 합, 즉

$20\times({}_{19}C_0+{}_{19}C_1+\cdots+{}_{19}C_{19})=20\times2^{19}$이 됩니다.

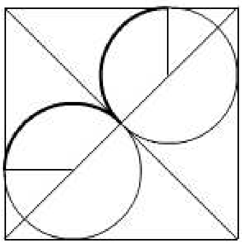
19번 답 : □ $20\times2^{19}$

20. 


선분 $\overline{P_1C_1}$과 선분 $\overline{P_1A_1}, \overline{P_1B_1}$의 길이는 모두 $\frac{1}{2}\overline{P_1R}$로 같습니다. $\overline{P_1C}=\overline{RC_1}$임은 꽤 쉽게 느낌이 옵니다.

$\overline{P_1A_1}, \overline{P_1C_1}$가 같은 원에 접하고 있으므로 두 선분의 길이가 같음도 쉽게 알 수 있습니다. $\overline{P_1B_1}$도 마찬가지.

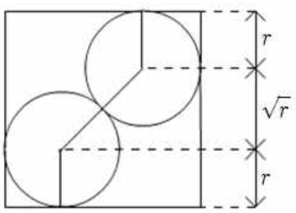
$\overline{P_1R}=\sqrt{2}$이므로 $\overline{P_1A_1}+\overline{P_1B_1}=\sqrt{2}$



또한 호 $\widehat{A_1C_1}, \widehat{B_1C_1}$의 중심각은 각각 $\frac{3}{4}\pi$임을 알 수 있습니다.

따라서 저 원의 반지름만 구하면 되겠습니다.

원의 반지름의 길이는 $r$이라고 하면




$2r+\sqrt{2}r=r(2+\sqrt{2})=1,\ \therefore r=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

이렇게 반지름을 구해도 되고, 정사각형의 한 변에서 $\overline{P_1A_1}$을 빼면 반지름이 나오니까 $r=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$를 이끌어내도 됩니다.

이제 아까 그 호의 길이를 구하면

$\widehat{A_1C_1}=\widehat{B_1C_1}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{3}{4}\pi$

즉

$l_1=\sqrt{2}+2\times\dfrac{(2-\sqrt{2})}{2}\times\dfrac{3}{4}\pi=\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})\dfrac{3}{4}\pi$

이제 차례대로 색칠 되는 도형들의 길이의 비를 구합시다. 두 번째 만들어지는 정사각형의 한 변의 길이는 1에서 원의 지름을 뺀 것입니다. 즉 길이의 비는

$$1:1-2r=1:1-2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)=1:\sqrt{2}-1$$

따라서 $l_n$의 공비는 $\sqrt{2}-1$가 됩니다. 등비급수 공식을 사용하면

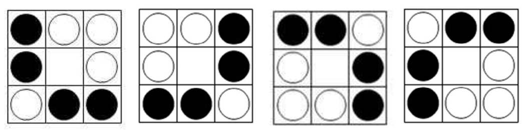
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}l_n&=\frac{\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})\frac{3}{4}\pi}{1-(\sqrt{2}-1)}\\&=\frac{\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})\frac{3}{4}\pi}{2-\sqrt{2}}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\frac{3}{4}\pi\\&=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{2}+\frac{3}{4}\pi\\&=\sqrt{2}+1+\frac{3}{4}\pi\end{aligned}$$

20번 답 : ④ $\frac{3}{4}\pi+1+\sqrt{2}$

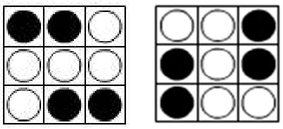
21. 먼저 상자를 돌렸을 때 같은 경우가 나오는 경우도 다른 경우라고 생각하여 경단을 배치할 수 있는 경우의 수를 계산합니다. 그러면

$${}_8C_4=\frac{8\times7\times6\times5}{4!}=70$$

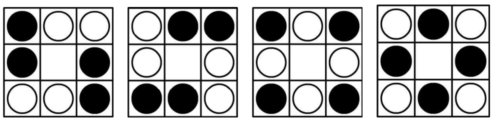
그런데 여기서 상자를 회전해서 같은 배치가 나올 수 있는 경우 수를 4라고 계산하여 $\frac{70}{4}$을 계산하면 정수가 안 나옵니다. 이 계산에는 오류가 있습니다.



대부분의 경우에 이렇게 돌렸을 때 같은 배치가 나오는 배치는 한 배치에 대하여 4개씩 존재합니다. 그러나 가령



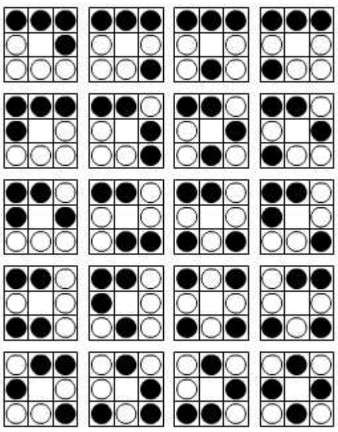
이러한 배치는 돌렸을 때 같은 배치가 나오는 배치가 2개밖에 존재하지 않습니다. 이 외에도 돌려서 같은 배치가 4개보다 작게 나오는 경우는



위의 것 까지 합해서 총 6개가 존재 합니다. 이 6개를 제외한 모든 경우에서는 돌려서 같은 배치가 나오는 것이 모두 4개씩 존재하므로, 전체 70개에서 위 6개를 뺀 64개를 4로 나누면 됩니다.

$$\frac{64}{4}=16$$

이렇게 나온 16개의 배치에서 위에서 언급된 4개의 (6개이지만 돌려서 같은 것을 빼면 4개) 패턴을 더해주면, 회전해도 서로 같은 배치가 나오지 않는 모든 배치를 셀 수 있겠습니다.
그래서 정답은 20입니다.
만약 그 20개를 다 세면 이렇게 됩니다.



21번 답 : ③ 20

22. $\lim_{n\to\infty}\{a_n+3b_n\}=10$의 양변에서 $\lim_{n\to\infty}\{a_n-b_n\}=-2$의 양변을 각각 빼면 극한의 성질에 의해

$\lim_{n\to\infty}4b_n=12,\ \therefore \lim_{n\to\infty}b_n=3$

다시 극한의 성질에 의해

$\lim_{n\to\infty}\{a_n+3b_n\}=\lim_{n\to\infty}a_n+3\lim_{n\to\infty}b_n$

$=\lim_{n\to\infty}a_n+9=10$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=1$

$\lim_{n\to\infty}\{a_n+b_n\}=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=4$

22번 답 : 4

23. 7
$=5+1+1$
$=4+2+1$
$=3+3+1$
$=3+2+2$

23번 답 : 4

24. $f(0)=1, f(1)=2, f(2)=3, f(3)=0$
$f$를 적당히 거듭하여 합성했을 때 항등함수, 즉 함숫값의 함숫값을 구하는 짓을 몇 번 정도 해서 맨 처음 넣었던 수가 되기 위해서는 $n$이 4의 배수이어야 합니다.
50이하의 4의 배수는 12개 있으므로 답은 12

24번 답 : 12

25. $\left\{\frac{3^n}{3^n-k^n}+\frac{k^n}{4^n+7^n}\right\}$이 수렴할 필요충분조건은 수열$\left\{\frac{3^n}{3^n-k^n}\right\}$과 수열$\left\{\frac{k^n}{4^n+7^n}\right\}$이 수렴하는 것입니다.
$\left\{\frac{3^n}{3^n-k^n}\right\}$는 $k\neq 3$인 모든 자연수 $k$에 대하여 수렴하고 $\left\{\frac{k^n}{4^n+7^n}\right\}$는 $k\leq 7$인 모든 자연수 $k$에 대하여 수렴합니다. 따라서 주어진 조건을 만족하는 $k$를 나열하면 다음과 같습니다.

$1,2,4,5,6,7$

25번 답 : 25

26. $A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_{10}$이고 $A_{10}\neq\varnothing$(라고만 써도 충분)입니다. $A_1$의 원소는 6개뿐이 안 되고 10개의 집합이 주어진 것처럼 연속적으로 포함관계를 갖습니다. 그러면 $A_i$의 아래 첨자 $i$가 커질수록 $A_i$의 크기는 작아진다고 생각할 수 있겠습니다.
그런데 집합의 개수가 6보다 많다보니 10개의 집합 중 이웃해있는 몇 개의 집합은 서로 같을 수밖에 없습니다. $A_i=A_{i+1}$일 때 집합 $B$는 $i$를 원소로 갖습니다. 가령 $A_6=A_7$이면 $6\in B$입니다. 물론 $A_1=A_2=\cdots=A_{10}$이어도 주어진 조건을 만족합니다. 그러면 $1,2,\cdots 9\in B$입니다. 이 경우가 $B$의 원소의 개수가 최대가 되는 경우입니다.
$B$의 원소가 최소가 될 경우를 생각해 봅시다. 집합의 아래 첨자가 커질수록 원소가 줄어드는 경우가 되도록 많아야 할 것입니다. 원소가 1개씩 줄어도 되고 2개씩 줄어도 되지만 $B$의

원소가 최소가 되는 것이 목적이기 때문에 1개씩만 줄여야겠습니다. $A_{10}$이 공집합이 아니고 $A_1$의 원소가 6개이기 때문에 원소의 개수가 줄어드는 과정은 기껏해야 5번 볼 수 있습니다. 따라서 $A_i = A_{i+1}$을 만족하는 $i$는 최소한 4개는 존재합니다.

$4+9=13$

26번 답 : 13

27. $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{2x^2+6}=1$에서 분모가 $x$에 대한 이차식이므로 분자 또한 $x$에 대한 이차식입니다. 그러면 $f(x)$는 최고차항(삼차항)의 계수가 1인 삼차식이라고 생각할 수 있습니다.
또한 그 극한값이 1이므로 $f(x)$의 이차항의 계수가 2라는 것 까지 생각해 낼 수 있습니다.
한편 $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=5$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이므로 분자도 $x-1$을 인수로 갖는다는 것을 알 수 있습니다. 즉 $f(1)=0$
그러면 상수 $a$에 대해 $f(x)$를 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$f(x)=x^3+2x^2+ax-a-3$$

$f(x)$가 $x-1$을 인수로 갖는다는 것을 알고 있기 때문에 조립제법을 사용하여 인수분해하면

$$f(x)=(x-1)(x^2+3x+a+3)$$

따라서 주어진 극한 중 두 번째 극한에 이를 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(x-1)(x^2+3x+a+3)}{(x-1)(x+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+3x+a+3}{x+1}$$
$$=\frac{7+a}{2}$$
$$=5$$
$$\therefore a=3$$

$a$를 구했으므로 $f(x)$의 완전한 식을 얻습니다.

$f(x)=(x-1)(x^2+3x+6),\ f(2)=16$

27번 답 : 16

28. 주어진 조건에 의해 상수 $k$에 대해

$$f(x)=k(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$$

또한 $f(0)=10!$이므로

$$f(0)=k\times(-1)\times(-2)\times\cdots(-10)$$
$$=k\times 10!$$
$$=10!$$
$$\therefore k=1,\ f(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-10)$$

이 다항식을 곱의 미분법을 이용하여 미분할 때, 각 항 $(x-i)$를 미분하면 1이 됩니다. 이를 이용하면

$$f'(x)$$
$$=(x-2)(x-3)\cdots(x-10)$$
$$+(x-1)(x-3)\cdots(x-10)$$
$$+\cdots$$
$$+(x-1)(x-2)\cdots(x-9)$$

여기서 $x=1$을 대입했을 때 0이 되지 않는 항은 인수로 $x-1$을 포함하고 있지 않은 $(x-2)(x-3)\cdots(x-10)$이 유일합니다. 즉 이 항을 제외한 모든 항은 $x=1$을 대입했을 때 0이 됩니다. 따라서

$$f'(1)=(-1)\times(-2)\times\cdots(-9)$$
$$=(-1)^9\times 9!$$
$$=(-1)\times 9!$$

구하는 답은

$$-\frac{f'(1)}{8!}$$
$$=-\frac{(-1)\times 9!}{8!}$$
$$=9$$

28번 답 : 9

29. $\left[\frac{1}{2}\right]=0,\ \left[\frac{2}{2}\right]=1,\ \left[\frac{3}{2}\right]=1,\ \left[\frac{4}{2}\right]=2,\ \cdots$

따라서 $\left[\frac{n}{2}\right]$는 $n$이 증가함에 따라 다음과 같은 수열을 얻습니다.

$$0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4,\ \cdots$$

$$\left[-\frac{1}{2}\right]=-1,\ \left[-\frac{2}{2}\right]=-1,\ \left[-\frac{3}{2}\right]=-2,\ \left[-\frac{4}{2}\right]=-2\ \cdots$$

따라서 $\left[-\frac{n}{2}\right]$는 $n$이 증가함에 따라 다음과 같은 수열을 얻습니다.

$$-1,\ -1,\ -2,\ -2,\ -3,\ -3,\ -4,\ -4,\ \cdots$$

즉 $\left[\frac{n}{2}\right]$에서 $\left[-\frac{n}{2}\right]$를 뺀 수는 $n$이 증가함에 따라

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,\ \cdots$$

의 수열을 얻고 이 수열의 제 $n$항은 $n$입니다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n}{2}\right]-\left[-\frac{n}{2}\right]}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}=1$$

또는, $x-1<[x]\le x$이므로

$$\frac{n}{2}-1<\left[\frac{n}{2}\right]\le\frac{n}{2},\ -\frac{n}{2}-1<\left[-\frac{n}{2}\right]\le-\frac{n}{2}$$
$$\therefore n-1<\left[\frac{n}{2}\right]-\left[-\frac{n}{2}\right]<n+1$$

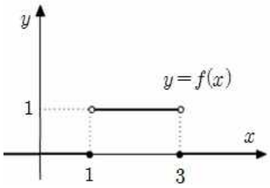
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n}{2}\right]-\left[-\frac{n}{2}\right]}{n} \le \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}$$ 에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$이므로 샌드위치정리에 의해서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{n}{2}\right]-\left[-\frac{n}{2}\right]}{n}=1$$

29번 답 : 1

30. $f$의 그래프는 다음과 같습니다.




그리고 $g$는 $x$축과 교점이 $x=\alpha, x=\beta$인 이차함수이며, 함수 $h$는 어떤 $x$에서 $f$와 $g$중 작은 것을 택하는 함수입니다. 그런 함수가 연속이라고 합니다.

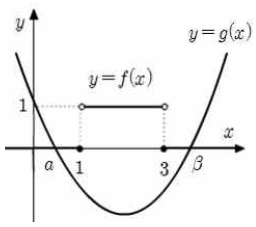
$g$에 대해서 함숫값에 대한 정보는 주어져 있지 않지만, $x=1$근처에서 함숫값이 0보다 크다고 생각해 봅시다. 그러면 $x\le 1$에서는 $f$가 $g$보다 확실히 작으니까 $h$의 함숫값은 0이 됩니다.

하지만 $x>1$에서는 $f$가 작든 $g$가 작든 그 값은 0보다는 크게 됩니다. ($g$는 0보다 크다고 가정했고 $f$는 1이니까요) 그러면 함수 $h$의 $x=1$에서의 좌극한은 0이지만 우극한은 0보다 크게 되므로 연속이라는 것에 모순이 됩니다.

따라서 $g$는 $x=1$근처에서 반드시 그 함숫값이 0 또는 음수이어야 합니다.

$x=3$근처에서도 마찬가지입니다. $x=3$근처에서 $g$가 0보다 크다고 가정하면 아까와 같은 모순이 발생합니다. 따라서 $x=3$근처에서 $g$의 함숫값은 반드시 0 또는 음수이어야 합니다.

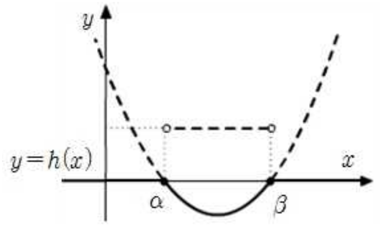
$g(1)\le 0$이고 $g(3)\le 0$를 만족하도록 $g$의 그래프를 $f$의 그래프와 겹쳐 그리면 다음과 같습니다.




($\alpha,\beta$의 순서는 중요하지 않습니다.)

구하려는 것은 $|\alpha-\beta|$의 최솟값이므로 $\alpha,\beta$가 최대한 가까이 있었으면 좋겠습니다. 주어진 조건을 만족하면서 이차함수의 그래프와 $x$축의 두 교점사이의 거리가 가장 가까워지는 경우는 $\alpha,\beta$가 1과 3의 값을 갖는 경우입니다.

그 때 $h$의 그래프는 아래의 실선 그래프입니다.




$|\alpha-\beta|\ge 3-1=2$

30번 답 : 2