2017학년도 6월 2일 시행 6월 평가원 모의고사 수학 가형 30번 문제에 대한 여러 선생님들의 다른 풀이들에 대한 논쟁점을 보고, 정병호/정병훈T가 직접 논쟁점을 정리하기 위해서 올리는 글입니다. 수학 문제 1개에 대해서 여러 가지의 풀이가 있을 수 있고, 풀이에 대한 의견도 다양할 수 있습니다만, 몇 가지 큰 원칙을 가지고 논쟁점을 정리해보고자 합니다.

(A) 논리가 올바른 풀이와 논리가 올바르지 않은 풀이를 구별하여, 논리가 올바른 풀이는 최대한 권장하고, 논리가 올바르지 않은 풀이는 지양한다.

(B) 논리가 올바른 풀이에 대해서는 일반성에 대한 평가를 진행한다. (여기서 일반성이란 그 풀이를 다른 문제에 얼마나 적용할 수 있는가를 나타냅니다.)

(C) 논리가 올바르고, 일반성이 보장된 풀이에 대해서는 효율성에 대한 평가도 진행한다. (여기서 효율성이란 풀이가 얼마나 간결하고, 불필요한 부분이 제거 되었는지를 따지는 개념입니다. 즉, 빠르게 풀 수 있는 방법인지를 보는 것입니다.)

이 글에서는 위의 (A), (B), (C) 단계의 순서로 풀이를 분석해 볼 것이며, 앞 단계를 통과하지 못한 풀이에 대해서는 다음 단계의 평가를 진행하지 않을 것입니다.

우선 6평 가형 30번 문제를 확인합니다.

<2017학년도 6평 가형 30번 문제>

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 상수 a $(0<a<2\pi)$와 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=f(-x)$

(나) $\int_{x}^{x+a} f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

닫힌구간 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$에서 두 실수 b, c에 대하여 $f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$일 때

$abc=-\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

이 글에서는 a의 값을 구하는 과정까지의 논쟁점과 b, c의 값을 구하는 과정까지의 논쟁점을 구별해서 단계적으로 살펴보겠습니다.

1단계 - a의 값을 구하는 과정의 논쟁점

조건 (나)의 등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다고 주어져 있으므로, x에 관한 항등식입니다. 항등식의 풀이법은 보통 계수비교법이 있고, 수치대입법이 있습니다. (나)식에서 계수를 비교하기에는 $f(x)$의 형태가 무엇인지를 알 수 없어서 계수비교법은 사용하기 어렵습니다. 따라서 수치대입법을 사용하는 것이 바람직합니다. 지금까지 수치대입법을 통해 회자된 풀이들은 다음과 같은 것이 있습니다.

<풀이1>

조건 (나)의 양변에 $x=0$을 대입하면, $\int_0^a f(t)dt=\sin\frac{\pi}{3}$ …… Ⓐ이다.

조건 (나)의 양변에 $x=-a$를 대입하면, $\int_{-a}^0 f(t)dt=\sin\left(-a+\frac{\pi}{3}\right)$ …… Ⓑ이다.

$t=-s$로 치환하면, $dt=-ds$이다.

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로,

$\int_{-a}^0 f(t)dt=\int_a^0 f(-s)(-ds)=\int_0^a f(-s)ds=\int_0^a f(s)ds=\int_0^a f(t)dt$가 성립한다.

즉, Ⓐ식과 Ⓑ식을 연립하여 $\sin\left(-a+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$가 성립한다.

$0<a<2\pi$이므로, $-\frac{5\pi}{3}<-a+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$이다. 이 범위에서 $\sin\left(-a+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$인 경우는 $-a+\frac{\pi}{3}=-\frac{4\pi}{3}$인 경우 뿐이다. 따라서 $a=\frac{5\pi}{3}$이다.

<풀이2>

조건 (나)에서 양변을 x에 관하여 미분하면, $f(x+a)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ …… Ⓒ이다.

이 때, Ⓒ도 모든 실수 x에 대하여 성립하는 항등식이다.

Ⓒ에 $x=-\frac{a}{2}$를 대입하면, $f\left(\frac{a}{2}\right)-f\left(-\frac{a}{2}\right)=\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$이다.

그런데, 조건 (가)에서 $f\left(\frac{a}{2}\right)=f\left(-\frac{a}{2}\right)$이므로 $\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0$이다.

$0<a<2\pi$인 범위에서 $-\frac{2\pi}{3}<-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$이다.

이 범위에서 $\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0$를 만족하는 경우는 $-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$인 경우 뿐이다.

$\therefore\ a=\frac{5\pi}{3}$

<풀이3>

조건 (나)에서 양변을 x에 관하여 미분하면, $f(x+a)-f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ …… ⓒ이다.

이 때, ⓒ도 모든 실수 x에 대하여 성립하는 항등식이다.

ⓒ식의 양변에 $x=0$을 대입하면, $f(a)-f(0)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ …… ⓓ이다.

ⓒ식의 양변에 $x=-a$를 대입하면, $f(0)-f(-a)=\cos\left(-a+\dfrac{\pi}{3}\right)$ …… ⓔ이다.

ⓓ식과 ⓔ식을 변변끼리 더하면, $f(a)-f(-a)=\cos\left(-a+\dfrac{\pi}{3}\right)+\dfrac{1}{2}$이다. 그런데, 조건 (가)에서 $f(a)=f(-a)$가 성립하므로, $\cos\left(a-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$이 된다.

$0<a<2\pi$일 때, $-\dfrac{\pi}{3}<a-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{5}{3}\pi$이다. 이 범위에서 $\cos\left(a-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$를 만족하는 각은

$a-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $a-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{4}{3}\pi$이다.

$\therefore\ a=\pi$ 또는 $a=\dfrac{5}{3}\pi$

이 때 $a=\pi$일 때 ⓒ는 $f(x+\pi)-f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$이다.

여기에 $x=-\dfrac{\pi}{2}$를 대입하면, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ …… ⓕ인데,

조건 (가)에서 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$이므로 ⓕ의 좌변은 0이다. 한편 ⓕ의 우변은

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 ⓕ와 같은 등식이 성립할 수 없어서 모순이다.

따라서 $a\neq\pi$이다.

$\therefore\ a=\dfrac{5\pi}{3}$

<풀이4>

조건 (나)에서 양변을 x에 관하여 미분하면, $f(x+a)-f(x)=\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ …… ⓒ이다.

이 때, ⓒ도 모든 실수 x에 대하여 성립하는 항등식이다.

닫힌구간 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$에서 $f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$이고, 조건 (가)에서 $f(x)=f(-x)$이다.

따라서 닫힌구간 $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$에서 $f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$ …… ⓖ이 성립한다.

ⓒ식의 x에 $x-a$를 대입하면, $f(x)-f(x-a)=\cos\left(x-a+\frac{\pi}{3}\right)$이다.

이제 $\frac{a}{2}\le x\le\frac{3a}{2}$인 범위에서 $-\frac{a}{2}\le x-a\le\frac{a}{2}$이므로, ⓖ에 의하여

$f(x-a)=b\cos3(x-a)+c\cos5(x-a)$이다.

따라서 $\frac{a}{2}\le x\le\frac{3a}{2}$일 때, $f(x)=b\cos3(x-a)+c\cos5(x-a)+\cos\left(x-a+\frac{\pi}{3}\right)$ …… ⓗ이다.

ⓖ에서 $f\left(\frac{a}{2}\right)=b\cos\left(\frac{3}{2}a\right)+c\cos\left(\frac{5}{2}a\right)$이고, ⓗ에서

$f\left(\frac{a}{2}\right)=b\cos\left(-\frac{3}{2}a\right)+c\cos\left(-\frac{5}{2}a\right)+\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$이다.

따라서 $\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0$이다.

$0<a<2\pi$인 범위에서 $-\frac{2\pi}{3}< -\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{3}$이다.

이 범위에서 $\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0$를 만족하는 경우는 $-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}$인 경우 뿐이다.

$\therefore\ a=\frac{5\pi}{3}$

(A단계)
위의 <풀이1>, <풀이2>, <풀이3>, <풀이4>는 모두 올바른 풀이입니다. 여러분이 이 중에 그 어떤 풀이로 진행하여 $a=\frac{5\pi}{3}$을 구했다면, 잘못 푼 것으로 간주될 이유가 전혀 없습니다.
그런데, 이 중에 어떤 풀이들은 몇몇 분들로부터 “동치변형이 아닌 풀이라서 문제가 있다.”라든가, “운이 좋게 답을 맞췄다.”, “수치대입을 할 때는 문자는 대입해서는 안된다.”라는 불필요하고, 게다가 정확하지도 않은 (수학을 공부하시는 분들, 혹은 개념대로 설명하신다고 소문난 분들이 한 평가라고는 도저히 상상할 수도 없는) 평가를 들어야 했습니다. 지금부터 이런 평가들이 얼마나 잘못된 것인지를 하나하나 따져 보겠습니다.

1. “동치변형이 아닌 풀이라서 문제가 있다.”라는 쟁점은 포카칩님께서 가장 먼저 제기하신

내용입니다. 여기서 ‘동치’는 ‘필요충분조건’을 나타내는 표현입니다. 이런 생각을 하시는 분들이 느끼는 문제의식의 핵심은 조건 (나)식의 양변을 미분하여 얻은 ©의 식이 조건 (나)와 필요충분조건임을 보장할 수 없다는 것입니다. 즉, 조건 (나)로부터 ©가 항등식이라는 성질이 유도되는 것이 맞지만, ©라는 항등식으로부터 조건 (나)가 유도되지 않습니다. 적분 상수의 문제가 있기 때문입니다. 또, 포카칩님께서는 다음의 예를 들어주셨습니다.

$F(x)=x+\sin x$라 하고, $F'(x)=f(x)$할 때, 모든 실수 x에 대하여 $F(x+a)-F(x)=2\pi$를 만족하는 실수 a의 값은 오직 2π 뿐이지만, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+a)-f(x)=0$을 만족하는 실수 a의 값은 $2n\pi$ (n은 정수)이다.

이 예는 x의 입장에서 항등식이지만, 그것을 a의 입장으로 보면 방정식으로 해석해야 하고, 방정식의 a의 해가 달라질 수 있음을 보여주는 좋은 사례입니다. 이 예 하나로 양변을 미분하여 얻은 항등식이 필요충분조건이 아님을 바로 이해할 수 있습니다. 그래서 포카칩님께서는 조건 (나)를 미분하지 않은 채로 <풀이1>과 같이 풀어야 하며, <풀이2>, <풀이3>, <풀이4>와 같이 ©식을 이용하여 푼 풀이들은 옳지 않은 풀이, 혹은 기적적으로 운이 좋아서 맞은 풀이라고 주장하셨습니다. 그런데, 이런 설명에는 두 가지 결정적인 문제가 있습니다.

첫째, ©식이 조건 (나)와 필요충분조건이 아니어서 ©식을 가지고 풀었을 때, a의 값이 여러 개가 나올 경우 실제 정답은 $\frac{5\pi}{3}$를 제외한 다른 값들이 답이 될 수 없음을 알아낼 수 있다면, 그것은 역시 올바른 풀이라는 점입니다. 우리가 필요충분조건이 되는 풀이인지 아닌 풀이인지를 신경 써야 하는 이유는 필요충분조건이 아니면 잘못된 풀이이기 때문이 아니라, 필요충분조건이 아닐 경우 실제의 답과 관련 없는 경우들이 발생할 ‘가능성’이 있기 때문입니다. 즉, 번거로워질 가능성이 있는 것일 뿐, 논리적으로 틀린 것은 절대로 아닙니다. 실제의 답이 아닌 경우들을 정확하게 지적하여 제거하지 못한다면, 그것은 틀린 풀이가 될 것이고, 실제의 답이 아닌 경우들을 정확하게 제거한다면, 그것은 올바른 풀이가 됩니다. 학생들에게 필요충분조건을 점검하는 것을 강조하는 이유는, 그렇게 풀지 않았을 경우 답과 관련 없는 경우들을 제거해야 한다는 필요성 때문일 뿐입니다. 충분히 올바른 풀이입니다.

둘째, 포카칩님께서 필요충분조건의 문제 때문에 <풀이1>을 추천하셨지만, 그렇다고 해서 <풀이1>도 필요충분조건인 상태를 유지하면서 푼 것이 아니라는 점이 문제입니다. <풀이1>도 필요충분조건이 아닌 근거는 ‘수치대입법’에 있습니다. ‘수치대입법’이란 조건 (나), 혹은 ©에 적당한 수치를 대입하여 a의 값을 구하는 과정입니다. 예를 들어 <풀이1>에서 조건 (나)가 $x=0$일 때 성립하고, $x=-a$일 때 성립함을 이용하여 a의 값을 구했는데, 실제로 조건 (나)는 모든 실수 x에 대하여 성립하는 등식으로 주어졌습니다. 그러므로 조건 (나)를 충분하게 사용하지 않고, 겨우 2개의 실수만 대입하였을 뿐입니다. 즉, 조건 (나)로부터 Ⓐ, Ⓑ의 식이 유도되는 것은 맞지만, Ⓐ, Ⓑ의 식으로부터 조건 (나)가 유도되는 것은 아닙니다. 따라서 필요충분조건이 아닙니다. 수치대입법을 이용한다면, 이런 현상이 발생하는 것은 당연한

일입니다. 아무리 많은 수를 대입한다고 해도, 모든 실수를 다 대입할 수 없기 때문에 조건 (나), 혹은 항등식 ⓒ의 필요충분조건이 될 수 없습니다. 따라서 애초에 필요충분조건이길 포기하고 풀 수밖에 없습니다. 실제로 <풀이1>, <풀이2>, <풀이3>, <풀이4> 모두 필요충분조건으로 푼 것이 아닙니다. 필요조건만 성립할 뿐입니다. 각각의 풀이에 밑줄친 진행이 모두 필요충분조건으로 진행되지 않고, 필요조건만 성립하는 부분입니다. <풀이1>, <풀이2>, <풀이3>, <풀이4> 모두 어차피 필요충분조건이 안되는 풀이인 이유는 '수치대입법'을 진행했다는 것 자체에 있습니다. 만약에 필요충분조건으로만 풀어야 한다고 생각했다면, 절대로 수치대입법을 사용해서는 안됩니다. 그러므로 필요충분조건이 아니라고 틀리다고 주장하실 분들은 수치대입법을 전형 사용하지 않고, $a=\frac{5\pi}{3}$을 유도하는 방법을 제시해 주셨으면 좋겠습니다. 수치대입법 사용하지 않고서는 a의 값을 구할 수 없는 분들은 타인의 풀이에 대해 필요충분조건 여부를 따질 자격이 없습니다.

2. "수치대입을 할 때는 문자는 대입해서는 안된다."라는 쟁점은 포카칩님과 한석원 선생님께서 제기하셨습니다. (포카칩님은 글로, 한석원 선생님은 동영상 강의로) 이 분들의 주장을 받아들이면 다음의 <문제1>은 어떻게 풀어야 할까요?

<문제1>

실수 전체의 집합에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 등식

$$\int_a^x f(t)dt = x-3$$

를 만족할 때, $a+f(0)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수)

<해설1>

등식 $\int_a^x f(t)dt = x-3$의 양변에 $x=a$를 대입하면, $0=a-3$이므로 $a=3$이다. …… Ⓘ

등식 $\int_a^x f(t)dt = x-3$의 양변을 x에 관하여 미분하면, $f(x)=1$이다. …… Ⓙ

따라서 $f(0)=1$이다.

$\therefore\ a+f(0)=3+1=4$

보통 많은 학생들이 <해설1>과 같이 생각합니다. 그런데, 포카칩님과 한석원 선생님은 <해설1>에서 Ⓘ의 과정을 진행해서는 안된다는 주장을 하고 계십니다. 또, 위의 필요충분조건에 대한 논의를 잘 읽어보면, Ⓙ의 과정도 엄밀하게는 필요충분조건을 보장하지 않습니다. 그러면 우리는 도대체 무엇을 할 수 있는 걸까요?

이런 개념의 착각 역시 항등식에 대한 이해 부족에서 비롯된 것입니다. 당연히도 항등식에는 문자를 대입할 수 있습니다. 6평 30번 문제에서도, <문제1>에서도 a가 상수라고 언급되어

있으니, a는 아직 잘 모르지만 어떤 수일 뿐, 다른 그 무엇도 아닙니다. a라는 문자로 썼다고 해서, 잘 모른다고 해서 대입할 수 없는 게 아닙니다. 항등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다고 되어 있는데, 그 때 $x=-a$를 대입하든 $x=-\frac{a}{2}$를 대입하든 양변에 분명하게 같은 수를 대입하여 얻은 등식은 그 어느 것도 올바른 등식이 맞습니다.

한석원 선생님은 동영상 강의에서 다음과 같은 문제를 던져 주셨습니다.

<문제2>

모든 실수 x에 대하여 등식

$$a\sin x=\sin x$$

가 성립할 때, a의 값을 구하시오. (단, a는 상수)

우리는 쉽게 $a=1$임을 예측할 수 있습니다. 그런데, 여기에 한석원 선생님은 $x=a$를 대입하는 경우를 설명하시고, 그런 행동을 해서는 안된다고 말씀하셨습니다. 과연 안되는 걸까요?

<해설2>

$a\sin x=\sin x$의 양변에 $x=a$를 대입하면, $a\sin a=\sin a$이다.
$(a-1)\sin a=0$으로부터 $a=1$ 또는 $a=n\pi$ (n은 정수)이다.

아무도 <해설2>와 같은 과정을 거칠 거라고 생각하지 않습니다만, 누군가가 <해설2>와 같은 과정으로 진행했을 경우, 그 누군가에게 해야할 조언은 “그저 넌 운이 좋았을 뿐이야.”가 아니라, “수치대입을 해서 필요충분조건이 아니므로, $a=n\pi$인 경우를 제거해야 해.”여야 합니다. a의 값이 여러 개 나왔다는 이유로 안되는 풀이라고 하는 것은 역시 필요충분조건 여부에 기인하는 것인데, 필요충분조건이 아님을 알고, $a=n\pi$인 경우를 제거하면 그만일 뿐, 무조건 안된다고 배제하는 것은 바람직하지 않습니다.

더욱 충격적인 것은 한석원 선생님은 동영상 강의에서 <풀이4>의 방법으로 설명하셨는데, 선생님 자신도 그 과정에서 평행이동을 설명하기 위해 x의 자리에 $x-a$를 대입하셨다는 것입니다. 스스로 문자를 대입하셨고, 게다가 x라는 변수와 a라는 상수가 함께 존재하는 식을 대입하셨습니다. 마치 자신은 수치대입법을 사용하지 않은 것처럼 설명하셨으나, 엄연히 수치대입법을 사용하셨고, 그러므로 필요충분조건이 아닌 방법으로 풀었습니다. 그리고 그런 풀이를 동영상의 말미에 스스로 “운이 좋았고, 이러한 운은 평가원이 배려해 준 덕분이다.”라고 평가해 주셨습니다. 왜 자신이 x에 $x-a$를 대입하는 것은 괜찮다고 생각하면서, 학생들이 x에 $-a$나 $-\frac{a}{2}$를 대입하는 것은 ‘운’이라고 깎아 내리는 걸까요? 한석원 선생님 자신도 운이 좋았을 뿐임을 인정하는 겸손의 멘트였을까요?

결론을 말하자면, x에 $x-a$를 대입하는 것도 올바른 풀이입니다. 항등식에는 상수만 대입할 수 있는 것이 아닙니다. 변수, 또다른 함수들도 양변에 똑같이 대입하면 역시 등식이

성립합니다. 예를 들어 조건 (나)에 양변에 $x=s^2$을 대입하여 $\int_{s^2}^{s^2+a} f(t)dt = \sin\left(s^2+\frac{\pi}{3}\right)$라고 써도, 이 식은 s에 관한 항등식이 됩니다. 이런 변신은 얼마든지 할 수 있습니다. (이 문제에서는 이런 변신을 해도 아무런 이득이 없습니다만...) 단, 이것은 조건 (나)와 필요충분조건은 아닐 뿐입니다.

a에 관한 식을 대입할 수 없다고 주장하는 분들은 그런 식을 대입하여 얻은 a에 관한 방정식의 a의 해 중에 일부가 문제의 답이 되지 않음을 보신 것인데, 이것 역시 수치대입법의 필요충분조건이 아닌 성질에서부터 기인하는 것일 뿐입니다. 대입하여 나온 많은 a의 값 중에 답이 되지 않는 것을 제거하는 과정이 필요할 뿐입니다. 그러므로 우리는 항등식에 양변에 같은 수, 같은 식, 같은 함수 등등을 자유롭게 대입할 수 있습니다. 또 양변을 미분할 수도 있습니다. 미분한 것을 또 미분할 수도 있습니다. 양변의 같은 구간의 정적분을 취할 수도 있습니다. 이처럼 항등식은 진행할 수 있는 방향이 많은 식입니다. 단, 이 모든 행동이 필요충분조건을 보장하지 못하기 때문에, 답이 되지 않는 해가 나올 수 있으므로, 조심해야 한다는 것이 중요합니다.

(B단계)
위의 <풀이1>, <풀이2>, <풀이3>, <풀이4>는 6평 가형 30번 문제를 항등식의 미정계수 문제로 봤을 때, 모두 일반성이 있는 풀이입니다. 항등식의 미정계수 문제는 처음에 시작할 때는 미정계수들을 모른 채로 시작하지만, 항등식의 계수를 비교하거나, 수치를 대입하는 과정을 통하여 미정계수들이 가질 값의 경우들을 줄여 나가다 보면, 마지막에 1가지의 해가 나오는 형식을 취합니다. <풀이1>, <풀이2>, <풀이3>, <풀이4> 모두 이와 같은 전형적인 진행을 하고 있으므로, 미정계수 문제로 봤을 때는 일반성이 있습니다.

그러나 6평 가형 30번 문제를 주기함수의 문제로 봤을 때는 <풀이2>, <풀이3>, <풀이4>만 일반성이 있고, <풀이1>은 일반성이 없습니다. 이 문제는 <풀이6>에서 설명하겠지만, 결과적으로 조건 (나)에서 $\int_0^x f(t)dt + \sin x$라는 함수가 주기가 $\frac{5\pi}{3}$인 주기함수임을 알아내야 $f(x)$의 정체를 쉽게 파악할 수 있는 문제입니다. 그래야 함수 $f(x)$를 일반적으로 구할 수 있기 때문입니다. 그런데, $f(x)$는 구간 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$에서 $f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$이고, 조건 (가)에서 $f(x)=f(-x)$이므로, 조건 (나)를 사용하지 않고 최대한 알아낼 수 있는 것은 닫힌구간 $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$에서 $f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$라는 사실입니다. 즉, 함수 $\int_0^x f(t)dt + \sin x$의 한 주기를 알고 있을 뿐입니다. 주기함수와 관련한 성질을 파악할 때, 주어진 한 주기의 양 끝에서 연속과 미분가능 등등의 조건을 보는 게 일반적인 접근입니다. 그래서 $x=-\frac{a}{2}$를 대입하는 방법이 $x=-a$를 대입하는 방법보다 훨씬 일반적인 풀이라고 할 수도 있습니다.

(C단계)
효율성의 측면에서는 <풀이1>, <풀이2>, <풀이3>, <풀이4> 모두 필요충분조건으로 풀지 않아서 a의 값이 여러 개가 나올 가능성이 있다는 점을 고려해야 합니다. 즉, 답이 되지 않을 a의 값이 가장 적게 나올 것으로 예상되는 방법이 검증을 많이 할 필요가 없게 만들기 때문에 효율적인 방법이라고 할 수 있습니다. 그런 의미에서는 <풀이1>에서 $\sin\left(-a+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$, <풀이3>에서 $\cos\left(a-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$로 푸는 것보다는 <풀이2>와 <풀이4>와 같이 $\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0$로 푸는 것이 효율적인 풀이입니다.

$\sin\left(-a+\frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(a-\frac{\pi}{3}\right)$와 같은 함수들은 a의 주기가 2π인 함수들인데, $\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$와 같은 함수는 a의 주기가 4π인 함수입니다. 6평 30번 문제에서는 $0<a<2\pi$로 주어졌기 때문에, $\sin\left(-a+\frac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(a-\frac{\pi}{3}\right)$와 같은 함수들은 한 주기를 모두 점검해야 해서, a의 해가 2개 나올 가능성이 높은데, $\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$와 같은 함수는 주기의 절반만 점검하기 때문에, a의 해가 1개 나올 가능성이 높습니다. 물론 <풀이1>에서 a의 값이 1개가 나왔지만, 이것은 범위가 운 좋게도 $0<a<2\pi$로 주어졌기 때문이며, 만약에 $\pi<a<3\pi$로 주어졌다면 당연히도 2개가 나왔을 것입니다.

예를 들어 $0<a<4\pi$로 주어졌다면,
$\sin\left(-a+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}$는 $a=\frac{5\pi}{3}$, $a=2\pi$, $a=\frac{11\pi}{3}$을 얻습니다.
$\cos\left(a-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$는 $a=\pi$, $a=\frac{5\pi}{3}$, $a=3\pi$, $a=\frac{11\pi}{3}$을 얻습니다.
$\cos\left(-\frac{a}{2}+\frac{\pi}{3}\right)=0$는 $a=\frac{5\pi}{3}$, $a=\frac{11\pi}{3}$을 얻습니다.

따라서 효율성의 측면에서는 <풀이2>와 <풀이4>와 같이 $x=-\frac{a}{2}$를 대입한 결과를 이용하는 것이 바람직합니다. 여기서 효율성을 논하면서 “어떤 풀이가 필요충분조건에 가까운가?”라는 새로운 쟁점을 만드는 분들도 있습니다. 막연하게 필요충분조건으로 오래 지속하면 효율적일 거라고 생각하는 것은 문제가 있습니다. 수리적인 근거 없이 감각으로 효율성을 논해서는 안됩니다. 이 문제에서 a의 값을 구하는 과정에서 계산 시간을 따지는 방법은 a의 범위가 무한히 커질 때, 언급될 수 있는 a의 값의 개수에 의하여 정해지는 것이 합리적입니다.

2단계 - b, c의 값을 구하는 과정의 논쟁점

$a=\dfrac{5\pi}{3}$을 얻은 후에 b, c의 값을 구하는 과정은 보통 다음과 같은 것이 있습니다.

<풀이5>

조건 (나)에서 $\displaystyle\int_{x}^{x+\frac{5}{3}\pi}f(t)dt=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$이다.

$x=-\dfrac{5}{6}\pi$를 대입하면, $\displaystyle\int_{-\frac{5}{6}\pi}^{\frac{5}{6}\pi}f(t)dt=\sin\left(-\frac{5}{6}\pi+\frac{\pi}{3}\right)$가 성립한다.

조건 (가)에서 $f(-x)=f(x)$이므로, $\displaystyle 2\int_{0}^{\frac{5}{6}\pi}f(t)dt=-1$이다.

$\displaystyle 2\int_{0}^{\frac{5}{6}\pi}\{b\cos(3t)+c\cos(5t)\}dt=-1$이므로, $\displaystyle 2\left[\frac{1}{3}b\sin(3t)+\frac{1}{5}c\sin(5t)\right]_{0}^{\frac{5}{6}\pi}=-1$이 되어,

$\dfrac{1}{3}b+\dfrac{1}{10}c=-\dfrac{1}{2}$ …… ㉠이다.

한편 조건 (가)의 양변을 x에 관하여 미분하면, $f'(x)=-f'(-x)$이다.

조건 (나)의 양변을 x에 관하여 미분하면, $f'\left(x+\dfrac{5}{3}\pi\right)-f'(x)=-\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$이다.

두 식 모두 $x=-\dfrac{5}{6}\pi$를 대입하면, $f'\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)=-f'\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)$, $f'\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)-f'\left(-\dfrac{5}{6}\pi\right)=1$이다.

두 식을 변변끼리 더하여 정리하면, $f'\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{1}{2}$이다.

$g(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)$라고 하면, $g'(x)=-3b\sin(3x)-5c\sin(5x)$이다.

그런데, 닫힌구간 $\left[0,\dfrac{5}{6}\pi\right]$에서 $f(x)=b\cos(3x)+c\cos(5x)=g(x)$이고,

$f(x)$는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$에서 미분가능하므로,

$$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\lim_{x\to\frac{5}{6}\pi-}\frac{f(x)-f\left(\frac{5}{6}\pi\right)}{x-\frac{5}{6}\pi}=\lim_{x\to\frac{5}{6}\pi-}\frac{g(x)-g\left(\frac{5}{6}\pi\right)}{x-\frac{5}{6}\pi}=g'\left(\frac{5}{6}\pi\right)$$가 성립한다.

즉, $-3b-\dfrac{5}{2}c=\dfrac{1}{2}$ …… ㉡이다.

㉠와 ㉡을 연립하여 풀면, $b=-\dfrac{9}{4}$, $c=\dfrac{5}{2}$이다.

<풀이6>

조건 (나)에서 $\int_0^{x+\frac{5}{3}\pi} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{5\pi}{6}$ 이다.

$\int_0^{x+\frac{5}{3}\pi} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt = \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x+\frac{7\pi}{6}\right) = \sin x - \sin\left(x+\frac{5\pi}{3}\right)$

$\int_0^{x+\frac{5}{3}\pi} f(t)dt + \sin\left(x+\frac{5\pi}{3}\right) = \int_0^x f(t)dt + \sin x$

$h(x) = \int_0^x f(t)dt + \sin x$라고 하면, $h\left(x+\frac{5\pi}{3}\right) = h(x)$ …… Ⓜ이므로, $h(x)$는 주기가 $\frac{5\pi}{3}$ 인 주기함수다. $h'(x) = f(x) + \cos x$, $h''(x) = f'(x) - \sin x$이고,

모든 실수 x에 대하여 $h'\left(x+\frac{5\pi}{3}\right) = h'(x)$, $h''\left(x+\frac{5\pi}{3}\right) = h''(x)$ …… Ⓝ가 성립한다.

구간 $\left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$에서 $h(x) = \int_0^x f(t)dt + \sin x = \frac{b}{3}\sin 3x + \frac{c}{5}\sin 5x + \sin x$이다.

Ⓜ에 $x = -\frac{5\pi}{6}$을 대입하면, $h\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = h\left(\frac{5\pi}{6}\right)$이다.

$-\frac{b}{3} - \frac{c}{10} - \frac{1}{2} = \frac{b}{3} + \frac{c}{10} + \frac{1}{2}$이므로, $\frac{1}{3}b + \frac{1}{10}c = -\frac{1}{2}$ …… Ⓚ이다.

Ⓝ에 $x = -\frac{5\pi}{6}$을 대입하면, $h''\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = h''\left(\frac{5\pi}{6}\right)$이다. $f'\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} = f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$이다. 즉,

$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right) - f'\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = 1$ …… Ⓞ이다. 한편 조건 (가)의 양변을 x에 관하여 미분하면,

$f'(x) = -f'(-x)$이다. $x = -\frac{5}{6}\pi$를 대입하면, $f'\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = -f'\left(\frac{5}{6}\pi\right)$ …… Ⓟ이다.

Ⓞ, Ⓟ를 변변끼리 더하여 정리하면, $f'\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{1}{2}$이다.

$g(x) = b\cos(3x) + c\cos(5x)$라고 하면, $g'(x) = -3b\sin(3x) - 5c\sin(5x)$이다.

$f'\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \lim_{x\to\frac{5}{6}\pi-} \frac{f(x) - f\left(\frac{5}{6}\pi\right)}{x - \frac{5}{6}\pi} = \lim_{x\to\frac{5}{6}\pi-} \frac{g(x) - g\left(\frac{5}{6}\pi\right)}{x - \frac{5}{6}\pi} = g'\left(\frac{5}{6}\pi\right)$가 성립한다.

즉, $-3b - \frac{5}{2}c = \frac{1}{2}$ …… Ⓛ이다.

Ⓚ와 Ⓛ을 연립하여 풀면, $b = -\frac{9}{4}$, $c = \frac{5}{2}$이다.

(A단계)
<풀이5>와 <풀이6> a, b, c의 값을 구하는 데에는 모두 올바른 풀이라고 할 수 있습니다. 그런데, <풀이5>에서는 일단 b, c의 값을 구하는 데에만 집중했다고 볼 수 있습니다. 따라서 $a=\frac{5\pi}{3}$, $b=-\frac{9}{4}$, $c=\frac{5}{2}$를 얻었을 때, 문제의 조건을 모두 만족하는 $f(x)$가 무엇인지, 혹은 모두 만족하는 $f(x)$가 정말로 존재하는 지를 아직 명확하게 알 수 없는 상황입니다.
<풀이6>에서 b, c를 구하는 식은 결국 <풀이5>와 다르지 않습니다. 그러나 <풀이6>에서는 $h(x)=\int_0^x f(t)dt+\sin x$라고 했을 때, $h(x)$가 주기가 $\frac{5\pi}{3}$인 주기함수임을 알았습니다. 그러면, $h'(x)=f(x)+\cos x$도 주기가 $\frac{5\pi}{3}$인 주기함수임을 알 수 있습니다.

구간 $\left[-\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$에서 $h'(x)=-\frac{9}{4}\cos 3x+\frac{5}{2}\cos 5x+\cos x$이므로,

정수 n에 대하여 구간 $\left[-\frac{5\pi}{6}+\frac{5n\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}+\frac{5n\pi}{3}\right]$에서

$h'(x)=h'\left(x-\frac{5n\pi}{3}\right)=-\frac{9}{4}\cos 3\left(x-\frac{5n\pi}{3}\right)+\frac{5}{2}\cos 5\left(x-\frac{5n\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{5n\pi}{3}\right)$가 성립합니다.

$f(x)+\cos x=-\frac{9}{4}\cos(3x-5n\pi)+\frac{5}{2}\cos\left(5x-\frac{25n\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{5n\pi}{3}\right)$이므로,

따라서 정수 n에 대하여 구간 $\left[-\frac{5\pi}{6}+\frac{5n\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}+\frac{5n\pi}{3}\right]$에서

$f(x)=\frac{9\times(-1)^n}{4}\cos 3x+\frac{5}{2}\cos\left(5x-\frac{n\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{n\pi}{3}\right)-\cos x$가 성립합니다.

이 결과는 6평 가형 30번 문제의 조건을 만족하는 $f(x)$가 유일하게 존재함을 확인한 것입니다. 우리는 <풀이5>와 같이 풀어도 a, b, c의 값을 얻을 수 있습니다. 다만, a의 값을 구하는 과정부터 필요충분조건으로 진행하지 못하였기 때문에, 엄밀하게 하면, <풀이5>에서 구한 a, b, c의 값을 모두 만족하는 $f(x)$가 존재하는 지를 확인해야 합니다. 그런 의미에서는 <풀이6>이 <풀이5>보다 좀 더 정확한 풀이라고 할 수 있습니다.

(B, C단계)
<풀이6>이 <풀이5>보다 정확한 풀이이기 때문에, 일반성과 효율성에 대한 평가는 굳이 진행할 필요가 없습니다. 그래도 굳이 평가를 내리자면, <풀이6>의 주기적 성질을 확인하여 x의 모든 범위에서의 함숫값을 다 구할 수 있는 체제이므로, 실전에서 묻는 값이 무엇이든 관계없이 해결능력을 갖게 되는 방법입니다.
<풀이5>와 <풀이6>은 결국 Ⓚ, Ⓛ식을 유도했다는 측면에서 동일한 효율성을 가지고 있습니다. 효율성의 측면에서는 평가할 필요가 없습니다.

다음은 6평 가형 30번 문제는 다음의 EBS 수능특강 문제를 변형한 것입니다.

<EBS 수능특강 미적분2 26쪽 3번 문제>

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 두 상수 a, b에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+a)=f(x)+b$이다.
(나) $-a \le x < 0$일 때, $f(x)=x^2e^x$이다.

ab의 값은? (단, $0<a<e$)

① $-\dfrac{8}{e^2}$ ② $-\dfrac{8}{e}$ ③ $-\dfrac{4}{e^2}$ ④ $-\dfrac{4}{e}$ ⑤ $-\dfrac{2}{e^2}$

<EBS 수능특강의 해설>

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(x+a)=f(x)+b$이고, $0 \le x+a < a$일 때,
$-a \le x < 0$이므로 $x+a=t$로 놓으면 $0 \le t < a$이고,
$f(t)=f(t-a)+b=(t-a)^2e^{t-a}+b$ …… Ⓠ이다.

$-a \le x < a$에서 $f(x)=\begin{cases} x^2e^x & (-a \le x < 0) \\ (x-a)^2e^{x-a}+b & (0 \le x < a) \end{cases}$이다.

따라서 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\{(x-a)^2e^{x-a}+b\}=a^2e^{-a}+b$, $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}x^2e^x=0$이다.
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이어야 한다.
$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)=f(0)$에서 $0=a^2e^{-a}+b$이므로 $b=-a^2e^{-a}$ …… Ⓡ이다.

$$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{x^2e^x}{x}=\lim_{x\to0-}xe^x=0$$

Ⓠ, Ⓡ에 의하여 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{(x-a)^2e^{x-a}-a^2e^{-a}}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\left\{\dfrac{(x-2a)e^x}{e^a}+\dfrac{a^2(e^x-1)}{e^ax}\right\}$

그런데, $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{(x-2a)e^x}{e^a}=-\dfrac{2a}{e^a}$, $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$이므로 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=a(a-2)e^{-a}$이다.
또, 주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능해야 하므로
$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$에서 $a(a-2)e^{-a}=0$이다.

$0<a<e$ 이므로 $a=2$이고, 이 때 $b=-\dfrac{4}{e^2}$ 이다.

$\therefore\ ab=-\dfrac{8}{e^2}$

<주기성을 이용한 해설>

조건 (가)에서 $f(x+a)-\dfrac{b}{a}(x+a)=f(x)-\dfrac{b}{a}x$이다.

$g(x)=f(x)-\dfrac{b}{a}x$라고 치환하면, $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수이므로, $g(x)$도 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수가 된다. 또, $g(x+a)=g(x)$가 되어, $g(x)$는 주기가 a인 주기함수가 된다.

조건 (나)에서 $-a \leqq x < 0$일 때, $g(x)=x^2e^x-\dfrac{b}{a}x$이다.

이 때, $g(x)$가 $x=0$에서만 미분가능하면, 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수가 된다.

실수 전체의 집합에서 함수 $h(x)$를 $h(x)=x^2e^x-\dfrac{b}{a}x$라 하자. $h'(x)=(x^2+2x)e^x-\dfrac{b}{a}$이다.

그러면, $-a \leqq x < 0$일 때 $g(x)=h(x)$이다.

$g(x)$가 $x=0$에서만 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 0-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0+}g(x)$로부터 $\lim\limits_{x\to 0-}h(x)=\lim\limits_{x\to 0+}g(x-a)$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0-}h(x)=\lim\limits_{x\to 0+}h(x-a)$이므로, $h(0)=h(-a)$이다.

$h(0)=0$이므로, $h(-a)=a^2e^{-a}+b=0$ …… Ⓐ이 성립해야 한다.

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$ 로부터

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{h(x)-h(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(x-a)-g(-a)}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{h(x)-h(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{h(x-a)-h(-a)}{x}$이므로, $h'(0)=h'(-a)$이다. $-\dfrac{b}{a}=(a^2-2a)e^{-a}-\dfrac{b}{a}$가 되어, $(a^2-2a)e^{-a}=0$이다.

$a(a-2)e^{-a}=0$이고, $0<a<e$이므로, $a=2$이다.

Ⓐ에 대입하면, $4e^{-2}+b=0$이므로, $b=-\dfrac{4}{e^2}$이다.

$\therefore\ ab=-\dfrac{8}{e^2}$

이 문제에서 EBS 수능특강에서 제시된 해설에는 $x=0$에서의 미분가능성만 조사했을 뿐, 구간 $(-\infty,\infty)$에서 미분가능성을 조사하지 않은 형태가 됩니다. 주기적 성질을 발견하지 못했기 때문에 생기는 현상입니다. 따라서 우리는 문제의 조건과 필요충분조건이 되는 상수 a, b를 구하기 위해서는 반드시 <주기성을 이용한 해설>의 관점으로 풀어야 합니다.