1.번

좌표평면에서 x, y에 대한 연립부등식

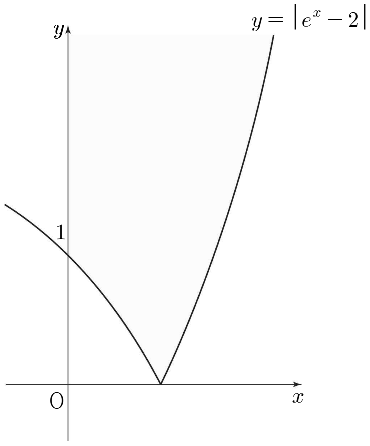
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq |e^x - 2| \end{cases}$$

가 나타내는 영역을 D라 하자. 양의 실수 t에 대하여 영역 D의 서로 다른 네 점을 꼭짓점으로 하는 정사각형 A가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 정사각형 A의 한 변의 길이는 t이다. (나) 정사각형 A의 한 변은 x축과 평행하다.

정사각형 A의 두 대각선의 교점의 y좌표의 최솟값을 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2) + f'(\ln 5) = \dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)



3.번

$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 인 θ에 대하여 좌표평면 위의 두 직선 l, m은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 직선 l, m은 서로 평행하고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 각각 θ이다.

(나) 두 직선 l, m은 곡선 $y=\sqrt{2-x^2}\,(-1 \le x \le 1)$과 각각 만난다.

두 직선 l과 m 사이의 거리의 최댓값을 $f(\theta)$라 할 때,

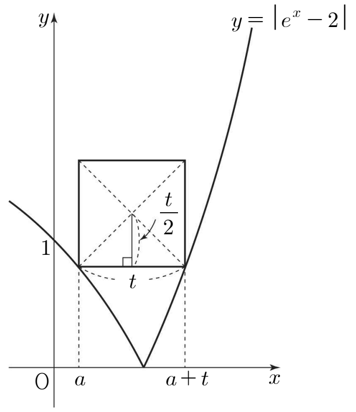
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)d\theta = a+b\sqrt{2}\pi$ 이다. $20(a+b)$의 값을 구하시오.

(단, a와 b는 유리수이다.)

1. 정답 71 교육청 기출

$g(x)=\left|e^x-2\right|$라 하자.
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=1$의
교점의 좌표는 $(0,\ 1)$, $(\ln 3,\ 1)$
$f(t)$는 한 변의 길이가 t인 정사각형의 꼭짓점이
$g(x)$의 그래프와 만날 때 정해진다.
$0<t\le\ln 3$이면 두 점에서 만나고
$t>\ln 3$이면 한 점에서 만날 때이다.

i) $0<t\le\ln 3$일 때

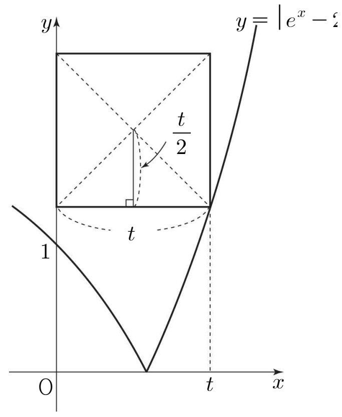


정사각형과 $y=g(x)$의 두 교점의 x좌표를 a와
$a+t$라 하면 두 교점의 좌표는
$(a,\ 2-e^a)$, $(a+t,\ e^{a+t}-2)$
두 교점의 y좌표가 같으므로 $e^a=\dfrac{4}{e^t+1}$이고,

$$f(t)=2-e^a+\frac{t}{2}$$

$$f(t)=2-\frac{4}{e^t+1}+\frac{t}{2}$$

ii) $t>\ln 3$일 때



정사각형과 $y=g(x)$의 교점의 좌표는 $(t,\ e^t-2)$

$$\therefore\ f(t)=e^t-2+\frac{t}{2}$$

그러므로 함수 $f(t)$는

$$f(t)=\begin{cases} 2-\dfrac{4}{e^t+1}+\dfrac{t}{2} & (0<t\le\ln 3) \\ e^t-2+\dfrac{t}{2} & (t>\ln 3) \end{cases}$$

함수 $f(t)$의 도함수 $f'(t)$는

$$f'(t)=\begin{cases} \dfrac{4e^t}{(e^t+1)^2}+\dfrac{1}{2} & (0<t<\ln 3) \\ e^t+\dfrac{1}{2} & (t>\ln 3) \end{cases}$$

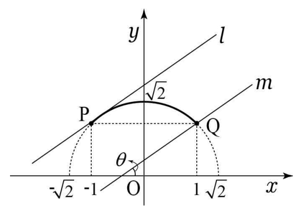
$$f'(\ln 2)+f'(\ln 5)=\frac{25}{18}+\frac{11}{2}=\frac{62}{9}$$

따라서 $p=9$, $q=62$이고 $p+q=71$

2. 답 25 교육청 기출

곡선 $y=\sqrt{2-x^2}\,(-1\le x\le 1)$ 위의 양 끝점
$(-1,\ 1)$, $(1,\ 1)$을 각각 P, Q라 하고, 직선 l의 y절편이 직선 m의 y절편보다 크다고 하자.
점 P를 지나고 곡선 $y=\sqrt{2-x^2}$에 접하는 접선이 x축과 양의 방향으로 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$이므로

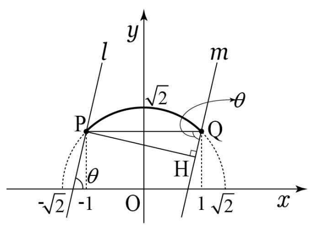
(i) $0\le\theta<\dfrac{\pi}{4}$일 때



$f(\theta)$는 직선 l이 곡선과 접하고, 직선 m이 점 Q를 지날 때 점 Q와 직선 l 사이의 거리이다.
곡선은 중심이 $(0,\ 0)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원의 일부이므로 곡선과 접하는 직선 l의 방정식은
$y=\tan\theta\, x+\sqrt{2}\sec\theta$이므로

$$f(\theta)=\frac{\left|\tan\theta-1+\sqrt{2}\sec\theta\right|}{\sqrt{\tan^2\theta+1}}$$
$$=\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{2}\ (\sin\theta-\cos\theta\ \ge\ -1)$$

(ii) $\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$일 때



$f(\theta)$는 직선 l이 점 P를 지나고 직선 m이
점 Q를 지날 때 점 P와 직선 m 사이의 거리와 같다. 즉, 점 P에서 직선 m에 내린 수선의 발을 H라 하면 $f(\theta)$는 선분 PH의 길이와 같다.
$\angle\mathrm{PQH}=\theta$이므로
$f(\theta)=2\sin\theta$
(i), (ii)에 의하여

$$f(\theta)=\begin{cases} \sin\theta-\cos\theta+\sqrt{2} & \left(0\le\theta<\dfrac{\pi}{4}\right) \\ 2\sin\theta & \left(\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

함수 $f(\theta)$는 닫힌 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 연속이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)d\theta$$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin\theta - \cos\theta + \sqrt{2})\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\,d\theta$

$= [-\cos\theta - \sin\theta + \sqrt{2}\,\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-2\cos\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= 1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

$a = 1,\ b = \frac{1}{4}$

따라서 $20(a+b) = 25$